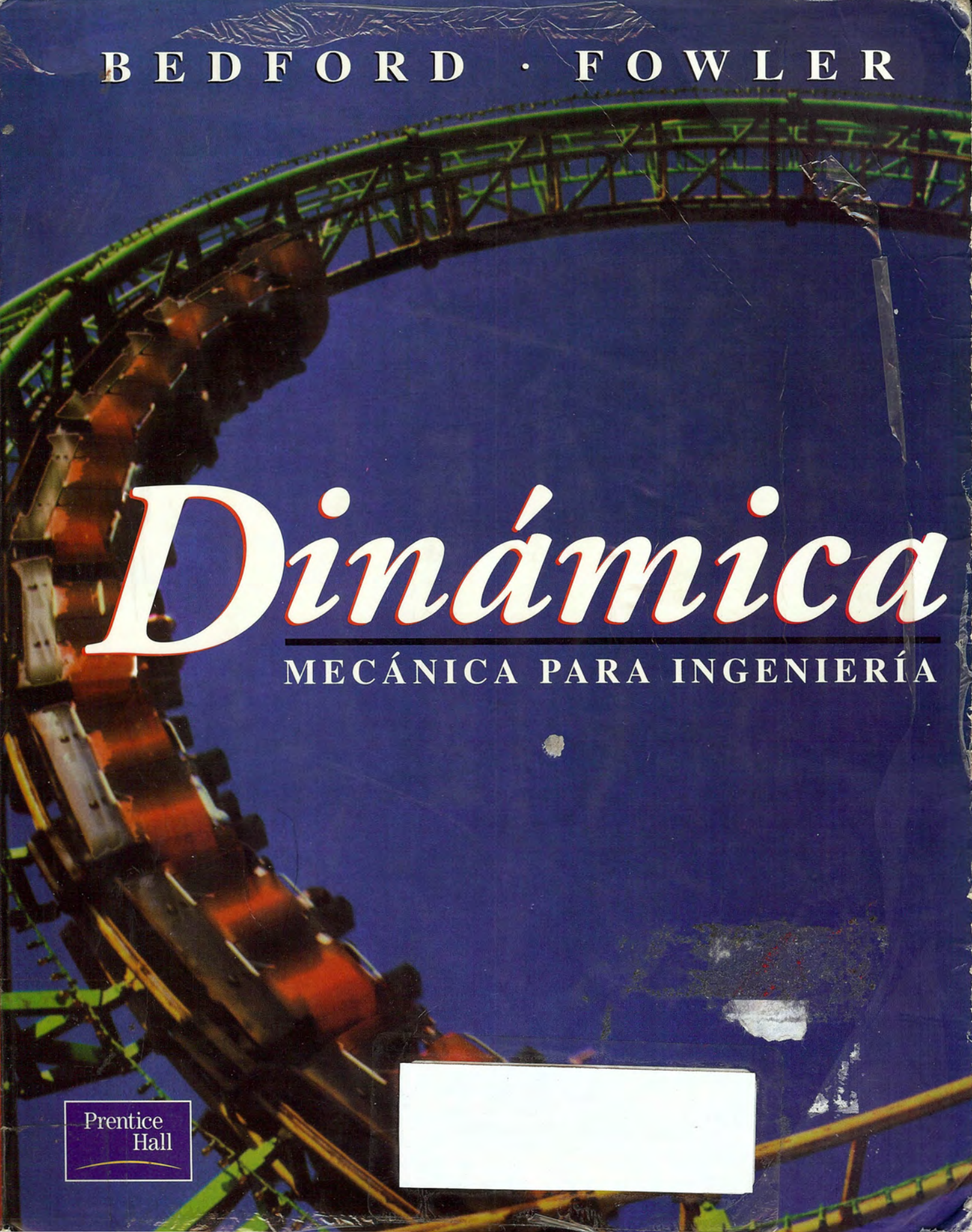
BEDFORD · FOWLER



Dinámica

MECÁNICA PARA INGENIERÍA

Prentice Hall

MECÁNICA PARA INGENIERÍA

Dinámica

Anthony Bedford

y

Wallace Fowler

The University of Texas (Austin)

Versión en español de

José E. de la Cera Alonso

Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Azcapotzalco, México

Con la colaboración de

Antonio Martín-Lunas

Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Azcapotzalco, México

Pearson Educación

MÉXICO • ARGENTINA • BRASIL • COLOMBIA • COSTA RICA • CHILE
ESPAÑA • GUATEMALA • PERÚ • PUERTO RICO • VENEZUELA

Versión en español de la obra titulada *Engineering Mechanics: Dynamics,* de A. Bedford y W. L. Fowler, publicada originalmente en inglés por Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, E.U.A. © 1995 por Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Esta edición en español es la única autorizada.

Créditos de fotografías:

Portada: Medford Taylor/Superstock;
fig. 2.11, The Harold E. Edgerton 1992 Trust, cortesía de Palm Press, Inc.;
fig. 2.44, cortesía de Intelsat;
fig. 4.2 U.S. Geological Survey;
fig. 5.4, The Harold E. Dgerton 1992 Trust, cortesía de Palm Press, Inc.;
fig. 5.54, The Harold E. Dgerton 1992 Trust, cortesía de Palm Press, Inc.;
fig. 6.44 (a y b), NASA;
fig. 10.20, U.S. Geological Survey.

© 1996 por Addison Wesley Iberoamericana, S.A.

D.R. © 2000 por Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V.
Calle 4 No. 25-2do. piso
Fracc. Industrial Alce Blanco
53370 Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Registro No. 1031

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.
El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN 968-444-471-0

Impreso en México/*Printed in Mexico*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 03 02 01 00 99

□
MAY

GRAFICAS MONTE ALBAN S.A. DE C.V.
FRAC. AGRO-INDUSTRIAL LA CRUZ
QUERETARO, QRO.

2000
□

Sobre los autores

Anthony Bedford es profesor de ingeniería aeroespacial e ingeniería mecánica en la University of Texas en Austin. Obtuvo su licenciatura en la University of Texas en Austin, su grado de maestría en el California Institute of Technology, y su doctorado en la Rice University en 1967. Adquirió experiencia industrial en la Douglas Aircraft Company y en TRW Systems, y ha sido profesor en la University of Texas en Austin desde 1968.

La principal actividad profesional del doctor Bedford ha sido la educación y la investigación en ingeniería mecánica. Es autor y coautor de muchos artículos científicos sobre mecánica de materiales compuestos y de dos libros, *Hamilton's Principle in Continuum Mechanics* e *Introduction to Elastic Wave Propagation*. Ha desarrollado cursos para estudiantes de licenciatura y de posgrado en mecánica, y se le premió con el General Dynamics Teaching Excellence Award.

El doctor Bedford es ingeniero profesional y miembro de la Acoustical Society of America, de la American Society for Engineering Education, de la American Academy of Mechanics y de la Society for Natural Philosophy.

Wallace L. Fowler es profesor de ingeniería en el departamento de ingeniería aeroespacial e ingeniería mecánica de la University of Texas en Austin. El doctor Fowler obtuvo sus grados de licenciatura, maestría y doctorado en la University of Texas en Austin, en donde ha sido profesor desde 1966. Durante 1976 fue miembro del personal académico de la United States Air Force Pilot School, Edwards Air Force Base, California, y en 1981-1982 fue profesor visitante en la United States Air Force Academy. Desde 1991 ha sido director del Texas Space Grant Consortium.

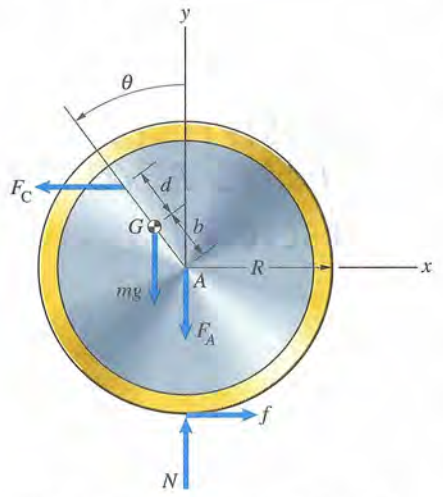
Las áreas de enseñanza e investigación del doctor Fowler son la dinámica, la mecánica orbital y el diseño de vehículos para misiones espaciales. Es autor y coautor de muchos artículos técnicos sobre optimación de trayectorias y sobre dinámica de posición; ha publicado también muchos artículos sobre teoría y práctica de la enseñanza de la ingeniería. Ha recibido numerosos premios de enseñanza, entre los que se cuentan el Chancellor's Council Outstanding Teaching Award, el General Dynamics Teaching Excellence Award, el Halliburton Education Foundation Award of Excellence y el AIAA-ASEE Distinguished Aerospace Educator Award.

El doctor Fowler es ingeniero profesional, miembro de muchas sociedades técnicas y del American Institute of Aeronautics and Astronautics y de la American Society for Engineering Education.

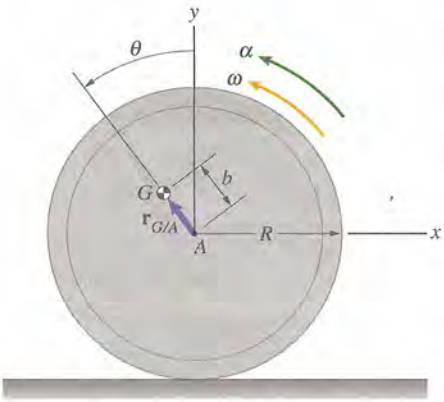
Prefacio

Durante veinticinco años hemos impartido el curso introductorio de dos semestres de ingeniería mecánica. Durante ese tiempo, los estudiantes nos han manifestado con frecuencia que pueden entender la exposición de la materia en clase, pero que tienen dificultad para comprender el libro de texto. Este comentario nos indujo a examinar lo que hace el profesor en el aula que difiere de la presentación tradicional de los libros de texto, y la conclusión obtenida fue la redacción de este libro. Nuestro procedimiento es presentar el material como lo hacemos en clase, utilizando más figuras y haciendo énfasis en la importancia del análisis visual minucioso y la comprensión de los conceptos. A lo largo del libro consideramos que los estudiantes son nuestro auditorio.

Figura 7.16



(a) Diagrama de cuerpo libre de la rueda.



(b) Aceleración del centro de masa G en función de la aceleración del centro A.

Objetivos y temas

Resolución de problemas Aquí destacamos la importancia crítica de adquirir destreza en la resolución de problemas. En los ejemplos resueltos enseñamos a los estudiantes a pensar sobre los problemas antes de que empiecen a resolverlos. ¿Qué principios son aplicables? ¿Qué se debe determinar y en qué orden? Las secciones llamadas *Estrategia* que preceden a casi todos los ejemplos son para ilustrar este análisis preliminar. Luego damos una descripción cuidadosa y completa de la solución, mostrando a menudo métodos alternativos. Finalmente, muchos ejemplos concluyen con una sección de *Comentarios* que señalan características de la solución, analizan o comparan métodos alternativos de solución, o bien muestran maneras de verificar las respuestas (véase el Ej. 3.2, págs. 106-107). Nuestro objetivo es enseñar a los estudiantes cómo abordar los problemas y evaluar críticamente los resultados. Además, para aquellos estudiantes que nos dicen que entienden el material de clase pero que no saben cómo empezar a resolver los problemas de tarea, les proporcionamos también breves secciones de Estrategia en algunos problemas seleccionados.

Visualización Uno de los elementos esenciales para tener éxito en la resolución de problemas es la visualización, en especial el uso de diagramas de cuerpo libre. En el aula, el profesor puede dibujar un diagrama paso a paso, describiendo cada uno de éstos y desarrollando la solución en paralelo con el diagrama. Hemos hecho lo mismo en este libro, es decir, hemos mostrado la misma secuencia de diagramas que usamos en clase, indicando con claridad las relaciones entre ellos. Por ejemplo, en vez de simplemente mostrar un diagrama de cuerpo libre, repetimos la figura inicial con la parte aislada resaltada y lo demás con una imagen menos intensa (véase el Ej. 8.2, págs. 378-379). De esta manera mostramos al estudiante exactamente cómo aislar la parte que se convertirá en el diagrama de cuerpo libre. En el Ej. 9.8, pág. 456, usamos una imagen tenue paa indicar el movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un eje. Esto ayuda a los estudiantes a visualizar el verdadero movimiento del cuerpo.

Utilizamos colores para ayudar a los estudiantes a distinguir y entender los diversos elementos de las figuras. Usando de manera consistente los mismos colores para elementos particulares, como el azul para los vectores de fuerza y el verde para las aceleraciones, hemos tratado de hacer que el

libro sea más fácil de leer y entender para los estudiantes (véase p. ej., la Fig. 7.16 a la izquierda). Además, el realismo de las ilustraciones motiva a los estudiantes (véanse las Figs. 3.7 de la pág. 117 y 5.13 de la pág. 202, y las ilustraciones de los problemas a lo largo del libro).

Énfasis en los principios básicos Nuestro objetivo principal en este libro es enseñar a los estudiantes los conceptos y métodos fundamentales. En vez de presentar la dinámica como una secuencia de métodos independientes, subrayamos su coherencia al demostrar que las técnicas de energía y de cantidad de movimiento se pueden derivar de la segunda ley de Newton. Aplicamos el mismo enfoque a un sistema de partículas para obtener las ecuaciones que describen la dinámica de los cuerpos rígidos, y al explicar el movimiento de estos cuerpos empleamos de manera consistente el vector de la velocidad angular y las ecuaciones vectoriales que describen los movimientos relativos de los puntos. Por tradición, los textos de dinámica tratan los cuerpos rígidos antes de mostrar que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración de su centro de masa. Aquí presentamos este sencillo resultado inmediatamente después de explicar la segunda ley de Newton, en el Cap. 3, porque hemos comprobado que nuestros alumnos adquieren confianza en sus soluciones cuando no necesitan decidir si un cuerpo dado puede modelarse como partícula o no; saben que deben determinar el movimiento de su centro de masa. Para ayudar a los estudiantes a identificar resultados importantes, se destacan las ecuaciones clave (p. ej., véase la pág. 18), y los conceptos analizados en cada capítulo se refuerzan volviéndolos a presentar en un resumen al final de cada capítulo.

Mentalidad de ingenieros La ingeniería es una disciplina apasionante que requiere creatividad e imaginación, así como conocimientos y una manera de pensar sistemática. En este libro tratamos de mostrar el papel que desempeña la mecánica dentro del contexto más amplio de la práctica de la ingeniería. Los ingenieros de la industria y la Junta para la Acreditación de la Ingeniería y la Tecnología (ABET, *Accrediting Board for Engineering and Technology*) fomentan en los profesores la inclusión del diseño en las primeras etapas del currículo de ingeniería. En muchos de los ejemplos y problemas incluimos ideas sencillas sobre diseño y seguridad sin sacrificar el énfasis en la mecánica fundamental. Muchos problemas se plantean en función de consideraciones de diseño y seguridad (p. ej., véanse los Probs. 3.101 y 3.102, pág. 136); en algunos casos se pide a los estudiantes que escojan un parámetro de diseño de entre un conjunto de valores posibles con base en un criterio especificado (p. ej., véanse los Probs. 4.118, pág. 180, y 4.125, pág. 181). Nuestros estudiantes han respondido positivamente a estos elementos motivantes y han desarrollado una conciencia de cómo se aplican esas ideas esenciales en la ingeniería.

Características pedagógicas

Con base en nuestra experiencia docente y en consejos de muchos colegas, hemos incluido varios aspectos pedagógicos para ayudar a los estudiantes a aprender y a ampliar su perspectiva de la mecánica.

Estrategia para la resolución de problemas Los ejemplos resueltos y los problemas de tarea constituyen la piedra angular de un curso de mecánica. A lo largo del libro proporcionamos descripciones de los métodos usados en los ejemplos, que los estudiantes encontrarán de utilidad al plantear y resolver los problemas. No damos recetas para que los estudiantes las sigan rígidamente, más bien, describimos líneas generales de análisis aplicables a una amplia gama de problemas, damos consejos útiles y avisos sobre dificultades comunes, que equivalen a la información dada a nuestros estudiantes durante las horas de consulta (p. ej., véanse las págs. 33, 242, 262 y 311).

Aplicaciones Muchos de nuestros ejemplos y problemas son tomados de la práctica de la ingeniería y comprenden desde artículos caseros familiares hasta aplicaciones bastante exóticas de la ingeniería. Además, los ejemplos titulados "Aplicaciones a la ingeniería" proporcionan estudios de casos más detallados de diferentes ramas de la ingeniería. Estos ejemplos muestran cómo los principios aprendidos en el texto son directamente aplicables a problemas actuales y futuros de la ingeniería. Nuestra meta es ayudar a los estudiantes a ver la importancia de la mecánica en esas aplicaciones y motivarlos para que la aprendan (véanse, p. ej., las págs. 79, 118 y 218).

Problemas con computador Las encuestas indican que la mayor parte de los profesores hace algún uso de los computadores, pero no hay consenso sobre la manera en que deberían hacerlo. Nosotros damos al profesor la oportunidad de iniciar a los estudiantes en las aplicaciones de la computación a la dinámica (incluido el empleo de las diferencias finitas para integrar las ecuaciones del movimiento) sin imponer una metodología particular. Las secciones llamadas "Ejemplo con computador" contienen ejemplos y problemas adecuados al uso de una calculadora programable o de un computador (véanse, p. ej., las págs. 128 y 174). El profesor puede escoger cómo deben resolver los estudiantes esos problemas: usando un lenguaje de programación, una hoja de cálculo o un ambiente de alto nivel para la resolución de problemas. Esas secciones son independientes y completas.

Principio de capítulos Comenzamos cada capítulo con una ilustración que muestra una aplicación de las ideas estudiadas en el capítulo, a menudo escogiendo objetos familiares a los estudiantes. Al mostrar a los estudiantes cómo los conceptos de este curso se relacionan con el diseño y funcionamiento de objetos familiares, ellos pueden empezar a apreciar la importancia y lo atractivo de la ingeniería como carrera (véanse las págs. 98, 230 y 302).

Compromiso con los estudiantes y profesores

Hemos tomado precauciones para asegurar la exactitud de este libro. Los revisores examinaron cada parte del manuscrito tratando de detectar posibles errores. Cada uno de nosotros resolvió los problemas para asegurarnos de que sus respuestas fuesen correctas y que los problemas tuvieran un nivel apropiado de dificultad. James Whitenton examinó el texto completo en busca de errores que se pudieran haber introducido durante el proceso tipográfico.

Cualesquiera errores son responsabilidad de los autores. Damos la bienvenida a los comunicados de estudiantes y profesores respecto a errores o partes que puedan ser mejoradas. Nuestra dirección es Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, University of Texas at Austin, Austin, Texas 78712. Nuestra dirección electrónica es bedford@aw.com.

Suplementos de software

Edición para estudiantes de Working Model® El software Working Model® (Knowledge Revolution, Inc.) es un programa de modelado y simulación que permite al estudiante visualizar problemas de ingeniería. El programa calcula la interacción de fuerzas sobre un cuerpo (o cuerpos), anima los resultados y proporciona datos de salida como fuerza, momento, velocidad, aceleración, etc. en forma digital o gráfica. La edición estudiantil de este potente programa lo hace accesible a estudiantes de los primeros semestres. Está disponible tanto para Windows como para Macintosh. Contacte al representante de Addison-Wesley de su ciudad para mayor información (véase pág. ii).

Simulaciones con Working Model® Existe un disquete con aproximadamente 100 problemas y ejemplos del texto listos para trabajar con ellos en Working Model® . Estas simulaciones se han elaborado para permitir al estudiante cambiar variables y ver los resultados. El estudiante explora diferentes situaciones físicas motivado por la duda de "qué pasaría si..." y, así, desarrolla una agudeza conceptual más profunda que la adquirida con la sola resolución cuantitativa de los problemas. Para obtener una copia gratuita de este disquete, escriba a Addison-Wesley Iberoamericana (véase pág. ii).

Reconocimientos

Agradecemos a nuestros profesores, colegas y estudiantes lo que hemos aprendido sobre la mecánica y su enseñanza. Muchos colegas revisaron el manuscrito y compartieron generosamente sus conocimientos y experiencia para mejorar nuestro libro. Ellos son:

Nick Altiero
Michigan State University

James G. Andrews
University of Iowa

Gautam Batra
University of Nebraska

Rathi Bhatacharya
Bradley University

Clarence Calder
Oregon State University

Mark Frisina
Wentworth Institute

Robert W. Fuessle
Bradley University

John Giger
Rose State College

Robert A. Howland
University of Notre Dame

David B. Johnson
Southern Methodist University

V. J. Lopardo
U.S. Naval Academy

Frank K. Lu
University of Texas, Arlington

Donald L. Margolis
University of California, Davis

George Mase
Michigan State University

William W. Seto
San Jose University

Anthony DeLuzio
Merrimack College

Xiaomin Deng
University of South Carolina

James Dent
Montana State University

Robert W. Fitzgerald
Worcester Polytechnic Institute

Charles M. Krousgrill
Purdue University

Richard Lewis
Louisiana Technological University

Brad S. Liebst
University of Minnesota

Bertram Long
Northeastern University

Francis M. Thomas
University of Kansas

Mark R. Virkler
University of Missouri, Columbia

William H. Walston, Jr.
University of Maryland

Julius P. Wong
University of Louisville

Agradecemos particularmente a Eugene Davis, Serope Kalpakjian y Eric Sandgren la sugerencia de incluir muchos problemas basados en su amplio conocimiento de aplicaciones de la mecánica a la ingeniería. Agradecemos al personal de Addison-Wesley su amistad y generosa ayuda, especialmente a Bette Aaronson, Jennifer Duggan, Don Fowley, Joyce Grandy, Stuart Johnson, Laurie McGuire y Jim Rigney. Estamos muy agradecidos con nuestro editor David Chelton y con el artista James Bryant por haber llevado este trabajo más allá de nuestra modesta concepción. Agradecemos a nuestro presidente Richard Miksad su continuo apoyo, que hizo posible el proyecto. Por supuesto, agradecemos también a nuestras familias su valioso apoyo en todo momento.

Anthony Bedford y Wallace L. Fowler
Julio de 1994
Austin, Texas

Nota acerca de la edición en español

La ciencia de la mecánica, así como la meta más elevada de la ingeniería —la aplicación de la tecnología para beneficio de la humanidad—, es universal y trasciende los idiomas y las fronteras. Así, nuestro libro va dirigido a todos los estudiantes de ingeniería, aunque algunas aplicaciones y enfoques de la ingeniería sean característicos de diferentes regiones. En el sistema de la University of Texas tenemos la fortuna de contar con muchos estudiantes de ingeniería provenientes de México, América Central y Sudamérica, y hemos procurado tener presentes sus enfoques e intereses al escribir este texto. Nuestro traductor, Ing. José de la Cera, y el revisor técnico, Ing. Antonio Martín-Lunas, ambos de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, México, han efectuado adaptaciones a fin de mejorar el libro en este aspecto. Agradecemos mucho sus contribuciones y nos sentimos complacidos y honrados por la traducción de nuestro libro a la lengua española.

Anthony Bedford y Wallace Fowler
Septiembre de 1995
Austin, Texas

Reconocimientos a los colaboradores de la edición en español

Addison-Wesley Iberoamericana desea agradecer las valiosas aportaciones de los profesores que evaluaron esta obra durante la preparación de la versión en español. Ellos fueron: Ing. Jaime Martínez Martínez (Universidad Nacional Autónoma de México), Ing. Antonio Martín-Lunas (Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco, México), Fís. Manuel B. Tienza Caballero (Universidad Iberoamericana, México), Ing. Javier Arjona Báez (Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Monterrey, México) y Dr. Luis Neri Vitela (Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Ciudad de México). Así mismo, agradecemos a los siguientes profesores sus comentarios:

Luis Eduardo Benítez H.
Universidad Nacional de Colombia

Tomás Alberto del Carril
Universidad Nacional de Buenos Aires

Sergio Díaz B.
Universidad Simón Bolívar
Caracas, Venezuela

Máximo Fioravanti
Universidad Nacional de Buenos Aires

Carlos E. Muñoz R.
Pontificia Universidad Javeriana
Santafé de Bogotá, Colombia

José Navarro Solé
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Barcelona, España

Lanzier Efraín Torres Ortiz
Universidad Nacional Autónoma de México

Alfredo Zatarain T.
Universidad Autónoma de Chapingo
Chapingo, México

Índice general

1 *Introducción* 1

1.1 **Ingeniería y mecánica** 2

1.2 **El aprendizaje de la mecánica** 2

Resolución de problemas 3 / Calculadoras y computadores 3 / Aplicaciones a la ingeniería 3

1.3 **Conceptos fundamentales** 4

Espacio y tiempo 4 / Leyes de Newton 4 / La gravitación de Newton 5 / Números 6

1.4 **Unidades** 7

Sistema Internacional de Unidades 7 / Sistema inglés de unidades 8 / Unidades angulares 8 / Conversión de unidades 9

2 *Movimiento de un punto* 15

2.1 **Posición, velocidad y aceleración** 16

2.2 **Movimiento en línea recta** 17

Descripción del movimiento 17 / Análisis del movimiento 18

2.3 **Movimiento curvilíneo** 40

Coordenadas cartesianas 40 / Movimiento angular 49 / Componentes normal y tangencial 55 / Coordenadas polares y cilíndricas 66

2.4 **Mecánica de órbitas** 74

APLICACIÓN A LA INGENIERÍA: SATÉLITES DE COMUNICACIONES 79

2.5 **Movimiento relativo** 82

EJEMPLO CON COMPUTADOR 91

Resumen del capítulo 93

Problemas de repaso 96

3 *Fuerza, masa y aceleración* 99

3.1 **Segunda ley de Newton** 100

3.2 **Marcos de referencia inerciales** 100

3.3 **Ecuación de movimiento para el centro de masa** 101

3.4 **Aplicaciones** 103

Coordenadas cartesianas y movimiento en línea recta 103 / Componentes normal y tangencial 115 / Coordenadas polares 124

APLICACIÓN A LA INGENIERÍA: DINÁMICA DE VEHÍCULOS 118

Coordenadas polares 124

EJEMPLO CON COMPUTADOR 128

Resumen del capítulo 134

Problemas de repaso 134

4 *Métodos energéticos* 139

Trabajo y energía cinética 140

4.1 **Principio del trabajo y la energía** 140

4.2 **Trabajo y potencia** 141

Evaluación del trabajo 141 / Trabajo realizado por varias fuerzas 147 / Potencia 149

Energía potencial 160

4.3 **Conservación de la energía** 160

4.4 **Fuerzas conservativas** 161

Energías potenciales de varias fuerzas 162 / Relaciones entre la fuerza y la energía potencial 167

EJEMPLO CON COMPUTADOR 174

Resumen del capítulo 174

Problemas de repaso 179

5 *Métodos de la cantidad de movimiento* 185

5.1 **Principio del impulso y la cantidad de movimiento** 186

5.2 **Conservación de la cantidad de movimiento lineal** 195

5.3 **Impactos** 198

Impactos centrales directos 199 / Impactos centrales oblicuos 200

5.4 **Momento angular** 209

Principio del impulso angular y del momento angular 209 / Movimiento bajo una fuerza central 210

5.5 **Flujos de masa** 215

APLICACIÓN A LA INGENIERÍA: MOTORES DE REACCIÓN 218

Resumen del capítulo 267

Problemas de repaso 268

6 *Cinemática plana de cuerpos rígidos* 231

6.1 **Cuerpos rígidos y tipos de movimiento** 232

6.2 **Rotación respecto a un eje fijo** 235

6.3 **Movimientos generales: velocidades** 239

Velocidades relativas 239 / Vector de velocidad angular 240 / Centros instantáneos 254

6.4 **Movimientos generales: aceleraciones** 260

6.5 **Contactos deslizantes** 271

6.6 **Sistemas coordenados en rotación** 281

Movimiento de un punto respecto a un sistema coordenado en rotación 281 / Marcos de referencia inerciales 286

Resumen del capítulo 296

Problemas de repaso 298

7 *Dinámica bidimensional de cuerpos rígidos* 303

7.1 **Revisión previa de las ecuaciones de movimiento** 304

7.2 **Principios de la cantidad de movimiento para un sistema de partículas** 305

Principio de la fuerza y cantidad del movimiento lineal 305 / Principios del momento y momento angular 306

7.3 **Deducción de las ecuaciones de equilibrio** 309

Rotación alrededor de un eje fijo 309 / Movimiento plano general 310

7.4 **Aplicaciones** 311

Traslación 312 / Rotación alrededor de un eje fijo 314 / Movimiento plano general 318

APLICACIÓN A LA INGENIERÍA: FUERZAS Y MOMENTOS INTERNOS EN VIGAS 324

7.5 **Principio de D'Alembert** 327

EJEMPLO CON COMPUTADOR 341

Apéndice: Momentos de inercia 344

Cuerpos simples 345 / Teorema de los ejes paralelos 350

Resumen del capítulo 360

Problemas de repaso 362

8 *Energía y cantidad de movimiento en la dinámica plana de cuerpos rígidos* 367

8.1 **Principio del trabajo y la energía** 368

Sistema de partículas 368 / Cuerpo rígido en movimiento plano 369

8.2 **Trabajo y energía potencial** 372

8.3 **Potencia** 374

8.4 **Principios del impulso y la cantidad de movimiento** 389

Cantidad de movimiento lineal 389 / Momento angular 390

8.5 **Impactos** 397

Conservación de la cantidad de movimiento 397 / Coeficiente de restitución 398

Resumen del capítulo 412

Problemas de repaso 415

9 *Cinemática y dinámica tridimensionales de cuerpos rígidos* 421

9.1 **Cinemática** 422

9.2 **Momento angular** 430

Rotación alrededor de un punto fijo 430 / Movimiento general 432

9.3 **Momentos y productos de inercia** 433

Cuerpos simples 433 / Teoremas de los ejes paralelos 436 / Momento de inercia respecto a un eje arbitrario 437 / Ejes principales 438

9.4 **Ecuaciones de Euler** 448

Rotación respecto a un punto fijo 448 / Movimiento general 450

9.5 **Ángulos de Euler** 464

Cuerpos con un eje de simetría 464 / Cuerpos arbitrarios 468

Resumen del capítulo 476

Problemas de repaso 480

10 *Vibraciones* 483

10.1 **Sistemas conservativos** 484

Ejemplos 484 / Soluciones 486

10.2 **Vibraciones amortiguadas** 499

Amortiguamiento subcrítico 500 / Amortiguamientos crítico y supercrítico 501

10.3 **Vibraciones forzadas** 508

Función de excitación oscilatoria 509 / Función de excitación polinomial 510

APLICACIÓN A LA INGENIERÍA: TRANSDUCTORES DE DESPLAZAMIENTO 516

EJEMPLOS CON COMPUTADOR 521

Resumen del capítulo 524

Problemas de repaso 527

Apéndices

A **Repaso de matemáticas** 529

B **Propiedades de áreas y líneas** 532

C **Propiedades de volúmenes y cuerpos homogéneos** 534

D **Coordenadas esféricas** 536

Respuestas a los problemas pares 537

Índice de materias 546

El primer vuelo de un transbordador espacial fue el 12 de abril de de 1981. El transbordador espacial Columbia entró en órbita a 271 km sobre la Tierra. Para entrar en órbita tuvo que alcanzar una velocidad relativa al centro de la Tierra de aproximadamente 8 km/s. Después de dos días de vuelo, con el comandante John Young en los controles, aterrizó en la base Edwards de la Fuerza Aérea en California.

Capítulo 1

Introducción

EL transbordador espacial se concibió como un método económico para poner en órbita personal y equipo. Durante su desarrollo, los ingenieros usaron principios de dinámica para predecir su movimiento durante el despegue, en órbita y al aterrizar. Estas predicciones fueron esenciales para el diseño de su configuración aerodinámica y estructura, así como de los motores y del sistema de control. La dinámica es una de las ciencias en que se basa el diseño de todos los vehículos y máquinas.

1.1 *Ingeniería y mecánica*

¿Cómo se diseñan los sistemas para predecir sus características antes de construirlos? Los ingenieros confían en su conocimiento y experiencia, en experimentos, el ingenio y la creatividad para producir nuevos diseños. Los ingenieros modernos cuentan con una poderosa técnica: desarrollan ecuaciones matemáticas basadas en las características físicas de los objetos que diseñan. Con estos **modelos matemáticos**, predicen el comportamiento de sus diseños, los modifican y los prueban antes de construirlos. Los ingenieros civiles usaron modelos matemáticos para analizar la respuestas a cargas de la estructura de acero de la Torre Sears. Y los ingenieros aeroespaciales usan modelos matemáticos para predecir las trayectorias que los transbordadores espaciales seguirán en su vuelo.

Los ingenieros son responsables de diseñar, construir y probar los objetos que usamos, desde sillas y afiladores de lápices hasta presas, automóviles y aeronaves. Deben tener un profundo conocimiento de la física que sustenta tales sistemas y deben poder usar modelos matemáticos para predecir el comportamiento de estos sistemas. Los estudiantes de ingeniería aprenden a analizar y predecir el comportamiento de los sistemas físicos mediante el estudio de la mecánica.

En su nivel más elemental, la mecánica es el estudio de las fuerzas y sus efectos. La mecánica elemental se divide en **estática**, que es el estudio de los objetos en equilibrio, y **dinámica**, que estudia los objetos en movimiento. Los resultados obtenidos en la mecánica elemental se aplican directamente a muchos campos de la ingeniería. Los ingenieros civiles y mecánicos que diseñan estructuras usan ecuaciones de equilibrio obtenidas por medio de la estática. Los ingenieros civiles que analizan las respuestas de edificios frente a sismos y los ingenieros aeroespaciales que determinan las trayectorias de satélites, usan las ecuaciones de movimiento contenidas en la dinámica.

La mecánica fue la primera ciencia analítica; por ello los conceptos fundamentales, los métodos analíticos y las analogías de la mecánica se encuentran virtualmente en todas las ramas de la ingeniería. Por ejemplo, los estudiantes de ingeniería química y eléctrica comprenden mejor los conceptos básicos de temas como el equilibrio, la energía y la estabilidad aprendiéndolos en sus contextos mecánicos originales; al estudiar mecánica vuelven a trazar el desarrollo histórico de esas ideas.

1.2 *Aprendizaje de la mecánica*

La mecánica consiste en principios amplios que rigen el comportamiento de los cuerpos. En este libro describimos esos principios y damos ejemplos que muestran algunas de sus aplicaciones. Aunque es esencial que se resuelvan problemas similares a esos ejemplos, nuestro objetivo es ayudar a entender estos principios suficientemente bien para aplicarlos a las nuevas situaciones que se presenten. Cada generación de ingenieros se enfrenta a nuevos problemas.

Resolución de problemas

En el estudio de la mecánica se aprenden procedimientos para resolver problemas que se usarán en cursos posteriores y a lo largo de la carrera. Aunque diferentes tipos de problemas requieren distintos métodos, los siguientes pasos se aplican a muchos de ellos:

- Identifique la información dada y la información, o respuesta, que se debe determinar. Suele ser útil que usted reformule el problema en sus propias palabras. Cuando sea apropiado, asegúrese de que entiende el sistema físico o el modelo implícito.
- Desarrolle una *estrategia* para el problema. Esto es, identifique los principios y ecuaciones aplicables y diga cómo los usará. Si es posible, dibuje diagramas para visualizar el problema.
- Siempre que pueda, trate de predecir la respuesta. Esto desarrollará su intuición y lo ayudará a reconocer una respuesta incorrecta.
- Resuelva las ecuaciones y, cuando sea posible, interprete sus resultados y compárelos con su predicción. El último paso se llama *verificación realista*. ¿Es razonable su respuesta?

Calculadoras y computadores

En este libro la mayoría de los problemas se diseñaron para que conduzcan a una expresión algebraica con la cual se calcule la respuesta en función de cantidades dadas. Una calculadora con funciones trigonométricas y logarítmicas es suficiente para determinar el valor numérico de tales respuestas. Es conveniente contar con una calculadora programable o un computador con programas para resolver problemas, como el *Mathcad* o el *TK! Solver*, pero no confíe demasiado en herramientas de las que no dispondrá en los exámenes.

En las secciones *Ejemplos con computador* hay ejemplos y problemas adecuados para resolverse con calculadora programable o computador.

Aplicaciones a la ingeniería

Si bien los problemas están diseñados principalmente para apoyar el aprendizaje de la mecánica, muchos de ellos ilustran el uso de esta ciencia en la ingeniería. Las secciones llamadas *Aplicación a la ingeniería* describen cómo se aplica la mecánica en varios campos de la ingeniería.

Algunos problemas destacan dos aspectos esenciales de la ingeniería:

- *Diseño.* En algunos problemas se pide escoger valores de parámetros que satisfagan criterios específicos de diseño.
- *Seguridad.* En algunos problemas se pide evaluar la seguridad de dispositivos y escoger valores de parámetros que satisfagan requisitos específicos de seguridad.

1.3 *Conceptos fundamentales*

Algunos temas de la mecánica le serán familiares debido a la experiencia diaria o por haberlos estudiado en cursos previos de física. En esta sección repasamos brevemente los fundamentos de la mecánica elemental.

Espacio y tiempo

El espacio se refiere simplemente al universo tridimensional en que vivimos. Nuestras experiencias diarias nos dan una noción intuitiva del espacio y de las posiciones de los puntos en él. La distancia entre dos puntos en el espacio es la longitud de la línea recta que los une.

Para medir la distancia entre puntos en el espacio se requiere una unidad de longitud. Usaremos tanto el Sistema Internacional de Unidades (SI) como el sistema inglés. En unidades SI, la unidad de longitud es el metro (m); en el sistema inglés es el pie.

El tiempo nos es muy familiar, pues nuestra vida se mide por él. Los ciclos diarios de luz y oscuridad y las horas, minutos y segundos medidos por un reloj nos dan una noción intuitiva del tiempo. Éste se mide por los intervalos entre eventos repetidos, como las oscilaciones del péndulo de un reloj o las vibraciones en un reloj de cristal de cuarzo. En los dos sistemas que usaremos la unidad de tiempo es el segundo (s). Los minutos (min), las horas (h) y los días también son de uso común.

Si la posición de un punto en el espacio en relación con algún punto de referencia cambia con el tiempo, la razón del cambio de su posición se llama *velocidad*, y la razón del cambio de su velocidad se denomina *aceleración*. En unidades SI, la velocidad se expresa en metros por segundo (m/s) y la aceleración en metros por segundo cuadrado (m/s^2). En las unidades del sistema inglés, la velocidad se expresa en pies por segundo (pie/s) y la aceleración en pies por segundo cuadrado (pie/s^2).

Leyes de Newton

La mecánica elemental se estableció sobre una base sólida con la publicación, en 1687, de *Philosophiae naturalis principia mathematica* de Isaac Newton. Aunque sumamente original, este trabajo se basó en conceptos fundamentales desarrollados durante una larga y difícil lucha por entender la naturaleza. Newton estableció tres "leyes" del movimiento que, expresadas en términos modernos, son:

1. *Cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a cero, su velocidad es constante. En particular, si inicialmente la partícula se halla en reposo, permanecerá en reposo.*
2. *Cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre una partícula no es igual a cero, la suma de las fuerzas es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento de la partícula. Si la masa es constante, la suma de las fuerzas es igual al producto de la masa de la partícula y su aceleración.*
3. *Las fuerzas ejercidas por dos partículas entre sí son iguales en magnitud y opuestas en dirección.*

Observe que no definimos fuerza ni masa antes de enunciar las leyes de Newton. La concepción moderna es que estos términos se definen con

LEX I

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

LEX II

Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secondum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

LEX III

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

la segunda ley. Para demostrarlo, supongamos que escogemos un cuerpo arbitrario y especificamos que tiene masa unitaria. Luego definimos una unidad de fuerza como la fuerza que imparte a esta masa unitaria una aceleración de magnitud unitaria. En principio, podemos determinar la masa de cualquier cuerpo: le aplicamos una fuerza unitaria, medimos la aceleración resultante y usamos la segunda ley para determinar la masa. Podemos también determinar la magnitud de cualquier fuerza: la aplicamos a la masa unitaria, medimos la aceleración resultante y usamos la segunda ley para determinar la fuerza.

De esta manera, la segunda ley de Newton proporciona significados precisos a los términos **masa** y **fuerza**. En unidades SI, la unidad de masa es el kilogramo (kg). La unidad de fuerza es el newton (N), que es la fuerza requerida para impartir a una masa de un kilogramo una aceleración de un metro por segundo cada segundo (m/s^2). En las unidades del sistema inglés, la unidad de fuerza es la libra (lb). La unidad de masa es el slug, que es la cantidad de masa acelerada a un pie por segundo cuadrado por una fuerza de una libra.

Aunque los resultados que analizamos en este libro son aplicables a muchos de los problemas que surgen en la práctica de la ingeniería, hay límites para la validez de las leyes de Newton. Por ejemplo, éstas no dan resultados precisos si un problema implica velocidades que no son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). La teoría de la relatividad especial de Einstein se aplica a tales problemas. La mecánica elemental también falla en problemas que implican dimensiones que no son grandes comparadas con las dimensiones atómicas. Para describir los fenómenos en la escala atómica se debe usar la mecánica cuántica.

Gravitación de Newton

Otra de las contribuciones fundamentales de Newton a la mecánica es su postulado sobre la fuerza gravitatoria entre dos partículas en función de sus masas m_1 y m_2 y de la distancia r entre ellas (Fig. 1.1). Su expresión para la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \tag{1.1}$$

donde G es la **constante de la gravitación universal**.

Newton calculó la fuerza gravitatoria entre una partícula de masa m_1 y una esfera homogénea de masa m_2 y encontró que también está dada por la ecuación (1.1), en la que r denota la distancia de la partícula al centro de la esfera. Aunque la Tierra no es una esfera homogénea, podemos usar este resultado para obtener el peso aproximado de un cuerpo de masa m debido a la atracción gravitatoria de la Tierra,

$$W = \frac{Gmm_E}{r^2}, \tag{1.2}$$

donde m_E es la masa de la Tierra y r es la distancia del centro de la Tierra al objeto. Observe que el peso de un cuerpo depende de su posición con respecto al centro de la Tierra, mientras que la masa del cuerpo

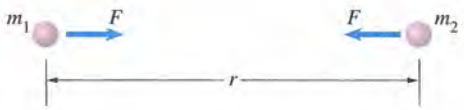


Figura 1.1
Las fuerzas gravitatorias entre dos partículas son iguales en magnitud y dirigidas a lo largo de la línea entre ellas.

es una medida de la cantidad de materia que contiene y no depende de su posición.

Cuando el peso de un cuerpo es la única fuerza que actúa sobre él, la aceleración resultante se denomina aceleración debida a la gravedad. En este caso la segunda ley de Newton establece que $W = ma$, y de la ecuación (1.2) vemos que la aceleración debida a la gravedad es

$$a = \frac{Gm_E}{r^2}. \tag{1.3}$$

La **aceleración debida a la gravedad al nivel del mar** se denota con la letra g. Si denotamos con R_E el radio de la Tierra, vemos de la ecuación (1.3) que $Gm_E = gR_E^2$. Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.3), obtenemos una expresión para la aceleración debida a la gravedad a una distancia r del centro de la Tierra en función de la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar:

$$a = g\frac{R_E^2}{r^2}. \tag{1.4}$$

Como el peso del cuerpo es $W = ma$, el peso de un cuerpo a una distancia r del centro de la Tierra será

$$W = mg\frac{R_E^2}{r^2}. \tag{1.5}$$

Al nivel del mar, el peso de un cuerpo está dado en función de su masa por la simple relación

$$W = mg. \tag{1.6}$$

El valor de g varía de lugar en lugar sobre la superficie de la Tierra. Los valores que usaremos en los ejemplos y problemas son $g = 9.81$ m/s^2 en unidades SI y $g = 32.2$ pie/s^2 en unidades del sistema inglés.

Números

En ingeniería las mediciones, cálculos y resultados se expresan en números. Es necesario que sepa cómo expresamos los números en los ejemplos y problemas, y cómo deberá expresar los resultados de sus propios cálculos.

Cifras significativas Este término se refiere al número de dígitos significativos (o sea, exactos) en un número, contando hacia la derecha a partir del primer dígito no nulo. Los números 7.630 y 0.007630 están expresados con cuatro cifras significativas. Si se sabe que sólo los primeros cuatro dígitos del número 7 630 000 son exactos, esto se puede indicar escribiendo el número en notación científica como 7.630×10^6.

Si un número es el resultado de una medición, los dígitos significativos que contiene están limitados por la exactitud de la medición. Si el resultado de una medición es 2.43, esto significa que el valor real estará más cercano a 2.43 que a 2.42 o a 2.44.

Los números se pueden **redondear** a cierta cantidad de dígitos significativos. Por ejemplo, el valor de π se puede expresar con tres dígitos significativos, 3.14, o con seis dígitos significativos, 3.14159. En una calculadora o un computador, el número de dígitos significativos está limitado según el diseño de la máquina.

El uso de números en este libro Los números dados en los problemas deben tratarse como valores exactos sin preocuparse de cuántas cifras significativas contienen. Si un problema especifica que una cantidad es igual a 32.2, se puede suponer que su valor es 32.200... Se utilizarán por lo menos tres cifras significativas para expresar los resultados intermedios y las respuestas en los ejemplos, así como las respuestas a los problemas. Si usa calculadora, sus resultados deben tener esa exactitud. Asegúrese de evitar los errores de redondeo que ocurren si redondea resultados intermedios. En vez de esto, efectúe sus cálculos con la exactitud posible, conservando los valores en su calculadora.

1.4 *Unidades*

El sistema SI de unidades se ha estandarizado casi en todo el mundo (aunque en algunos países también se usa el sistema inglés). En esta sección resumiremos estos dos sistemas de unidades y explicaremos cómo convertir unidades de un sistema a otro.

Sistema internacional de unidades

En unidades SI, la longitud se mide en metros (m) y la masa en kilogramos (kg). El tiempo se mide en segundos (s), aunque también se usan el minuto (min), la hora (h), y el día. Los metros, kilogramos y segundos se denominan **unidades básicas** del SI. La fuerza se mide en newtons (N). Recuerde que esas unidades están relacionadas por la segunda ley de Newton: un newton es la fuerza requerida para imprimir a un cuerpo de un kilogramo masa una aceleración de un metro por segundo cuadrado,

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg-m/s}^2.$$

Como el newton se puede expresar en función de las unidades básicas, se le llama **unidad derivada.**

Para expresar cantidades por medio de números de tamaño conveniente, los múltiplos de unidades se indican por medio de prefijos. En la tabla 1.1 se muestran los prefijos más comunes, sus abreviaturas y los múltiplos que representan. Por ejemplo, 1 km es 1 kilómetro, o sea 1000 m, y 1 Mg es 1 megagramo, que son 10^6 g o 1000 kg. Con frecuencia usamos kilonewtons (kN).

Tabla 1.1 Prefijos comunes usados en las unidades SI y los múltiplos que representan

Prefijo	Abreviatura	Múltiplo
nano-	n	10^{-9}
micro-	μ	10^{-6}
mili-	m	10^{-3}
kilo-	k	10^{3}
mega-	M	10^{6}
giga-	G	10^{9}

Sistema inglés de unidades

En las unidades del sistema inglés la longitud se mide en pies, la fuerza en libras (lb) y el tiempo en segundos (s). Éstas son las unidades básicas de este sistema. En este sistema de unidades la masa es una unidad derivada. La unidad de masa es el **slug**, que es la masa de material acelerado a un pie por segundo cuadrado por una fuerza de una libra. La segunda ley de Newton establece que

$$1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ pie/s}^2).$$

De esta expresión obtenemos

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb-s}^2/\text{pie}.$$

Usaremos también otras unidades como la milla (1 mi = 5280 pies) y la pulgada (1 pie = 12 pulg), así como la kilolibra (1 klb = 1000 lb).

En algunas aplicaciones de ingeniería se usa una unidad alternativa de masa llamada libra masa (lbm), que es la masa de un material cuyo peso es de una libra al nivel del mar. El peso al nivel del mar de un cuerpo que tiene una masa de un slug es

$$W = mg = (1 \text{ slug})(32.2 \text{ pie/s}^2) = 32.2 \text{ lb},$$

por lo que 1 lbm = (1/32.2) slug. Cuando se usa la libra masa, una libra de fuerza suele denotarse con la abreviatura lbf.

Unidades angulares

En ambos sistemas de unidades los ángulos se expresan por lo general en radianes (rad). En la figura 1.2 mostramos el valor de un ángulo θ en radianes; se define como la razón entre la parte de la circunferencia sustentada por θ y el radio del círculo. Los ángulos también se expresan en grados. Como hay 360 grados (360°) en un círculo completo y la totalidad de la circunferencia del círculo es $2\pi R$, entonces 360° equivalen a 2π radianes.

Las ecuaciones que contienen ángulos casi siempre se obtienen suponiendo que los ángulos se expresan en radianes. Por consiguiente, cuando se desee sustituir el valor de un ángulo expresado en grados en una ecuación, primero deberá convertirse a radianes. Una excepción notable a esta regla es que muchas calculadoras, cuando se usan para evaluar funciones como sen θ, aceptan ángulos expresados ya sea en grados o en radianes.

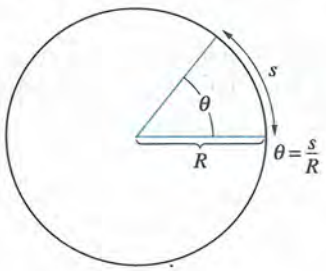


Figura 1.2
Definición de un ángulo en radianes.

Conversión de unidades

La práctica de ingeniería con frecuencia requiere convertir valores expresados en unidades de una clase a valores en otras unidades. Si algunos datos de un problema están dados en unidades SI y otros en unidades del sistema inglés, todos ellos se deben expresar en términos de un solo sistema de unidades. En los problemas expresados en unidades SI, ocasionalmente se darán datos en unidades diferentes de las unidades básicas: segundos, metros, kilogramos y newtons. Estos datos se deben convertir a unidades básicas antes de resolver el problema. Así mismo, en problemas planteados en unidades del sistema inglés, los valores se deben convertir a las unidades básicas de segundo, pie, slug y libra. Cuando adquiera cierta experiencia, reconocerá situaciones en que esas reglas se pueden relajar, pero por ahora éstas representan el procedimiento más seguro para resolver problemas.

La conversión de unidades es sencilla pero debe hacerse con cuidado. Suponga que se quiere expresar 1 milla/h en función de pie/s. Como 1 milla equivale a 5280 pies y una hora a 3600 s, podemos considerar las expresiones

$$\left(\frac{5280\text{pies}}{1\text{ mi}}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\right)$$

como razones cuyos valores son iguales a 1. De esta manera obtenemos

$$1\text{ mi/h} = 1\text{ mi/h} \times \left(\frac{5280\text{pies}}{1\text{ mi}}\right) \times \left(\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\right) = 1.47\text{ pie/s}.$$

En la tabla 1.2 se incluyen algunas conversiones útiles entre unidades.

Tabla 1.2 Conversión de unidades

Tiempo	1 minuto	=	60 segundos
	1 hora	=	60 minutos
	1 día	=	24 horas
Longitud	1 pie	=	12 pulgadas
	1 milla	=	5280 pies
	1 pulgada	=	25.4 milímetros
	1 pie	=	0.3048 metros
Ángulo	2π radianes	=	360 grados
Masa	1 slug	=	14.59 kilogramos
Fuerza	1 libra	=	4.448 newtons

Ejemplo 1.1

Si un corredor olímpico (Fig. 1.3) corre 100 m en 10 segundos, su velocidad media es de 10 m/s. ¿Cuál es su velocidad media en millas/hora?

Figura 1.3

SOLUCIÓN

$$10 \text{ m/s} = 10 \text{ m/s} \times \left(\frac{1 \text{ pie}}{0.3048 \text{ m}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ pies}}\right) \times \left(\frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}}\right)$$

$$= 22.4 \text{ mi/h}$$

Ejemplo 1.2

Suponga que en la ecuación de Einstein

$$E = mc^2,$$

la masa m está en kg y la velocidad de la luz c en m/s.
(a) ¿Cuál es el valor de E en unidades SI?
(b) Si el valor de E en unidades SI es igual a 20, ¿cuál es su valor en las unidades básicas del sistema inglés?

ESTRATEGIA

(a) Como conocemos las unidades de los términos m y c, podemos deducir las unidades de E de la ecuación dada.
(b) Podemos usar las conversiones de unidades para la masa y la longitud dadas en la tabla 1.2 para convertir E de unidades SI a unidades del sistema inglés.

SOLUCIÓN

(a) De la ecuación para E,

$$E = (m \text{ kg})(c \text{ m/s})^2,$$

las unidades de E son kg-m^2/s^2.

(b) De la tabla 1.2, 1 slug = 14.59 kg y 1 pie = 0.3048 metros. Por tanto,

$$1 \text{ kg-m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ kg-m}^2/\text{s}^2 \times \left(\frac{1 \text{ slug}}{14.59 \text{ kg}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ pie}}{0.3048 \text{ m}}\right)^2$$

$$= 0.738 \text{ slug-pie}^2/\text{s}^2.$$

El valor de E en unidades del sistema inglés es

$$E = (20)(0.738) = 14.8 \text{ slug-pie}^2/\text{s}^2.$$

Ejemplo 1.3

El *Rocket* (Fig. 1.4) de George Stephenson, una de las primeras locomotoras de vapor, pesaba aproximadamente 7 ton con su carbonera. (1 ton = 2000 lb.) ¿Cuál era aproximadamente su masa en kilogramos?

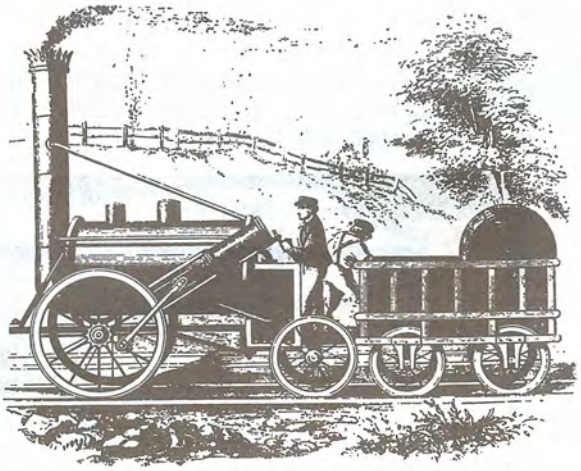


Figura 1.4

ESTRATEGIA

Podemos usar la ecuación (1.6) para obtener la masa en slugs y luego la conversión dada en la tabla 1.2 para determinar la masa en kilogramos.

SOLUCIÓN

La masa en slugs es

$$m = \frac{W}{g} = \frac{14\,000 \text{ lb}}{32.2 \text{ pie/s}^2} = 434.8 \text{ slugs}.$$

De la tabla 1.2, 1 slug es igual a 14.59 kg, por lo que la masa en kilogramos es (con tres cifras significativas)

$$m = (434.8)(14.59) = 6340 \text{ kg}.$$

Problemas

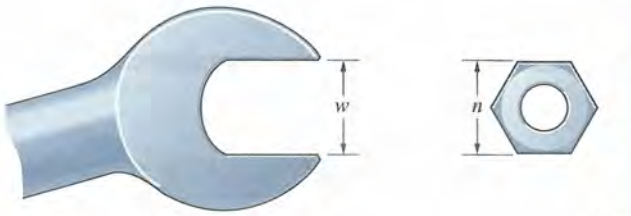
1.1 El valor π es 3.141592654... ¿Cuál es su valor con 4 cifras significativas?

1.2 ¿Cuál es el valor e (la base de los logaritmos naturales) con 5 cifras significativas?

1.3 Determine el valor de la expresión $1/(2 - \pi)$ con 3 cifras significativas.

1.4 Si $x = 3$, ¿cuál es el valor de la expresión $1 - e^{-x}$ con 3 cifras significativas?

1.5 Suponga que acaba de comprar un Ferrari Dino 246GT y quiere saber si puede usar su juego de llaves SAE (unidades del sistema inglés) para trabajar en él. Usted tiene llaves con anchos w = 1/4 pulg, 1/2 pulg, 3/4 pulg y 1 pulg, y el auto tiene tuercas con dimensiones n = 5 mm, 10 mm, 15 mm, 20 mm y 25 milímetros. Si definimos que una llave ajusta si w no es 2% mayor que n, ¿cuál de sus llaves puede usar?



P1.5

1.6 El *Rocket* de 1829, mostrado en el ejemplo 1.3, podía jalar un carro con 30 pasajeros a 25 mi/hora. Determine su velocidad con tres cifras significativas, (a) en pie/s, (b) en km/h.

1.7 Los "trenes bala" de alta velocidad comenzaron a correr entre Tokyo y Osaka en 1964. Si un tren bala viaja a 240 km/h, ¿cuál es su velocidad en mi/h con tres cifras significativas?

1.8 Los ingenieros que estudian ondas de choque suelen expresar la velocidad en milímetros por microsegundo (mm/μs). Suponga que la velocidad de un frente de onda es de 5 mm/μs. Determine esta velocidad: (a) en m/s, (b) en mi/s.

1.9 Un geofísico mide el movimiento de un glacial y descubre que se está moviendo 80 mm/año. ¿Cuál es su velocidad en m/s?

1.10 La aceleración debida a la gravedad al nivel del mar en unidades SI es $g = 9.81$ m/s^2. Convirtiendo unidades, use este valor para determinar la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar en unidades del sistema inglés.

1.11 Un *estadio* (*furlong* = 1/8 de milla) *por quincena* es una unidad chusca de velocidad, inventada tal vez por un estudiante como comentario satírico sobre la enredada variedad de unidades con que los ingenieros tienen que tratar. Si usted camina 5 pie/s, ¿cuál es su velocidad en estadios por quincena con tres cifras significativas?

1.12 El área de la sección transversal de una viga es igual a 480 pulg^2. ¿Cuál es el área de su sección transversal en m^2?

1.13 Un camión puede cargar 15 yardas cúbicas de grava. (1 yarda = 3 pies). ¿Cuántos metros cúbicos puede cargar?

1.14 Un transductor de presión mide un valor de 300 lb/pulg^2. Determine el valor de la presión en pascales. Un pascal (Pa) es igual a 1 N/m^2.

1.15 Un caballo de fuerza equivale a 550 lb-pie/s. Un watt equivale a 1 N-m/s. Determine el número de watts generados por (a) el avión de los hermanos Wright (1903), que tenía un motor de 12 caballos de fuerza; (b) un avión *jet* con potencia de 100 000 caballos de fuerza a velocidad de crucero.

P1.15

1.16 En unidades del sistema SI, la constante de la gravitación universal es $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m^2/kg^2. Determine el valor de G en unidades del sistema inglés.

1.17 Si la Tierra se modela como una esfera homogénea, la velocidad de un satélite en órbita circular es

$$v = \sqrt{\frac{gR_E^2}{r}},$$

donde R_E es el radio de la Tierra y r es el radio de la órbita.
(a) Si G está en m/s^2 y R_E y r en metros, ¿cuáles son las unidades de v?
(b) Si $R_E = 6370$ km y $r = 6670$ km, ¿cuál es el valor de v con tres cifras significativas?

(c) Para la órbita descrita en la parte (b), ¿cuál es el valor de v en mi/s con tres cifras significativas?

1.18 En la ecuación

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

el término I está en kg-m^2 y ω está en s^{-1}.
(a) ¿Cuáles son las unidades SI de T?
(b) Si el valor de T es 100 cuando I está en kg-m^2 y ω está en s^{-1}, ¿cuál es el valor de T cuando se expresa en unidades del sistema inglés?

1.19 "El tractor" construido para transportar al *Saturno V* del edificio de montaje a la plataforma de lanzamiento es el vehículo terrestre más grande jamás construido; pesa 4.9×10^6 lb al nivel del mar.
(a) ¿Cuál es su masa en slugs?
(b) ¿Cuál es su masa en kilogramos?
(c) Un automóvil ordinario tiene una masa de aproximadamente 1000 kilogramos. ¿Cuántos automóviles se deberían tener para obtener un peso igual al del tractor al nivel del mar?

1.20 La aceleración debida a la gravedad es de 13.2 pie/s^2 en Marte y de 32.2 pie/s^2 en la Tierra. Si una mujer pesa 125 lb sobre la Tierra, ¿cuánto pesará en Marte?

1.21 La aceleración debida a la gravedad es de 13.2 pie/s^2 sobre la superficie de Marte y de 32.2 pie/s^2 sobre la superficie de la Tierra. Una mujer pesa 125 lb en la Tierra. Para sobrevivir y trabajar en la superfice de Marte, debe portar un traje y un equipo especiales, así como herramientas. ¿Cuál es el peso máximo admisible en la Tierra de la ropa, el equipo y las herramientas de la astronauta si los ingenieros no quieren que en Marte el peso total rebase las 125 libras?

1.22 Una persona tiene una masa de 50 kg.
(a) La aceleración debida a la gravedad al nivel del mar es $g = 9.81$ m/s^2. ¿Cuál es el peso de la persona al nivel del mar?
(b) La aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Luna es de 1.62 m/s^2. ¿Cuál sería el peso de la persona en la Luna?

1.23 La aceleración debida a la gravedad al nivel del mar es $g = 9.81$ m/s^2. El radio de la Tierra es de 6370 km. La constante gravitatoria universal es $G = 6.67$ por 10^{-11} N-m^2/kg^2. Use esta información para determinar la masa de la Tierra.

1.24 Una persona pesa 180 lb al nivel del mar. El radio de la Tierra es de 3960 millas. ¿Qué fuerza ejerce la atracción gravitatoria de la Tierra sobre la persona si ésta se encuentra en una estación espacial en órbita a 200 millas de la Tierra?

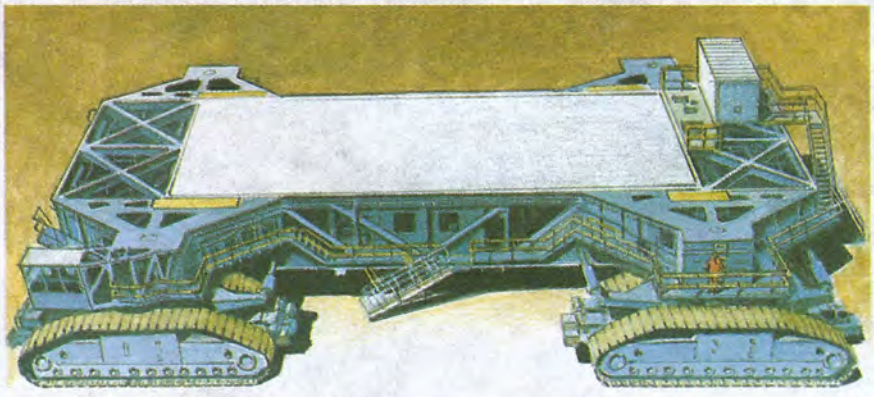
1.25 La aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Luna es de 1.62 m/s^2. El radio de la Luna es $R_M = 1738$ km. Determine la aceleración debida a la gravedad en la Luna en un punto ubicado 1738 km arriba de su superficie.

Estrategia: Escriba una ecuación equivalente a la ecuación (1.4) para la aceleración debida a la gravedad en la Luna.

1.26 Si un cuerpo está cerca de la superficie de la Tierra, la variación de su peso con la distancia desde el centro de la Tierra con frecuencia puede despreciarse. La aceleración debida a la gravedad al nivel del mar es $g = 9.81$ m/s^2. El radio de la Tierra es de 6370 km. El peso de un cuerpo al nivel del mar es mg, donde m es su masa. ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra el peso del cuerpo se reduce a $0.99\,mg$?

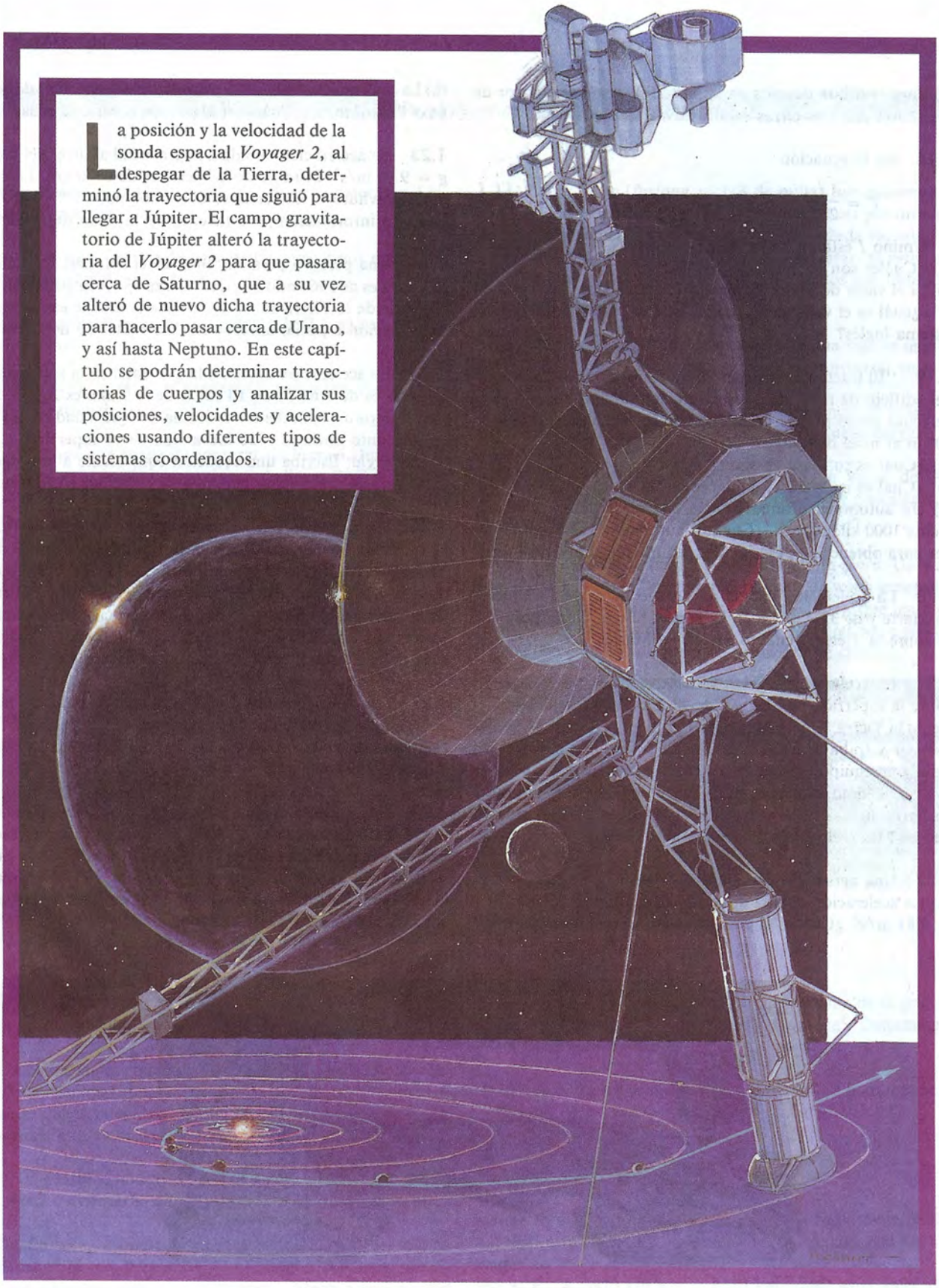
1.27 Los centros de dos naranjas se encuentran a un metro de distancia. La masa de cada naranja es de 0.2 kg. ¿Qué fuerza gravitatoria ejercen entre sí las naranjas? (La constante gravitatoria universal es $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m^2/kg^2.)

1.28 Una pulgada es igual a 25.4 milímetros. La masa de un metro cúbico de agua es de 1000 kilogramos. La aceleración debida a la gravedad al nivel del mar es $g = 9.81$ m/s^2. El peso de un pie cúbico de agua al nivel del mar es aproximadamente igual a 62.4 lb. Usando esta información, determine a cuántos newtons equivale una libra.



P1.19

La posición y la velocidad de la sonda espacial *Voyager 2*, al despegar de la Tierra, determinó la trayectoria que siguió para llegar a Júpiter. El campo gravitatorio de Júpiter alteró la trayectoria del *Voyager 2* para que pasara cerca de Saturno, que a su vez alteró de nuevo dicha trayectoria para hacerlo pasar cerca de Urano, y así hasta Neptuno. En este capítulo se podrán determinar trayectorias de cuerpos y analizar sus posiciones, velocidades y aceleraciones usando diferentes tipos de sistemas coordenados.



Capítulo 2

Movimiento de un punto

AL diseñar un vehículo, sea éste una bicicleta o una nave espacial, los ingenieros deben ser capaces de analizar y predecir su movimiento. Para diseñar un motor, deben analizar los movimientos de cada una de sus partes móviles. Aun al diseñar estructuras "estáticas" como edificios, puentes y presas, a menudo deben analizar los movimientos que provocan las eventuales cargas de viento y los sismos.

En este capítulo comenzamos el estudio del movimiento. No nos interesan aquí las propiedades de los cuerpos ni las causas de sus movimientos; sólo queremos describir y analizar el movimiento de un punto en el espacio. Sin embargo, tenga presente que una partícula puede representar algún punto (como el centro de masa) de un cuerpo en movimiento. Después de definir la posición, velocidad, y aceleración de un punto, consideramos el ejemplo más sencillo: el movimiento a lo largo de una línea recta. Luego mostramos cómo el movimiento de un punto a lo largo de una **trayectoria** cualquiera se expresa y analiza en varios sistemas coordenados.

2.1 *Posición, velocidad y aceleración*

Podemos describir la posición de un punto P escogiendo un **punto de referencia** O y presentando el **vector de posición** $\mathbf{r}$ de O a P (Fig. 2.1a). Supongamos que P está en movimiento respecto a O, de manera que $\mathbf{r}$ es una función del tiempo t (Fig. 2.1b). Expresamos esto con la notación

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

La **velocidad** de P respecto a O en el tiempo t se define como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}, \tag{2.1}$$

donde el vector $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ es el cambio de posición, o **desplazamiento** de P, durante el intervalo de tiempo Δt (Fig. 2.1c). Así, la velocidad es la razón de cambio de la posición de P respecto a O.

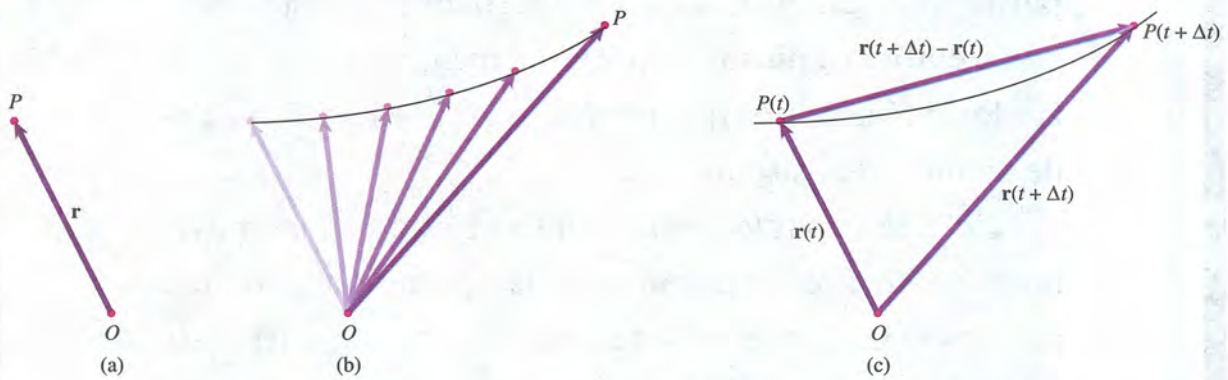


Figura 2.1
(a) Vector de posición $\mathbf{r}$ de P respecto a O. (b) Movimiento de P respecto a O. (c) Cambio en la posición de P entre t y $t + \Delta t$.

Las dimensiones de una derivada se determinan como si se tratara de una proporción, por lo que las dimensiones de $\mathbf{v}$ son (distancia)/(tiempo). El punto de referencia usado suele ser obvio, y simplemente llamamos $\mathbf{v}$ a la velocidad de P. Sin embargo, se debe recordar que la posición y la velocidad de un punto se pueden especificar sólo con respecto a un punto de referencia.

Observe en la Ec. (2.1) que la derivada de un vector con respecto al tiempo se define exactamente igual que la derivada de una función escalar. Por ello, comparte algunas propiedades de la derivada de una función escalar. Usaremos dos de esas propiedades: La derivada respecto al tiempo de la suma de dos funciones vectoriales $\mathbf{u}$ más $\mathbf{w}$ es

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{w}}{dt},$$

y la derivada respecto al tiempo del producto de una función escalar f por una función vectorial $\mathbf{u}$ es

$$\frac{d(f\mathbf{u})}{dt} = \frac{df}{dt}\mathbf{u} + f\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

La **aceleración** de P respecto a O en un tiempo t se define como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}, \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ es el cambio en la velocidad de P durante el intervalo de tiempo Δt (Fig. 2.2). La aceleración es la razón de cambio de la velocidad de P en el tiempo t (la segunda derivada respecto al tiempo del desplazamiento), y sus dimensiones son (distancia)/(tiempo)^2.

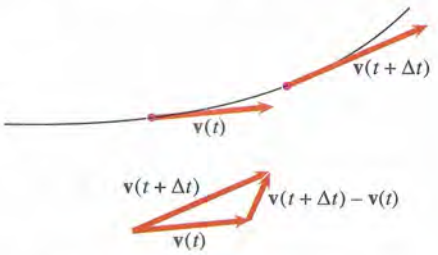


Figura 2.2
Cambio en la velocidad de P entre t y $t + \Delta t$.

2.2 Movimiento en línea recta

Analizamos este tipo simple de movimiento para que usted obtenga experiencia antes de pasar al caso general del movimiento de un punto. Sin embargo, en muchos casos prácticos los ingenieros deben analizar movimientos en línea recta, como el movimiento de un vehículo sobre un camino recto o el movimiento del pistón de un motor de combustión interna.

Descripción del movimiento

Podemos especificar la posición de un punto P sobre una línea recta respecto a un punto de referencia O por medio de la coordenada s medida a lo largo de la línea que va de O a P (Fig. 2.3a). En este caso definimos s como positiva hacia la derecha, por lo que s es positiva cuando P está a la derecha de O y negativa cuando P está a la izquierda de O. El **desplazamiento** Δs respecto a O durante un intervalo de tiempo de t_0 a t es el cambio de posición, $\Delta s = s(t) - s(t_0)$.

Incluyendo un vector unitario $\mathbf{e}$ paralelo a la línea y que apunta en la dirección positiva s (Fig. 2.3b), podemos escribir el vector de posición de P respecto a O como

$$\mathbf{r} = s\,\mathbf{e}.$$

Si la línea no gira, el vector unitario $\mathbf{e}$ es constante y la velocidad de P respecto a O es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{e}.$$

Podemos escribir el vector velocidad como $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}$ y obtener la ecuación escalar

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

La velocidad v de un punto P a lo largo de la línea recta es la razón de cambio de su posición s. Observe que v es igual a la pendiente en un tiempo t de la tangente a la gráfica de s en función del tiempo (Fig. 2.4).

La aceleración de P respecto a O es

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\mathbf{e}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}.$$

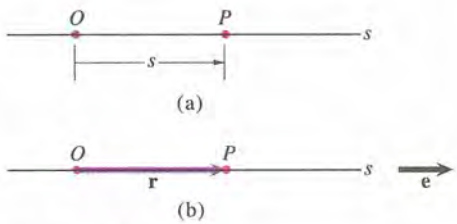


Figura 2.3
(a) Coordenada s de O a P.
(b) Vector unitario $\mathbf{e}$ y vector de posición $\mathbf{r}$.

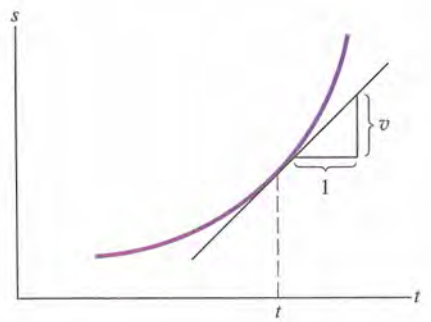


Figura 2.4
La pendiente de la línea recta tangente a la gráfica de s contra t es la velocidad en el tiempo t.

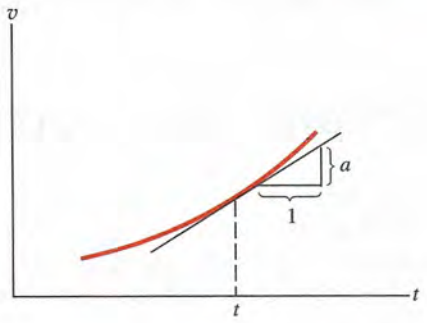
Escribir el vector de aceleración como $\mathbf{a} = a\mathbf{e}$ da la ecuación escalar

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

La aceleración a es igual a la pendiente en el tiempo t de la recta tangente a la gráfica de v en función del tiempo (Fig. 2.5).

Figura 2.5

La pendiente de la línea recta tangente a la gráfica de v contra t es la aceleración en el tiempo t.



Con el vector unitario $\mathbf{e}$ obtuvimos ecuaciones escalares que describen el movimiento de P. La posición queda especificada por la coordenada s, y la velocidad y la aceleración están regidas por las ecuaciones

$$v = \frac{ds}{dt}, \tag{2.3}$$

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{2.4}$$

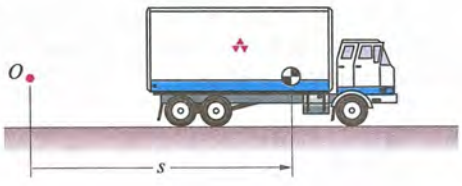
Análisis del movimiento

En algunos casos se conoce la posición s de algún punto de un cuerpo como función del tiempo. Los ingenieros usan métodos como el radar y la interferometría de láser para medir posiciones en función del tiempo. En este caso, con las Ecs. (2.3) y (2.4) se pueden obtener por diferenciación la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo. Por ejemplo, si la posición del camión de la Fig. 2.6 durante el intervalo de tiempo de $t = 2$ s a $t = 4$ s está dada por la ecuación

$$s = 6 + \frac{1}{3}t^3 \text{ m},$$

Figura 2.6

La coordenada s mide la posición del centro de masa del camión respecto a un punto de referencia.



su velocidad y aceleración durante ese intervalo de tiempo son

$$v = \frac{ds}{dt} = t^2 \text{ m/s},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2t \text{ m/s}^2.$$

Sin embargo, es más común conocer la aceleración de un cuerpo que su posición, porque la aceleración de un cuerpo se puede determinar con la segunda ley de Newton cuando se conocen las fuerzas que actúan sobre él. Una vez conocida la aceleración, con las Ecs. (2.3) y (2.4) se pueden determinar por integración la velocidad y la posición. En las siguientes secciones analizaremos tres casos importantes.

Aceleración especificada como función del tiempo Si la aceleración es una función conocida del tiempo $a(t)$, podemos integrar la relación

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \tag{2.5}$$

con respecto al tiempo para determinar la velocidad en función del tiempo,

$$v = \int a(t)\,dt + A, \tag{2.6}$$

donde A es una constante de integración. Luego podemos integrar la relación

$$\frac{ds}{dt} = v \tag{2.7}$$

para determinar la posición en función del tiempo,

$$s = \int v\,dt + B, \tag{2.8}$$

donde B es otra constante de integración. Para determinar las constantes A y B se necesita información adicional acerca del movimiento, por ejemplo los valores de v y s en un tiempo dado.

En vez de usar integrales indefinidas, la Ec. (2.5) se puede escribir como

$$dv = a(t)\,dt$$

e integrar en términos de integrales definidas:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt.$$

El límite inferior v_0 es la velocidad en el tiempo t_0 y el límite superior es la velocidad en un tiempo t cualquiera. Evaluando la integral izquierda obtenemos una expresión para la velocidad en función del tiempo:

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt. \tag{2.9}$$

Podemos escribir la Ec. (2.7) como

$$ds = v\,dt$$

e integrar en términos de integrales definidas,

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} v\,dt,$$

donde el límite inferior s_0 es la posición en el tiempo t_0 y el límite superior s es la posición en un tiempo t arbitrario. Evaluando la integral izquierda, obtenemos la posición en función del tiempo:

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt. \tag{2.10}$$

Aunque hemos mostrado cómo determinar la velocidad y la posición cuando se conoce la aceleración en función del tiempo, no deberían memorizarse resultados como las Ecs. (2.9) y (2.10). Como demostraremos en los ejemplos, recomendamos que los problemas de movimiento en línea recta se resuelvan empezando con las Ecs. (2.3) y (2.4).

Algunas observaciones útiles sobre las Ecs. (2.9) y (2.10) son las siguientes:

- El área definida por la gráfica de la aceleración de P en función del tiempo de t_0 a t es igual al cambio en la velocidad de t_0 a t (Fig. 2.7a).
- El área definida por la gráfica de la velocidad de P en función del tiempo de t_0 a t es igual al desplazamiento, o cambio de posición, de t_0 a t (Fig. 2.7b).

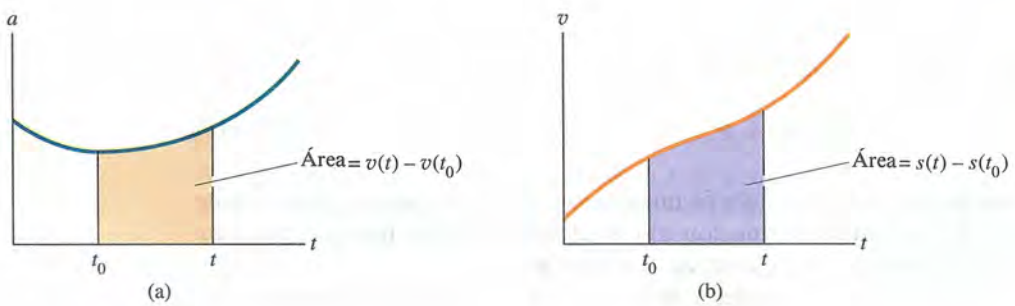


Figura 2.7

Relaciones entre áreas definidas por las gráficas de la aceleración y la velocidad de P, y cambios en su velocidad y posición.

A menudo se pueden usar esas relaciones para obtener una apreciación cualitativa del movimiento de un cuerpo, y en algunos casos incluso se pueden usar para determinar su movimiento.

En algunas situaciones, la aceleración de un cuerpo es constante, o casi constante. Por ejemplo, si se lanza un cuerpo denso, como una pelota de golf o una roca, y éste no cae muy lejos, se puede ignorar la resistencia del aire y suponer que su aceleración es igual a la aceleración de la gravedad al nivel del mar.

Sea la aceleración una constante conocida a_0. De las Ecs. (2.9) y (2.10), la velocidad y la posición como funciones del tiempo son

$$v = v_0 + a_0(t - t_0), \tag{2.11}$$

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2, \tag{2.12}$$

donde s_0 y v_0 son la posición y la velocidad, respectivamente, en el tiempo t_0. Observe que *si la aceleración es constante, la velocidad es una función lineal del tiempo.*

Podemos usar la **regla de la cadena** para expresar la aceleración en términos de una derivada respecto a s:

$$a_0 = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v.$$

Escribiendo esta expresión como $v\,dv = a_0\,ds$ e integrando,

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a_0\,ds,$$

obtenemos una ecuación para la velocidad en función de la posición:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0(s - s_0). \tag{2.13}$$

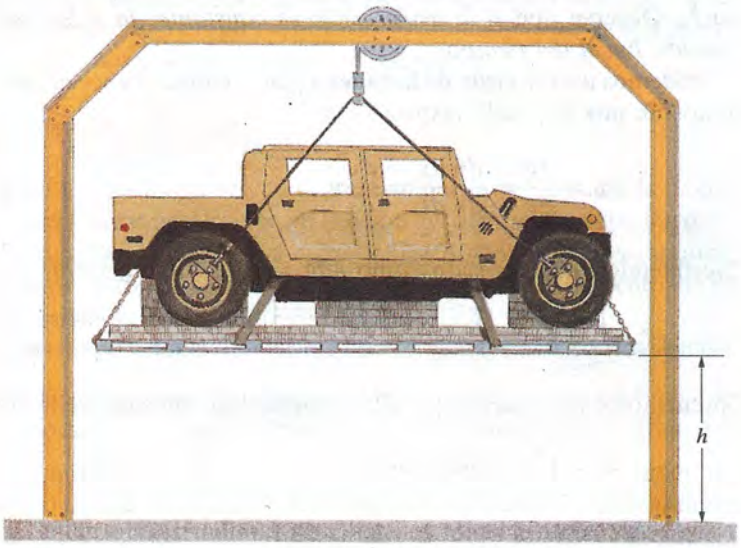
Probablemente el lector se encuentra familiarizado con las Ecs. (2.11) a (2.13). Aunque esos resultados pueden ser de utilidad *cuando se sabe que la aceleración es constante*, hay que tener cuidado de no usarlas cuando esto no sea así.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo usar las Ecs. (2.3) y (2.4) para obtener información sobre movimientos de cuerpos en línea recta. Quizá sea necesario elegir el punto de referencia y la dirección positiva de s. Cuando se conoce la aceleración como función del tiempo, se puede integrar la Ec. (2.4) para determinar la velocidad y luego integrar la Ec. (2.3) para determinar la posición.

Ejemplo 2.1

Durante la prueba de un vehículo que va a ser lanzado por paracaídas se calcula que su velocidad al tocar el suelo será de 20 pie/s. Si se suelta el vehículo desde el bastidor de prueba de la Fig. 2.8, ¿a qué altura h se debe soltar para simular la caída con paracaídas?

Figura 2.8



ESTRATEGIA

Suponemos que la aceleración del vehículo durante su corta caída es $g = 32.2$ pie/s^2. Podemos determinar la altura h de dos maneras:

- *Primer método*. Integrar las Ecs. (2.3) y (2.4) para determinar el movimiento del vehículo.
- *Segundo método*. Usar la Ec. (2.13), que relaciona la velocidad y la posición cuando la aceleración es constante.

SOLUCIÓN

Sea s la posición del fondo de la plataforma que soporta al vehículo respecto a su posición inicial (Fig. a). La aceleración del vehículo es $a = 32.2$ pie/s^2.

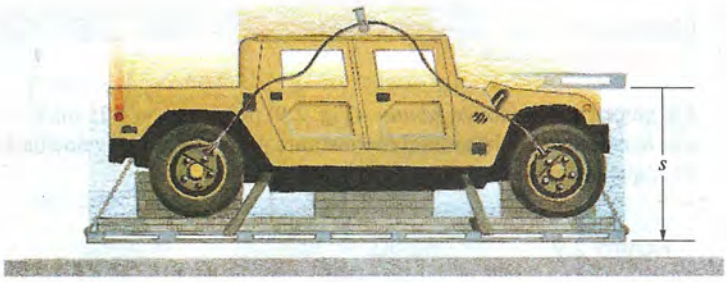
Primer método De la Ec. (2.4),

$$\frac{dv}{dt} = a = 32.2 \text{ pie/s}^2$$

Integrando, obtenemos

$$v = 32.2t + A,$$

donde A es una constante de integración. Si $t = 0$ es el instante en que el vehículo se



(a) La coordenada s mide la posición del fondo de la plataforma respecto a su posición inicial.

suelta, $v = 0$ cuando $t = 0$, por lo que $A = 0$ y la velocidad en función del tiempo es

$$v = 32.2t \text{ pie/s}.$$

Integrando la Ec. (2.3),

$$\frac{ds}{dt} = v = 32.2t,$$

obtenemos

$$s = 16.1t^2 + B,$$

donde B es una segunda constante de integración. La posición $s = 0$ cuando $t = 0$, por lo que $B = 0$ y la posición en función del tiempo es

$$s = 16.1t^2.$$

De la ecuación para la velocidad, el tiempo de caída necesario para que el vehículo alcance 20 pie/s es $t = 20/32.2 = 0.621$ s. Sustituyendo este tiempo en la ecuación para la posición, la altura h necesaria para simular la caída en paracaídas es

$$h = 16.1(0.621)^2 = 6.21 \text{ pie}.$$

Segundo método Como la aceleración es constante, podemos usar la Ec. (2.13) a fin de determinar la distancia necesaria para que la velocidad alcance el valor de 20 pie/s:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0(s - s_0),$$
$$(20)^2 = 0 + 2(32.2)(s - 0).$$

Resolviendo para s obtenemos $h = 6.21$ pie.

Ejemplo 2.2

Un guepardo, *Acinonyx jubatus*, (Fig. 2.9) puede correr a 75 mi/h. Si se supone que la aceleración del animal es constante y que alcanza su velocidad máxima en 4 s, ¿qué distancia recorrerá en 10 s?

Figura 2.9

ESTRATEGIA

La aceleración tiene un valor constante durante los primeros 4 s y luego es cero. Podemos determinar la distancia recorrida durante cada una de esas "fases" del movimiento y sumarlas para obtener la distancia total recorrida. Lo haremos analítica y gráficamente.

SOLUCIÓN

La velocidad máxima en términos de pie/s es

$$75 \text{ mi/h} = 75 \text{ mi/h} \times \left(\frac{5280 \text{ pie}}{1 \text{ mi}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 110 \text{ pie/s}.$$

Primer método Sea a_0 la aceleración durante los primeros 4 s. Integramos la Ec. (2.4),

$$\int_0^v dv = \int_0^t a_0 \, dt,$$

obteniendo la velocidad en función del tiempo durante los primeros 4 s:

$$v = a_0 t \text{ pie/s}.$$

Cuando $t = 4$ s, $v = 110$ pie/s, por lo que $a_0 = 110/4 = 27.5$ pie/s^2. Ahora integramos la Ec. (2.3),

$$\int_0^s ds = \int_0^t 27.5t\, dt,$$

y obtenemos la posición como función del tiempo durante los primeros 4 s:

$$s = 13.75t^2 \text{ m}.$$

En $t = 4$ s la posición es $s = 13.75(4)^2 = 220$ pie.

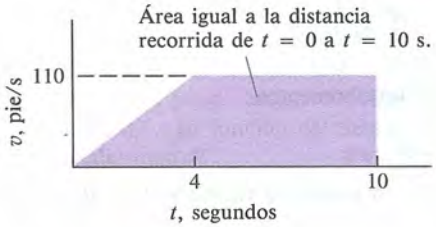
De $t = 4$ a $t = 10$ s la velocidad es constante. La distancia recorrida es

$$(110 \text{ pie/s})(6 \text{ s}) = 660 \text{ pie}.$$

La distancia total que el animal recorre en 10 s es $220 + 660 = 880$ pie, o 293.3 yardas.

Segundo método En la Fig. (a) dibujamos la gráfica de la velocidad del animal en función del tiempo. La aceleración es constante durante los primeros 4 s de su movimiento, por lo que su velocidad es una función lineal del tiempo de $v = 0$ en $t = 0$ a $v = 110$ pie/s en $t = 4$ s. La velocidad es constante durante los últimos 6 s. La distancia total recorrida es la suma de las áreas durante las dos fases del movimiento:

$$\frac{1}{2}(4 \text{ s})(110 \text{ pie/s}) + (6 \text{ s})(110 \text{ pie/s}) = 220 \text{ pie} + 660 \text{ pie} = 880 \text{ pie}.$$



(a) Velocidad del guepardo en función del tiempo.

COMENTARIO

Observe que en el primer método usamos integrales definidas en vez de indefinidas para determinar la velocidad y posición del guepardo en función del tiempo. Se sugiere resolver este ejemplo usando integrales indefinidas y comparar los resultados de ambos métodos. Es un asunto de preferencia personal usar integrales definidas o indefinidas, pero es necesario estar familiarizado con ambos procedimientos.

Ejemplo 2.3

Figura 2.10

Suponga que en la Fig. 2.10 la aceleración del tren durante el intervalo de tiempo de $t = 2$ s a $t = 4$ s es $a = 2t$ m/s^2, y que en $t = 2$ s su velocidad es $v = 180$ km/h. ¿Cuál es la velocidad del tren en $t = 4$ s y cuál su desplazamiento (cambio de posición) entre $t = 2$ s y $t = 4$ s?

ESTRATEGIA

Podemos integrar las Ecs. (2.3) y (2.4) para determinar la velocidad y posición del tren como funciones del tiempo.

SOLUCIÓN

La velocidad en $t = 2$ s en términos de m/s es

$$180 \text{ km/h} = 180 \text{ km/h} \times \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 50 \text{ m/s}.$$

Escribimos la ecuación (2.4) como

$$dv = a\,dt = 2t\,dt$$

e integramos, con la condición de que $v = 50$ m/s en $t = 2$ s:

$$\int_{50}^{v} dv = \int_{2}^{t} 2t\,dt.$$

Evaluando las integrales obtenemos

$$v = t^2 + 46 \text{ m/s}.$$

Ahora que conocemos la velocidad en función del tiempo, escribimos la Ec. (2.3) como

$$ds = v\,dt = (t^2 + 46)\,dt$$

e integramos, definiendo la posición del tren en $t = 2$ s como $s = 0$:

$$\int_{0}^{s} ds = \int_{2}^{t} (t^2 + 46)\,dt.$$

La posición en función del tiempo es

$$s = \frac{1}{3}t^3 + 46t - 94.7 \text{ m}.$$

Usando las ecuaciones para la velocidad y la posición, la velocidad en $t = 4$ s es

$$v = (4)^2 + 46 = 62 \text{ m/s},$$

y el desplazamiento entre $t = 2$ s y $t = 4$ s es

$$\Delta s = \left[\frac{1}{3}(4)^3 + 46(4) - 94.7\right] - 0 = 110.7 \text{ m}.$$

COMENTARIO

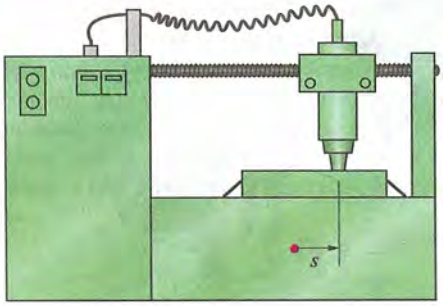
En este ejemplo la aceleración no es constante. No se debe tratar de resolver tales problemas usando ecuaciones que son válidas sólo cuando la aceleración es constante. Para ver esto con mayor claridad, aplique la Ec. (2.11) a este ejemplo: haga $a_0 = 2t$ m/s^2, $t_0 = 2$ s y $v_0 = 50$ m/s, y encuentre la velocidad en $t = 4$ s.

Problemas

Los siguientes problemas implican movimiento en línea recta. El tiempo *t* está en segundos a menos que se indique otra cosa.

2.1 La gráfica de la posición s de un punto en función del tiempo es una línea recta. Cuando $t = 4$ s, $s = 24$ m, y cuando $t = 20$ s, $s = 72$ m.
(a) Determine la velocidad del punto calculando la pendiente de la línea recta.
(b) Obtenga la ecuación para s en función del tiempo y úsela para determinar la velocidad del punto.

2.2 La gráfica de la posición s de un punto de una fresadora en función del tiempo es una línea recta. Cuando $t = 0.2$ s, $s = 90$ mm. Durante el intervalo de tiempo de $t = 0.6$ s a $t = 1.2$ s, el desplazamiento del punto es $\Delta s = -180$ mm.
(a) Determine la ecuación para s en función del tiempo.
(b) ¿Cuál es la velocidad del punto?

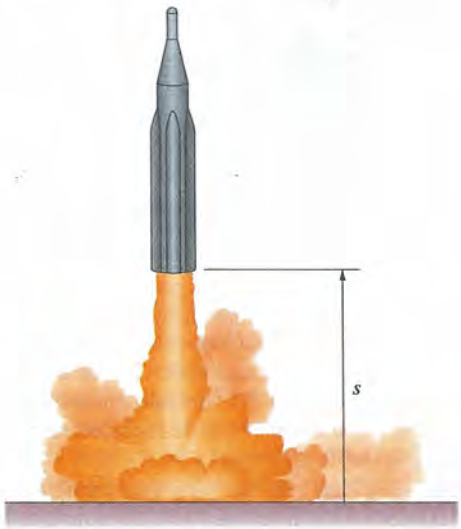


P2.2

2.3 La gráfica de la velocidad v de un punto en función del tiempo es una línea recta. Cuando $t = 2$ s, $v = 4$ pie/s, y cuando $t = 4$ s, $v = -10$ pie/s.
(a) Determine la aceleración del punto calculando la pendiente de la línea recta.
(b) Obtenga la ecuación para v en función del tiempo y úsela para determinar la aceleración del punto.

2.4 La posición de un punto está dada por $s = 2t^2 - 10$ pie.
(a) ¿Cuál es el desplazamiento del punto entre $t = 0$ y $t = 4$ s?
(b) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración en $t = 0$?
(c) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración en $t = 4$ s?

2.5 Un cohete parte del reposo y viaja hacia arriba en línea recta. Su altura sobre el suelo se mide con un radar desde $t = 0$ hasta $t = 4$ s, y se puede expresar de manera aproximada por medio de la función $s = 10t^2$ m.
(a) ¿Cuál es el desplazamiento durante este intervalo de tiempo?
(b) ¿Cuál es la velocidad en $t = 4$ s?
(c) ¿Cuál es la aceleración durante los primeros 4 s?



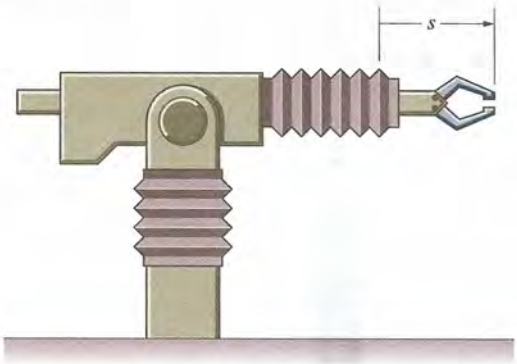
P2.5

2.6 La posición de un punto durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 6$ s es $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2 + 4t$ m.
(a) ¿Cuál es el desplazamiento del punto durante este intervalo de tiempo?
(b) ¿Cuál es la velocidad máxima durante este intervalo de tiempo, y en qué momento ocurre?
(c) ¿Cuál es la aceleración cuando la velocidad es máxima?

2.7 La posición de un punto durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 3$ s es $s = 12 + 5t^2 - t^3$ pie.
(a) ¿Cuál es la velocidad máxima durante este intervalo de tiempo, y en qué momento ocurre?
(b) ¿Cuál es la aceleración cuando la velocidad es máxima?

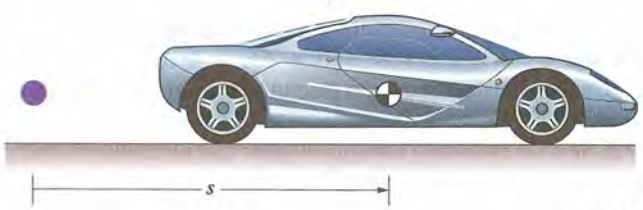
2.8 Un sismógrafo mide el movimiento horizontal del terreno durante un sismo. Al analizar los datos, un ingeniero determina que para un intervalo de 10 segundos comenzando en $t = 0$, la posición se puede expresar aproximadamente con $s = 100 \cos(2\pi t)$ mm. ¿Cuáles son (a) la velocidad máxima y (b) la aceleración máxima del terreno durante el intervalo de 10 segundos?

2.9 Durante una operación de ensamblaje, el brazo de un robot se mueve a lo largo de una línea recta. Durante un intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 1$ s, su posición está dada por $s = 3t^2 - 2t^3$ en pulgadas. Determine, durante ese intervalo de 1 segundo: (a) el desplazamiento del brazo; (b) los valores máximo y mínimo de la velocidad; (c) los valores máximo y mínimo de la aceleración.



P2.9

2.10 Durante la prueba de un vehículo, el conductor parte del reposo en $t = 0$, acelera y luego aplica los frenos. Los ingenieros que miden la posición del vehículo encuentran que de $t = 0$ a $t = 18$ s, la posición se puede representar por medio de la relación $s = 5t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{50}t^4$.
(a) ¿Cuál es la velocidad máxima y en qué momento ocurre?
(b) ¿Cuál es la aceleración máxima y en qué momento ocurre?



P2.10

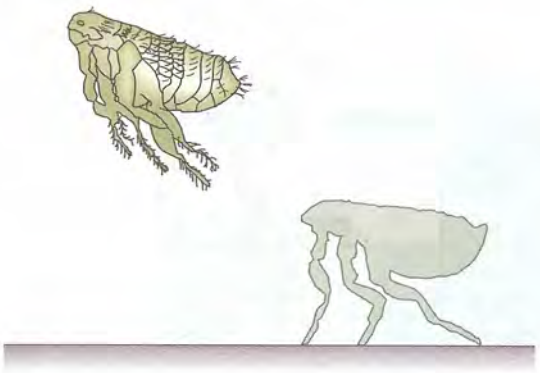
2.11 Suponga que se quiere representar la posición de un vehículo que está siendo probado por medio de la serie de potencias $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, donde A, B, C y D son constantes. El vehículo parte del reposo en $t = 0$ y $s = 0$. En $t = 4$ s, $s = 176$ pies, y en $t = 8$ s, $s = 448$ pies.
(a) Determine A, B, C y D.
(b) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración aproximadas del vehículo en $t = 8$ s?

2.12 La aceleración de un punto es $a = 20t$ m/s^2. Cuando $t = 0$, $s = 40$ m y $v = -10$ m/s. ¿Cuáles son la posición y la velocidad en $t = 3$ s?

2.13 La aceleración de un punto es $a = 60t - 36t^2$ pie/s^2. Cuando $t = 0$, $s = 0$ y $v = 20$ pie/s. ¿Cuáles son la posición y la velocidad en función del tiempo?

2.14 Suponga que durante el diseño preliminar de un automóvil, se considera que su aceleración máxima es aproximadamente constante. ¿Qué aceleración constante es necesaria si se quiere que el automóvil alcance desde el reposo una velocidad de 55 mi/h en 10 s? ¿Qué distancia recorrería el automóvil en ese tiempo?

2.15 Un entomólogo calcula que una pulga de 1 mm de longitud alcanza al saltar una velocidad de 1.3 m/s en una distancia igual a la longitud de su cuerpo. ¿Qué aceleración constante se necesita para alcanzar esa velocidad?



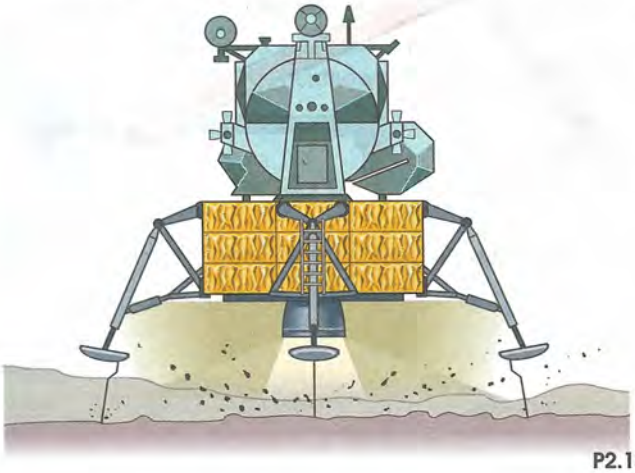
P2.15

2.16 Los cohetes diseñados como defensa contra los cohetes balísticos alcanzan aceleraciones superiores a 100 g, es decir, mayores que 100 veces la aceleración de la gravedad. Si un cohete tiene una aceleración constante de 100 g, ¿cuánto tiempo tarda en alcanzar una velocidad de 60 mi/h a partir del reposo? ¿Cuál es su desplazamiento durante ese tiempo?

P2.16

2.17 Debe lanzar un juego de llaves a un amigo que está en el balcón de un segundo piso. Si suelta las llaves a 1.5 m del suelo, ¿qué velocidad vertical se necesita para que lleguen a la mano de su amigo, que se halla a 6 m sobre el suelo?

2.18 El módulo lunar mostrado desciende hacia la superficie de la luna a 1 m/s cuando sus sensores de aterrizaje, que se extienden 2 m por debajo del módulo, tocan la superficie y apagan automáticamente los motores. Determine la velocidad con la que el tren de aterrizaje toca la superficie lunar (la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la luna es de 1.62 m/s^2).



P2.18

2.19 En 1960 R.C. Owens, jugador de los Baltimore Colts, atajó un gol de campo de los Washington Redskins saltando y desviando la pelota frente a la meta a 11 pies sobre el terreno. Si él medía 6 pies 3 pulg y podía alcanzar 1 pie 11 pulg sobre su cabeza, ¿qué velocidad vertical tenía al saltar?

2.20 La velocidad de un trineo es $v = 10t$ pie/s. Si $t = 2$ s, su posición es $s = 25$ pie. ¿Cuál es su posición si $t = 10$ s?

P2.20

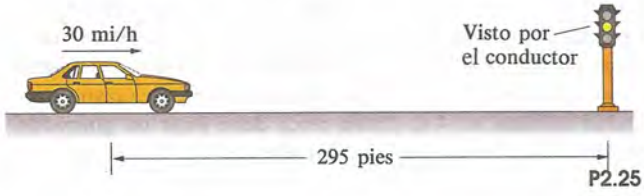
2.21 La aceleración de un cuerpo es $a = 30 - 6t$ pie/s^2. Cuando $t = 0$, $s = 0$ y $v = 0$. ¿Cuál es su velocidad máxima durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 10$ s?

2.22 La velocidad de un cuerpo es $v = 200 - 2t^2$ m/s. Cuando $t = 3$ s, su posición es $s = 600$ m. ¿Cuáles son la posición y la aceleración del cuerpo en $t = 6$ s?

2.23 Se mide la aceleración de una pieza sometida a una operación de maquinado y se obtiene que $a = 12 - 6t$ mm/s^2. Cuando $t = 0$, $v = 0$. Para el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 4$ s, determine: (a) la velocidad máxima; (b) el desplazamiento.

2.24 El cohete del Prob. 2.16 parte del reposo y acelera hacia arriba durante 3 s a 100 g. Después de 3 s, su peso y la resistencia aerodinámica le ocasionan una desaceleración casi constante de 4 g. ¿Cuánto tarda el cohete en alcanzar una altura de 50 000 pies desde el suelo?

2.25 Un automóvil viaja a 30 mi/h cuando se enciende la luz amarilla de un semáforo que se encuentra 295 pies adelante. La luz amarilla permanecerá 5 s antes de que se encienda la roja. (a) ¿Qué aceleración constante permitirá que el automóvil alcance la luz en el instante en que cambie a la roja, y cuál será la velocidad del automóvil cuando llegue al semáforo? (b) Si el conductor decide no alcanzar la luz a tiempo, ¿qué aceleración constante permitirá que el automóvil se detenga justo antes de llegar al semáforo?



P2.25

2.26 En $t = 0$, un conductor que viaja a 100 km/h ve un venado en el camino, 100 m adelante. Después de un tiempo de reacción de 0.3 s, aplica los frenos y desacelera a una razón constante de 4 m/s^2. Si el venado tarda 5 s desde $t = 0$ para reaccionar y abandonar el camino, ¿podrá el conductor esquivarlo?

2.27 Un tren de alta velocidad tiene una velocidad máxima de 100 m/s. Para comodidad de los pasajeros, la magnitud de la aceleración y desaceleración se limita a 2 m/s^2. Determine el tiempo mínimo requerido para un viaje de 100 km.

Estrategia: Un procedimiento gráfico puede ayudar a resolver este problema. Recuerde que el cambio de posición de un tiempo inicial t_0 a un tiempo t es igual al área definida por la gráfica de la velocidad en función del tiempo de t_0 a t.

P2.27

2.28 La estrella más cercana a nosotros después del Sol es Próxima Centauri, que está a 4.22 años luz de la Tierra. Ignorando el movimiento relativo entre el sistema solar y Próxima Centauri, suponga que una nave espacial acelera desde la vecindad de la Tierra a 0.01 g (0.01 veces la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar) hasta que alcanza un décimo de la velocidad de la luz, viaja por inercia hasta que llega el momento de desacelerar, luego desacelera a razón de 0.01 g hasta que llega al reposo cerca de Próxima Centauri. ¿Cuánto tiempo dura el viaje? (La luz viaja a 3×10^8 m/s. Un año solar es igual a 365.2422 días solares.)

2.29 Un auto de carreras parte del reposo y acelera a $a = 5 + 2t$ pie/s^2 durante 10 s. Se aplican los frenos y el auto adquiere una aceleración constante $a = -30$ pie/s^2 hasta que se detiene. Determine: (a) la velocidad máxima; (b) la distancia total recorrida; (c) el tiempo total del recorrido.

2.30 Cuando $t = 0$, la posición de un punto es $s = 6$ m y su velocidad es $v = 2$ m/s. De $t = 0$ a $t = 6$ s, su aceleración es $a = 2 + 2t^2$ m/s^2. De $t = 6$ s hasta que alcanza el reposo, su aceleración es $a = -4$ m/s^2.

(a) ¿Cuál es el tiempo total de viaje?

(b) ¿Qué distancia total cubre el desplazamiento?

2.31 Zoólogos que estudian la llanura Serengeti calculan que, en promedio, un guepardo adulto puede correr a 100 km/h y la gacela, en promedio, puede correr a 65 km/h. Si los animales corren a lo largo de la misma línea recta, comenzando al mismo tiempo, y ambos tienen aceleración constante y alcanzan su velocidad máxima en 4 s, ¿cuán cerca debe estar un guepardo cuando la caza comienza para dar alcance a la gacela en 15 s?

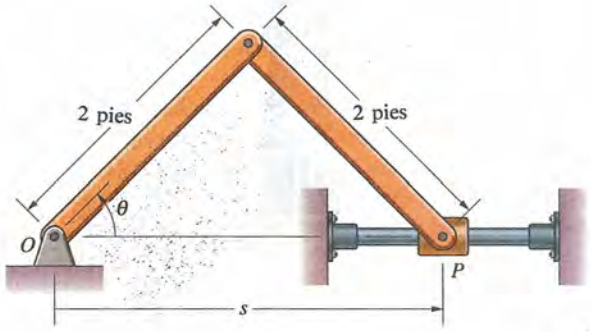
2.32 Suponga que una persona conduce su automóvil a 75 mi/h en una zona de 55 mi/h y rebasa a una patrulla de policía que va a 55 mi/h en la misma dirección. Si la patrulla acelera hasta 80 mi/h en 4 s con aceleración constante desde el momento en que es rebasada, ¿cuánto tardará en alcanzar al auto?

2.33 Si $\theta = 1$ rad y $d\theta/dt = 1$ rad/s, ¿cuál es la velocidad de P respecto a O?

Estrategia: Se puede escribir la posición de P respecto a O como

$$s = (2 \text{ pie}) \cos\theta + (2 \text{ pie}) \cos\theta,$$

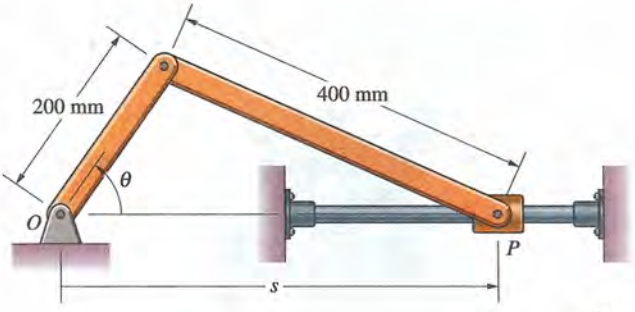
y luego calcular la derivada de esta expresión con respecto al tiempo para determinar la velocidad.



P2.33

2.34 En el problema 2.33, si $\theta = 1$ rad, $d\theta/dt = -2$ rad/s y $d^2\theta/dt^2 = 0$, ¿cuáles son la velocidad y la aceleración de P respecto a O?

2.35 Si $\theta = 1$ rad y $d\theta/dt = 1$ rad/s, ¿cuál es la velocidad de P relativa a O?



P2.35

Aceleración especificada como función de la velocidad Las fuerzas aerodinámicas e hidrodinámicas ocasionan que la aceleración de un cuerpo dependa de su velocidad (Fig. 2.11). Suponga que la aceleración es una función conocida de la velocidad $a(v)$:

$$\frac{dv}{dt} = a(v). \tag{2.14}$$

Figura 2.11
Las fuerzas aerodinámicas e hidrodinámicas dependen de la velocidad del cuerpo. Cuanto más rápido se mueve el cuerpo respecto al fluido, mayor es la fuerza que resiste su movimiento.

No podemos integrar esta ecuación con respecto al tiempo para determinar la velocidad, porque $a(v)$ no se conoce como función del tiempo. Sin embargo, podemos **separar variables** poniendo los términos que contengan v en un lado de la ecuación y los términos que contengan t en el otro lado:

$$\frac{dv}{a(v)} = dt. \tag{2.15}$$

Ahora podemos integrar,

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} = \int_{t_0}^{t} dt, \tag{2.16}$$

donde v_0 es la velocidad en el tiempo t_0. En principio, podemos resolver esta ecuación para la velocidad en función del tiempo, y luego integrar la relación

$$\frac{ds}{dt} = v$$

para determinar la posición en función del tiempo.

Usando la regla de la cadena podemos determinar también la velocidad en función de la posición. Escribiendo la aceleración como

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$$

y sustituyéndola en la ecuación (2.14) obtenemos

$$\frac{dv}{ds}v = a(v).$$

Separando variables,

$$\frac{v\,dv}{a(v)} = ds,$$

e integrando,

$$\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{a(v)} = \int_{s_0}^{s} ds,$$

podemos obtener una relación entre la velocidad y la posición.

Aceleración especificada como función de la posición Las fuerzas gravitatorias y las fuerzas ejercidas por resortes pueden hacer que la aceleración de un cuerpo dependa de su posición. Si la aceleración es una función conocida de la posición,

$$\frac{dv}{dt} = a(s), \tag{2.17}$$

no podemos integrar con respecto al tiempo para determinar la velocidad porque s no se conoce como función del tiempo. Además, no podemos separar variables porque la ecuación contiene tres variables, v, t y s. Sin embargo, usando la regla de la cadena,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v,$$

podemos escribir la ecuación (2.17) como

$$\frac{dv}{ds}v = a(s).$$

Ahora podemos separar variables,

$$v\,dv = a(s)\,ds, \tag{2.18}$$

e integrar:

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a(s)\,ds. \tag{2.19}$$

En principio, podemos resolver esta ecuación para la velocidad en función de la posición:

$$v = \frac{ds}{dt} = v(s). \tag{2.20}$$

Luego podemos separar variables en esta ecuación e integrar para determinar la posición en función del tiempo:

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v(s)} = \int_{t_0}^{t} dt.$$

Los siguientes dos ejemplos muestran cómo se puede analizar el movimiento de un cuerpo cuando su aceleración es una función de la velocidad o de la posición. Los pasos iniciales se resumen en la tabla 2.1.

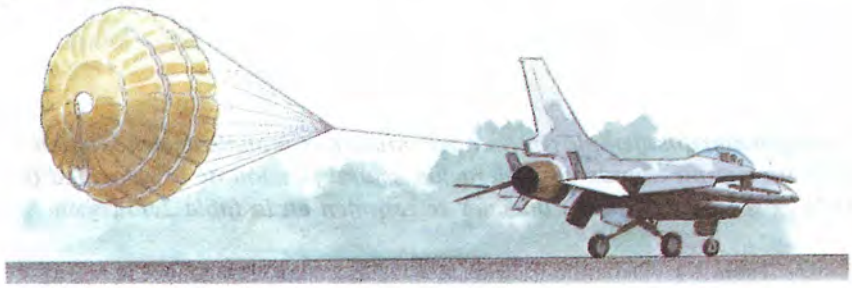
Tabla 2.1 Determinación de la velocidad cuando se conoce la aceleración en función de la velocidad o de la posición.

Si se conoce $a = a(v)$:	separe las variables, $\frac{dv}{dt} = a(v)$, $\frac{dv}{a(v)} = dt$, o aplique la regla de la cadena, $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v = a(v)$, luego separe las variables, $\frac{v\,dv}{a(v)} = ds.$
Si se conoce $a = a(s)$:	aplique la regla de la cadena, $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v = a(s)$, luego separe las variables, $v\,dv = a(s)\,ds.$

Ejemplo 2.4

Después de desplegar su paracaídas de frenaje, el avión de la Fig. 2.12 tiene una aceleración $a = -0.004v^2$ m/s^2.
(a) Determine el tiempo requerido para que la velocidad disminuya de 80 m/s a 10 m/s.
(b) ¿Qué distancia recorre el avión en ese tiempo?

Figura 2.12



ESTRATEGIA

En la parte (b) usaremos la regla de la cadena para expresar la aceleración en términos de una derivada respecto a la posición, e integraremos para obtener una relación entre la velocidad y la posición.

SOLUCIÓN

(a) La aceleración es

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.004v^2.$$

Separamos variables,

$$\frac{dv}{v^2} = -0.004dt,$$

e integramos, definiendo $t = 0$ como el tiempo en que $v = 80$ m/s:

$$\int_{80}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_{0}^{t} -0.004dt.$$

Evaluando las integrales y despejando t obtenemos

$$t = 250\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{80}\right).$$

El tiempo requerido por el avión para llegar a $v = 10$ m/s es 21.9 s. En la Fig. 2.13 mostramos la velocidad del avión en función del tiempo.

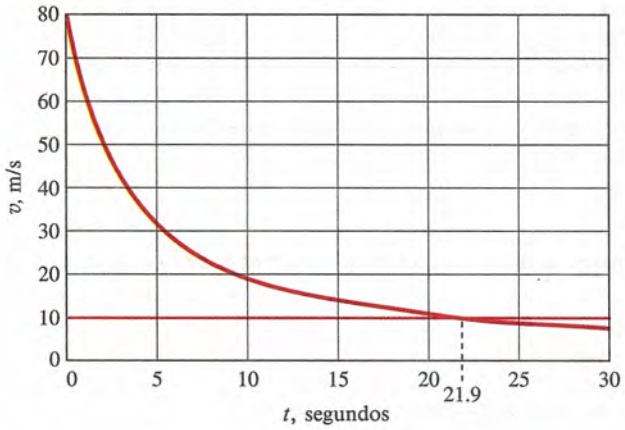


Figura 2.13
Gráfica de la velocidad del avión en función del tiempo.

(b) Escribimos la aceleración como

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v = -0.004v^2,$$

separamos variables,

$$\frac{dv}{v} = -0.004ds,$$

e integramos, definiendo $s = 0$ como la posición en que $v = 80$ m/s:

$$\int_{80}^{v} \frac{dv}{v} = \int_{0}^{s} -0.004ds.$$

Evaluando las integrales y despejando s, obtenemos

$$s = 250 \ln\left(\frac{80}{v}\right).$$

La distancia requerida por el avión para alcanzar una $v = 10$ m/s es de 519.9 m.

COMENTARIO

Observe que los resultados predicen que el tiempo transcurrido y la distancia recorrida continúan aumentando sin límite conforme la velocidad del avión disminuye. La razón es que el modelado es incompleto. La ecuación para la aceleración sólo incluye la resistencia aerodinámica y no toma en cuenta otras fuerzas, como la fricción en las ruedas del avión.

Ejemplo 2.5

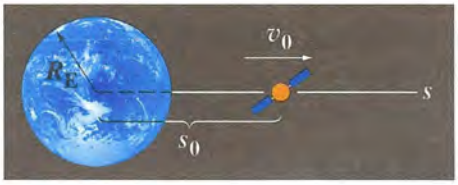


Figura 2.14

En términos de la distancia s desde el centro de la Tierra, la magnitud de la aceleración debida a la gravedad es gR_E^2/s^2, donde R_E es el radio de la Tierra (véase en la Sec. 1.3 el comentario sobre la gravedad). Si una nave espacial está a una distancia s_0 del centro de la Tierra (Fig. 2.14), ¿qué velocidad v_0 hacia afuera se le debe dar para que recorra una distancia especificada h desde el centro de la Tierra?

SOLUCIÓN

La aceleración debida a la gravedad es *hacia* el centro de la Tierra:

$$a = -\frac{gR_E^2}{s^2}.$$

Aplicando la regla de la cadena,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v = -\frac{gR_E^2}{s^2},$$

y separando variables obtenemos

$$v\,dv = -\frac{gR_E^2}{s^2}\,ds.$$

Integramos esta ecuación usando la condición inicial, $v = v_0$ cuando $s = s_0$, como los límites inferiores, y la condición final, $v = 0$ cuando $s = h$, como los límites superiores:

$$\int_{v_0}^{0} v\,dv = -\int_{s_0}^{h} \frac{gR_E^2}{s^2}\,ds.$$

Evaluando las integrales y despejando v_0, obtenemos la velocidad inicial v_0 necesaria para que la nave espacial recorra una distancia h:

$$v_0 = \sqrt{2gR_E^2\left(\frac{1}{s_0} - \frac{1}{h}\right)}.$$

COMENTARIOS

Podemos hacer una importante observación relacionada con el resultado de este ejemplo. Observe que conforme la distancia h aumenta, la velocidad inicial v_0 necesaria tiende a un límite finito. Este límite,

$$v_{esc} = \lim_{h\to\infty} v_0 = \sqrt{\frac{2gR_E^2}{s_0}},$$

se llama **velocidad de escape**. En ausencia de otros efectos, un cuerpo con esta velocidad inicial continuará moviéndose indefinidamente hacia afuera. La existencia de una velocidad de escape hace factible enviar sondas y personas a otros planetas. Una vez que se alcanza la velocidad de escape, ya no es necesario consumir combustible adicional para mantener el movimiento.

Problemas

2.36 La aceleración de un cuerpo es $a = -2v$ m/s^2. Cuando $t = 0$, $s = 0$ y $v = 2$ m/s. Determine la velocidad del cuerpo en función del tiempo.

2.37 En el Prob. 2.36, determine la posición del cuerpo en función del tiempo.

2.38 La lancha de la figura se va moviendo a 20 pie/s cuando su motor se apaga. Debido a la resistencia aerodinámica, su aceleración es $a = -0.1\ v^2$ pie/s^2. ¿Cuál es la velocidad de la lancha 2 s después?

P2.38

2.39 En el Prob. 2.38, ¿qué distancia recorre la lancha en 2 s después de que se apaga el motor?

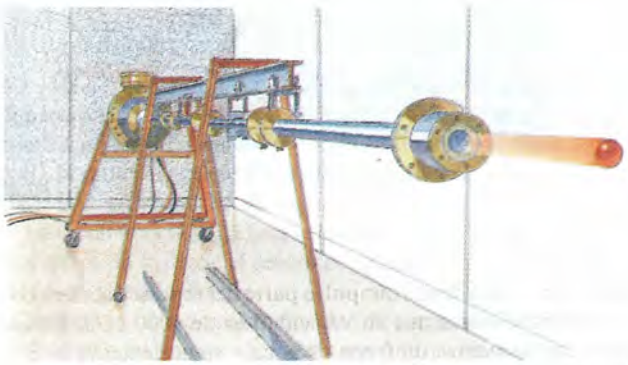
2.40 Una bola de acero se libera del reposo en un recipiente de acero. Su aceleración hacia abajo es $a = 0.9g - cv$, donde g es la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar y c es una constante. ¿Cuál es la velocidad de la bola en función del tiempo?

P2.40

2.41 En el Prob. 2.40, determine la posición de la bola respecto a su posición inicial en función del tiempo.

2.42 La mayor profundidad oceánica descubierta hasta ahora se halla en las islas Marianas, en el Océano Pacífico occidental. Una bola de acero que se libere en la superficie requiere 64 minutos para llegar al fondo. La aceleración de la bola hacia abajo es $a = 0.9g - cv$, donde g es la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar y la constante $c = 3.02$ s^{-1}. ¿Cuál es la profundidad en millas?

2.43 Para estudiar los efectos de los impactos de meteoros sobre los satélites, se usa un cañón que acelera una bola de plástico a una alta velocidad. Se determina que cuando la bola ha recorrido 1 m su velocidad es de 2.25 km/s y cuando ha recorrido 2 m, su velocidad es de 1.00 km/s. Suponga que la aceleración de la bola cuando sale del cañón está dada por $a = -cv^2$, donde c es una constante.
(a) ¿Cuál es el valor de c y cuáles son sus unidades SI?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la bola al salir del cañón?



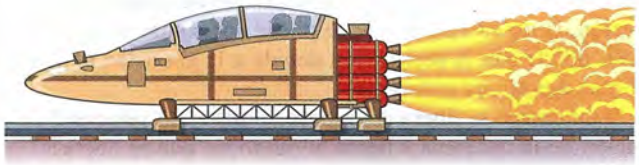
P2.43

2.44 Si se toma en cuenta la resistencia aerodinámica, la aceleración de un cuerpo al caer se puede aproximar con $a = g - cv^2$, donde g es la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar y c es una constante.
(a) Si un cuerpo se libera del reposo, ¿cuál es su velocidad en función de la distancia s desde el punto en que se libera?
(b) Determine el límite de su respuesta a la parte (a) cuando $c \to 0$, y demuestre que concuerda con la solución que se obtiene al suponer su aceleración es aproximadamente $a = g$.

2.45 Un paracaidista salta de un helicóptero y va cayendo en línea recta a 30 m/s cuando se abre su paracaídas. A partir de ese momento su aceleración es aproximadamente $a = g - cv^2$, donde $g = 9.81$ m/s^2 y c es una constante. Después de un periodo inicial de "transición", desciende a una velocidad de 5 m/s casi constante.
(a) ¿Cuál es el valor de c y cuáles son sus unidades SI?
(b) ¿A qué desaceleración máxima está sometido?
(c) ¿Cuál es su velocidad cuando ha caído 2 m desde el punto en que se abre su paracaídas?

P2.45

2.46 Un trineo de retroimpulso parte del reposo y acelera con $a = 3t^2$ m/s^2 hasta que su velocidad es de 1000 m/s. En ese momento encuentra un freno de agua y su aceleración es $a = -0.001v^2$ hasta que su velocidad disminuye a 500 m/s. ¿Qué distancia total recorre el trineo?



P2.46

2.47 La velocidad de un punto está dada por la ecuación

$$v = (24 - 2s^2)^{1/2} \text{ m/s}.$$

¿Cuál es su aceleración cuando $s = 2$ m?

2.48 La velocidad de un cuerpo sometido al campo gravitatorio de la Tierra está dada por

$$v = \left[v_0^2 + 2gR_E^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_0}\right)\right]^{1/2},$$

donde v_0 es la velocidad en la posición s_0, y R_E es el radio de la Tierra. Usando esta ecuación, demuestre que la aceleración del cuerpo es $a = gR_E^2/s^2$.

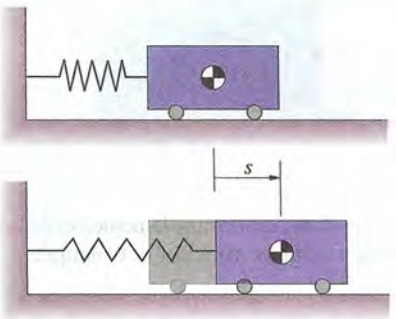
2.49 El análisis del movimiento de un mecanismo indica que la velocidad de un punto de conexión está dada por $v = A + 4s^2$ pie/s, donde A es una constante. Cuando $s = 2$ pies, su aceleración es $a = 320$ pie/s^2. ¿Cuál es su velocidad cuando $s = 2$ pies?

2.50 La aceleración de un cuerpo está dada por la función $a = 2s$ pie/s^2. Cuando $t = 0$, $v = 1$ pie/s. Halle la velocidad cuando el cuerpo se ha movido 2 pie de su posición inicial.

2.51 La aceleración de un cuerpo está dada por $a = 3s^2$ pie/s^2. En $s = 0$, su velocidad es $v = 10$ pie/s. ¿Cuál es su velocidad cuando $s = 4$ pie?

2.52 La velocidad de un cuerpo está dada por $v^2 = k/s$, donde k es una constante. Si $v = 4$ m/s y $s = 4$ m en $t = 0$, determine la constante k y la velocidad en $t = 2$ s.

2.53 Un oscilador consiste en una masa y un resorte conectados como se muestra. La coordenada s mide el desplazamiento de la masa respecto a su posición cuando el resorte no está estirado. Si el resorte es lineal, la masa está sometida a una desaceleración proporcional a s. Suponga que $a = -4s$ m/s^2 y que la masa tiene una velocidad $v = 1$ m/s en la posición $s = 0$.
(a) ¿Qué distancia se moverá la masa hacia la derecha antes de que el resorte la detenga?
(b) ¿Qué velocidad tendrá la masa cuando regrese a la posición $s = 0$?

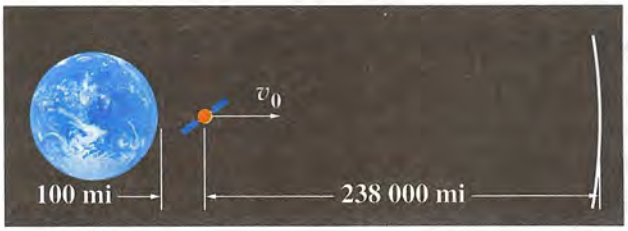


P2.53

2.54 En el Prob. 2.53 suponga que en $t = 0$ la masa se libera desde el reposo en la posición $s = 1$ m. Determine la velocidad de la masa en función de s al moverse de su posición inicial a $s = 0$.

2.55 En el Prob. 2.53 suponga que en $t = 0$ la masa se libera desde el reposo en la posición $s = 1$ m. Determine la posición de la masa en función del tiempo al moverse de su posición inicial a $s = 0$.

2.56 Si una nave espacial está a 100 mi sobre la superficie de la Tierra, ¿qué velocidad inicial v_0 requeriría para alcanzar la órbita de la Luna, a 238 000 mi del centro de la Tierra? El radio de la Tierra es de 3960 mi. Ignore el efecto de la gravedad de la Luna. (Véase el Ej. 2.5.)

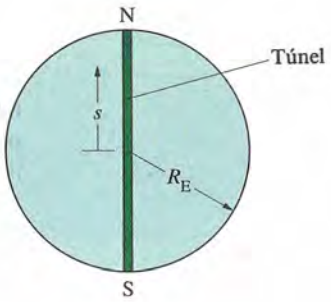


P2.56

2.57 El radio de la Luna es $R_L = 1738$ km. La aceleración de la gravedad en su superficie es 1.62 m/s^2. Si un cuerpo se libera desde el reposo a 1738 km sobre la superficie de la Luna, ¿cuál es la magnitud de su velocidad justo antes de chocar con la superficie?

2.58 Usando los datos del Prob. 2.57, determine la velocidad de escape desde la superficie de la Luna. (Véase el Ej. 2.5.)

2.59 Suponga que se puede taladrar un túnel recto a través de la Tierra, del polo norte al polo sur, y evacuar el aire. Un cuerpo liberado desde la superficie caería con aceleración $a = -gs/R_E$, donde g es la aceleración de la gravedad al nivel del mar, R_E es el radio de la Tierra y s es la distancia del cuerpo respecto al centro de la Tierra. (La aceleración gravitatoria es igual a cero en el centro de la Tierra y se incrementa linealmente con la distancia desde el centro.) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del cuerpo cuando éste alcanza el centro de la Tierra?

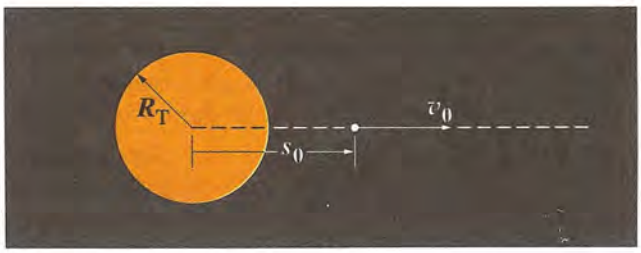


P2.59

2.60 La aceleración de la gravedad de un planeta hipotético bidimensional dependería de la distancia s desde el centro del planeta según la relación $a = -k/s$, donde k es una constante. Sea R_E el radio del planeta y g_E la magnitud de la aceleración debida a la gravedad en su superficie.

(a) Si a un cuerpo se le da una velocidad inicial v_0 hacia afuera a una distancia s_0 desde el centro del planeta, determine su velocidad en función de s.

(b) Demuestre que no existe velocidad de escape desde un planeta bidimensional (lo cual explicaría por qué no nos han visitado seres bidimensionales).



P2.60

2.3 Movimiento curvilíneo

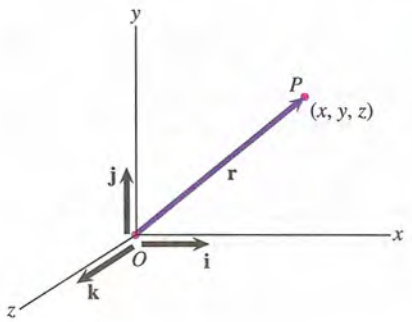
Si el movimiento de un punto se limita a una línea recta, su vector de posición **r**, su vector de velocidad **v** y su vector de aceleración **a** están completamente descritos por los escalares s, v y a respectivamente. Conocemos las direcciones de esos vectores porque son paralelos a la línea recta, pero si un punto describe una trayectoria **curvilínea**, debemos especificar tanto las magnitudes como las direcciones de esos vectores, y requerimos un sistema coordenado para expresarlos en términos de componentes escalares. Aunque las direcciones y magnitudes de los vectores de posición, de velocidad y de aceleración no dependen del sistema coordenado que se emplea para expresarlos, mostraremos que las *representaciones* de esos vectores son diferentes en distintos sistemas coordenados. Muchos problemas se pueden expresar en coordenadas cartesianas, pero algunas situaciones, incluyendo los movimientos de satélites y máquinas alternativas, se pueden expresar más fácilmente usando otros sistemas coordenados que ilustran los movimientos curvilíneos de puntos.

Coordenadas cartesianas

Sea **r** el vector de posición de un punto P respecto a un punto de referencia O. Para expresar el movimiento de P en un sistema coordenado cartesiano, colocamos el origen en O (Fig. 2.15), de modo que las componentes de **r** son las coordenadas x, y, z de P:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

Figura 2.15
Sistema coordenado cartesiano con su origen en el punto O de referencia.



Suponiendo que el sistema coordenado no gira, los vectores unitarios **i**, **j** y **k** son constantes (en el Cap. 6 veremos el caso de sistemas coordenados en rotación). Entonces, la velocidad de P es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k}. \tag{2.21}$$

Expresando la velocidad en términos de componentes escalares,

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}, \tag{2.22}$$

obtenemos ecuaciones escalares que relacionan las componentes de la velocidad con las coordenadas de P:

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.} \tag{2.23}$$

La aceleración de P es

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k},$$

y expresando la aceleración en términos de componentes escalares,

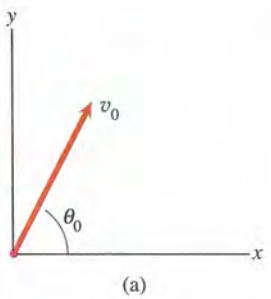
$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \tag{2.24}$$

obtenemos las ecuaciones escalares

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}.} \tag{2.25}$$

Las Ecs. (2.23) y (2.25) describen el movimiento de un punto respecto a un sistema cartesiano. Observe que las ecuaciones que describen el movimiento en cada dirección coordenada son idénticas en forma a las ecuaciones que describen el movimiento de un punto a lo largo de una línea recta. En consecuencia, a menudo se puede analizar el movimiento en cada dirección coordenada usando los métodos aplicables al movimiento en línea recta.

El **problema del proyectil** es el ejemplo clásico de este tipo. Si un cuerpo se dispara al aire y la resistencia aerodinámica es insignificante, su aceleración hacia abajo será la aceleración de la gravedad. En un sistema coordenado cartesiano con su eje y hacia arriba, la aceleración es $a_x = 0$, $a_y = -g$, $a_z = 0$. Suponga que en $t = 0$, el proyectil se encuentra en el origen y tiene velocidad v_0 en el plano x-y a un ángulo θ_0 sobre la horizontal (Fig. 2.16a).



(a)

Figura 2.16
(a) Condiciones iniciales para el problema del proyectil.

En $t = 0$, $x = 0$ y $v_x = v_0 \cos \theta_0$. La aceleración en la dirección x es cero,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0,$$

por lo que v_x es constante y permanece igual a su valor inicial:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \theta_0. \tag{2.26}$$

(Este resultado puede parecer falso; la razón es que la intuición, con base en la experiencia diaria, considera la resistencia del aire, mientras que este análisis no lo hace.) Integrando esta ecuación,

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cos \theta_0 \, dt,$$

obtenemos la coordenada x del cuerpo en función del tiempo:

$$x = v_0 \cos \theta_0 t. \tag{2.27}$$

Así, hemos determinado la posición y velocidad en la dirección x como funciones del tiempo sin considerar el movimiento en las direcciones y o z.

En $t = 0$, $y = 0$ y $v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0$. La aceleración en la dirección y es

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g.$$

Integrando respecto al tiempo,

$$\int_{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g \, dt,$$

obtenemos

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt. \tag{2.28}$$

Integrando esta ecuación,

$$\int_0^y dy = \int_0^t (v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt) \, dt,$$

encontramos que la coordenada y en función del tiempo es

$$y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2.29}$$

Se ve de este análisis que la misma velocidad y la misma posición verticales se obtienen lanzando el proyectil hacia arriba con velocidad inicial v_0 sen θ_0 (Figs. 2.16b, c). El movimiento vertical es completamente independiente del movimiento horizontal.

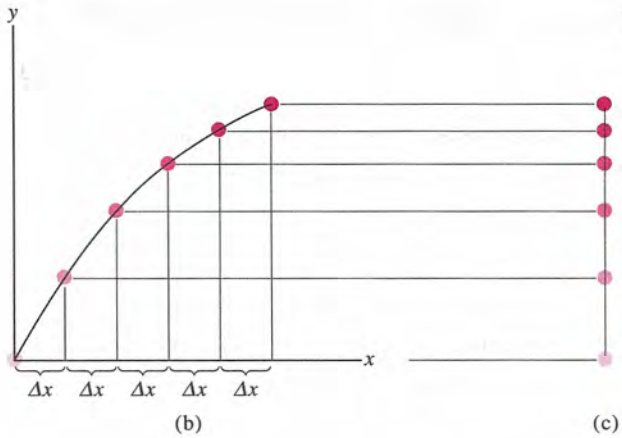


Figura 2.16
(b) Posiciones del proyectil en intervalos de tiempo Δt iguales. La distancia $\Delta x = v_0 \cos \theta_0 \Delta t$.
(c) Posiciones en intervalos iguales de tiempo Δt de un proyectil dada una velocidad vertical inicial igual a v_0 sen θ_0.

Resolviendo la Ec. (2.27) para t y sustituyendo el resultado en la Ec. (2.29), obtenemos una ecuación que describe la trayectoria parabólica del proyectil:

$$y = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2. \tag{2.30}$$

En el siguiente ejemplo analizamos una situación en la que se pueden usar las Ecs. (2.23) y (2.25) para determinar el movimiento de un cuerpo examinando por separado cada dirección coordenada.

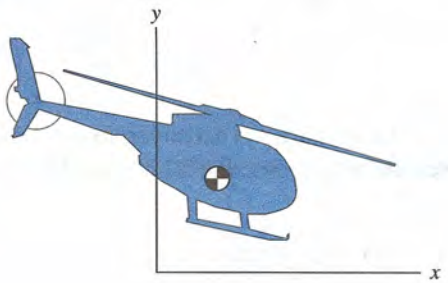
Ejemplo 2.6

Durante un vuelo de prueba, un helicóptero parte del reposo en $t = 0$ (Fig. 2.17); acelerómetros montados a bordo indican que sus componentes de aceleración entre $t = 0$ y $t = 10$ s están dadas por

$$a_x = 0.6t \text{ m/s}^2,$$
$$a_y = 1.8 - 0.36t \text{ m/s}^2,$$
$$a_z = 0.$$

Determine la velocidad y posición del helicóptero en función del tiempo.

Figura 2.17



ESTRATEGIA

Podemos analizar en forma independiente el movimiento en cada dirección coordenada, integrando la aceleración para determinar la velocidad e integrando la velocidad para determinar la posición.

SOLUCIÓN

La velocidad es cero en $t = 0$ y suponemos que $x = y = z = 0$ en $t = 0$. La aceleración en la dirección x es

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0.6t \text{ m/s}^2.$$

Integrando respecto al tiempo,

$$\int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t 0.6t\, dt,$$

obtenemos la componente de velocidad v_x en función del tiempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0.3t^2 \text{ m/s}.$$

Volviendo a integrar,

$$\int_0^x dx = \int_0^t 0.3t^2\, dt,$$

obtenemos x en función del tiempo:

$$x = 0.1t^3 \text{ m}.$$

Ahora analizamos, de la misma manera, el movimiento en la dirección y. La aceleración es

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 1.8 - 0.36t \text{ m/s}^2.$$

Integrando,

$$\int_0^{v_y} dv_y = \int_0^t (1.8 - 0.36t)\, dt,$$

obtenemos la velocidad,

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.8t - 0.18t^2 \text{ m/s}.$$

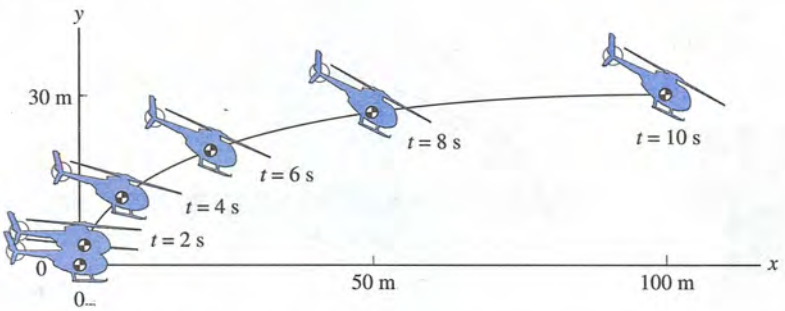
Integrando una vez más,

$$\int_0^y dy = \int_0^t (1.8t - 0.18t^2)\, dt,$$

determinamos la posición:

$$y = 0.9t^2 - 0.06t^3 \text{ m}.$$

Se puede mostrar con facilidad que las componentes z de la velocidad y la posición son $v_z = 0$ y $z = 0$. En la Fig. (a) mostramos la posición del helicóptero en función del tiempo.



(a) Posición del helicóptero en intervalos de 2 s.

COMENTARIO

Este ejemplo muestra cómo funcionan los sistemas de navegación inercial usados en los aviones y barcos comerciales. Estos sistemas contienen acelerómetros que miden las componentes x, y y z de la aceleración (los giróscopos mantienen el alineamiento de los acelerómetros). Integrando las componentes de la aceleración dos veces con respecto al tiempo, los sistemas calculan los cambios en las coordenadas x, y y z del avión o barco.

Problemas

2.61 Las coordenadas cartesianas de un punto (en metros) son $x = 2t + 4$, $y = t^3 - 2t$, $z = 4t^2 - 4$, donde t está en segundos. ¿Cuáles son su velocidad y su aceleración en $t = 4$ s?

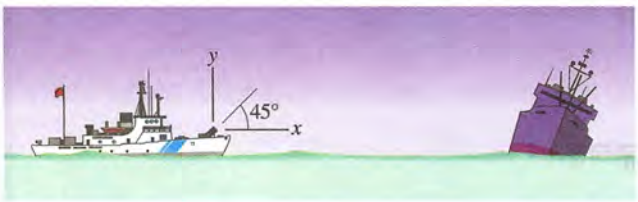
Estrategia: Como las coordenadas cartesianas están dadas en función del tiempo, se pueden usar las Ecs. (2.23) para determinar las componentes de la velocidad en función del tiempo, y las Ecs. (2.25) para determinar las componentes de la aceleración en función del tiempo.

2.62 La velocidad de un punto es $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ (pie/s). En $t = 0$ su posición es $\mathbf{r} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ (pie). Halle $\mathbf{r}$ en $t = 2$ s.

2.63 Las componentes de la aceleración de un punto (en pie/s^2) son $a_x = 3t^2$, $a_y = 6t$ y $a_z = 0$. En $t = 0$, $x = 5$ pie, $v_x = 3$ pie/s, $y = 1$ pie, $v_y = -2$ pie/s, $z = 0$ y $v_z = 0$. ¿Cuáles son sus vectores de posición y de velocidad en $t = 3$ s?

2.64 Las componentes de la aceleración de un cuerpo (m/s^2) son $a_x = 2t$, $a_y = 4t^2 - 2$ y $a_z = -6$. En $t = 0$ la posición del cuerpo es $\mathbf{r} = 10\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ (m) y su velocidad es $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (m/s). Determine su posición cuando $t = 4$ s.

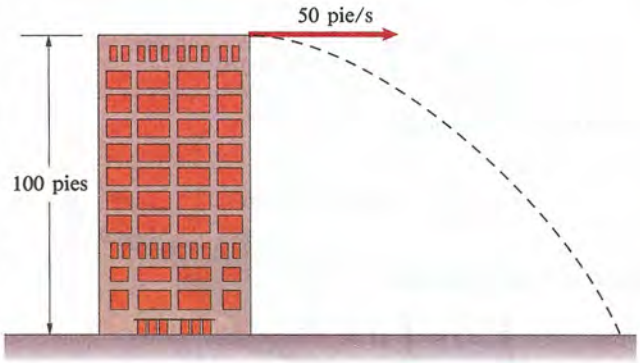
2.65 Se diseña un mortero para lanzar una cuerda de salvamento desde un guardacostas a un buque en zozobra. La cuerda está unida a un peso que es lanzado por el mortero. El mortero se montará en forma tal que disparará a 45° sobre la horizontal. Si se ignoran la resistencia del aire y el peso de la cuerda en el diseño preliminar, y se supone una velocidad inicial en la boca del mortero de 100 pie/s en $t = 0$, ¿cuáles son las coordenadas x y y del peso en función del tiempo?



P2.65

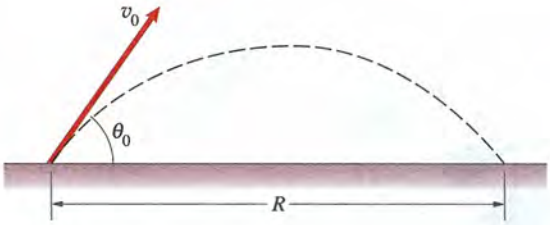
2.66 En el Prob. 2.65, ¿cuál debe ser la velocidad en la salida del mortero para alcanzar barcos a una distancia de 1000 pies?

2.67 Si se lanza horizontalmente una piedra desde la azotea de un edificio de 100 pies de altura a 50 pie/s, ¿a qué distancia horizontal desde el punto en que se lanzó tocará el suelo? (Suponga suelo a nivel.) ¿Cuál es la magnitud de su velocidad justo antes de tocar el suelo?



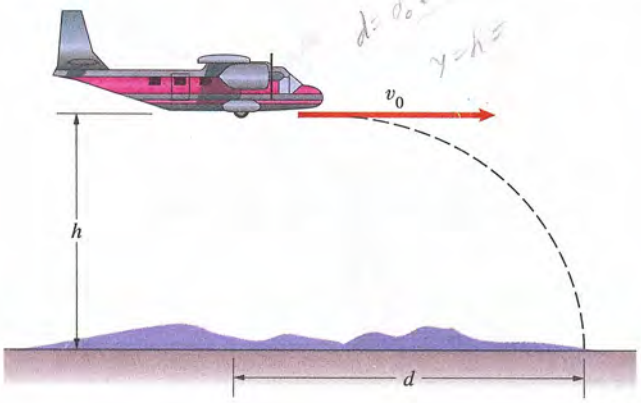
P2.67

2.68 Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo con velocidad inicial v_0. ¿Con qué ángulo inicial θ_0 sobre la horizontal se logra el alcance máximo R, y qué valor tiene este alcance máximo?



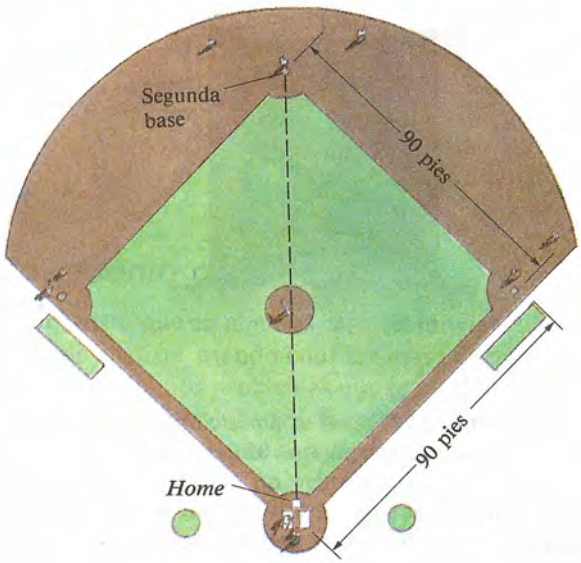
P2.68

2.69 Un piloto quiere lanzar suministros en cierta región remota. Pretende volar horizontalmente y soltar los paquetes sin velocidad vertical. Deduzca una ecuación para la distancia horizontal d a la que debe soltar el paquete en términos de la velocidad v_0 y la altura h del avión.



P2.69

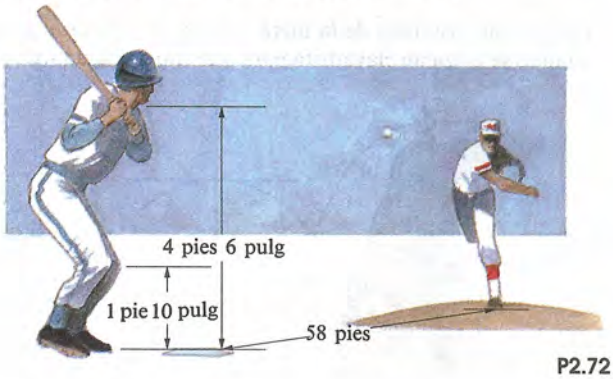
2.70 Un bateador golpea la pelota a 3 pies sobre el cojín de *home* y la eleva con un ángulo de 60° sobre la horizontal. El segunda base la toma a 6 pies sobre la segunda base. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la pelota?



P2.70

2.71 En el Prob. 2.70, ¿a qué altura sobre el campo voló la pelota?

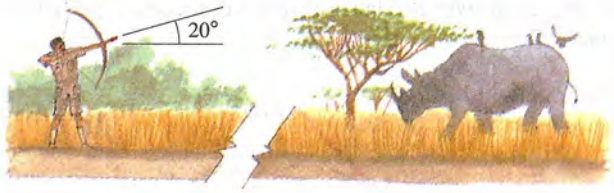
2.72 Un *pitcher* lanza una bola rápida con velocidad inicial $v_0 = 90$ mi/h. Sea θ el ángulo inicial del vector de velocidad de la pelota sobre la horizontal. Cuando la pelota es lanzada, está a 6 pies sobre el terreno y a 58 pies del bateador. La zona de *strike* del bateador (entre sus rodillas y sus hombros) se extiende entre 1 pie 10 pulg sobre el terreno y 4 pies 6 pulg. Ignorando efectos aerodinámicos, determine si la pelota pasará por la zona de *strike*: (a) si $\theta = 1°$; (b) si $\theta = 2°$.



P2.72

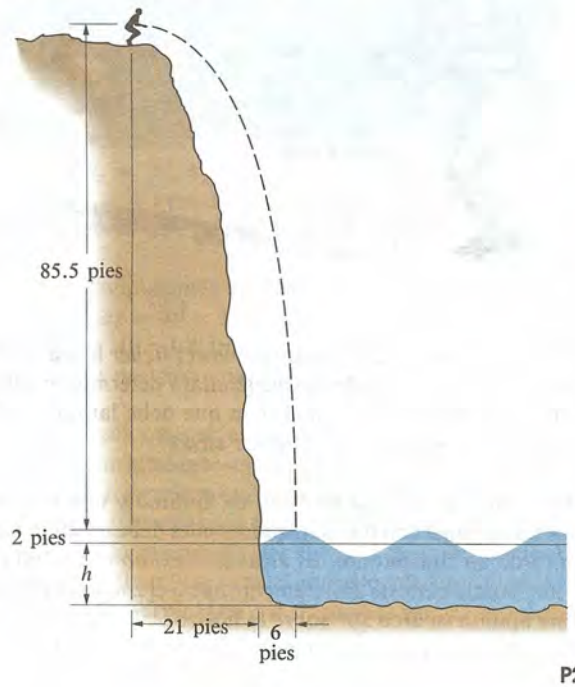
2.73 En el Prob. 2.72 suponga que el *pitcher* lanza la pelota con un ángulo $\theta = 1°$ sobre la horizontal y determine el intervalo de velocidades v_0 (en pie/s) con que debe lanzar la pelota para que ésta pase por la zona de *strike*.

2.74 Un zoólogo está provisto de un arco y una flecha que tiene una jeringa con tranquilizador, pues debe medir la temperatura de un rinoceronte. El alcance *máximo* es de 100 m. Si el rinoceronte embiste directamente hacia el zoólogo a 30 km/h y éste apunta su arco 20° sobre la horizontal, ¿a qué distancia debe estar el rinoceronte cuando dispare la flecha?



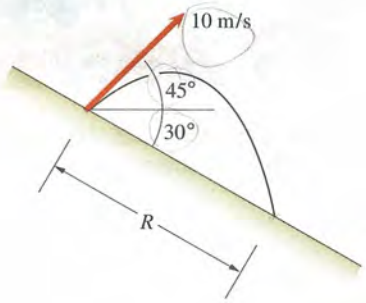
P2.74

2.75 Los clavadistas de La Quebrada en Acapulco deben sincronizar sus clavados de modo que entren al agua en la cresta de una ola. Las crestas de las olas tienen 2 pies sobre la profundidad media $h = 12$ pies del agua; la velocidad de las olas es $\sqrt{gh}$. La meta de los clavadistas es un punto a 6 pies de la base del acantilado. Suponga que cuando se inicia el clavado la velocidad es horizontal.
(a) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad en mi/h cuando entran al agua?
(b) ¿A qué distancia de la meta debe estar la cresta de la ola cuando se lanza un clavadista para que entre al agua sobre ella?



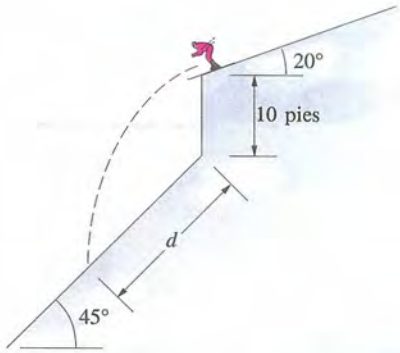
P2.75

2.76 Un proyectil se lanza a 10 m/s desde una superficie inclinada. Determine el alcance R.



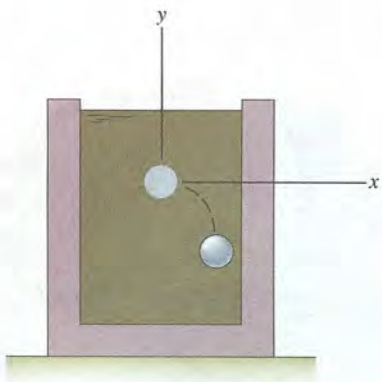
P2.76

2.77 Un esquiador salta de una pendiente de 20° a 50 pie/s.
(a) Determine la distancia d al punto en que cae.
(b) Determine las componentes de su velocidad paralela y perpendicular a la pendiente de 45° cuando cae.



P2.77

2.78 A una bola de acero en un tanque de aceite se le da, en $t = 0$, una velocidad horizontal $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}$ m/s. Las componentes de su aceleración en m/s^2 son $a_x = -1.2\,v_x$, $a_y = -8 - 1.2\,v_y$, $a_z = -1.2\,v_z$. ¿Cuál es la velocidad de la bola en $t = 1$ s?

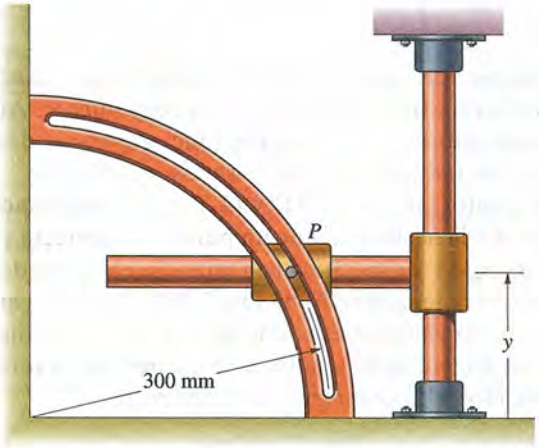


P2.78

2.79 En el Prob. 2.78, ¿cuál es la posición de la bola en $t = 1$ s respecto a su posición en $t = 0$?

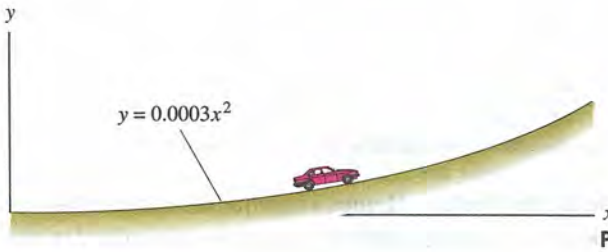
2.80 Se debe diseñar un dispositivo para una línea de ensamblaje que lance pequeñas piezas al aire, las cuales caerán en un recipiente. El punto de lanzamiento es $x = 200$ mm, $y = -50$ mm, $z = -100$ mm (el eje y es vertical y positivo hacia arriba). Para caer en el recipiente, las piezas deben pasar por el punto $x = 600$ mm, $y = 200$ mm, $z = 100$ mm *moviéndose horizontalmente*. Determine las componentes de la velocidad que el lanzador debe dar a las piezas.

2.81 Si $y = 150$ mm, $dy/dt = 300$ mm/s y $d^2y/dt^2 = 0$, ¿cuáles son las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto P?



P2.81

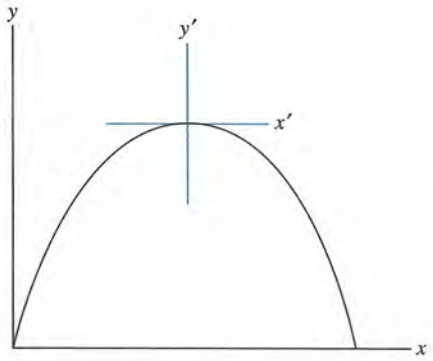
2.82 Un automóvil viaja a 100 km/h sobre un camino recto con pendiente creciente cuyo perfil vertical se puede aproximar con la ecuación mostrada. Cuando la coordenada horizontal del automóvil es $x = 400$ m, ¿cuál es su aceleración?



P2.82

2.83 Suponga que un proyectil tiene las condiciones iniciales mostradas en la Fig. 2.16(a). Demuestre que en el sistema coordenado $x'y'$ con su origen en el punto más alto de la trayectoria, la ecuación que describe a ésta es

$$y' = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}(x')^2.$$



P2.83

2.84 Las componentes de la aceleración de un punto son $a_x = -4 \cos 2t$, $a_y = -4 \operatorname{sen} 2t$, $a_z = 0$. En $t = 0$ su posición y velocidad son $\mathbf{r} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j}$. Demuestre que: (a) la magnitud de la velocidad es constante; (b) los vectores de velocidad y de aceleración son perpendiculares; (c) la magnitud de la aceleración es constante y señala hacia el origen; (d) la trayectoria del punto es un círculo con su centro en el origen.

Movimiento angular

Hemos visto que en algunos casos el movimiento curvilíneo de un punto se puede analizar usando coordenadas cartesianas. En las siguientes secciones describimos problemas que se pueden analizar más fácilmente con otros sistemas coordenados. En esta sección presentamos dos temas preliminares: el movimiento angular de una línea en un plano y la derivada respecto al tiempo de un vector unitario girando en un plano.

Movimiento angular de una línea Podemos especificar la posición angular de una línea L en un plano particular respecto a una línea de referencia L_0 en el plano por medio del ángulo θ (Fig. 2.18). La **velocidad angular** de L respecto a L_0 está definida por

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt},} \qquad (2.31)$$

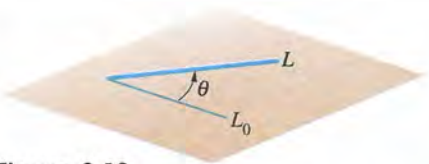


Figura 2.18
Línea L y línea de referencia L_0 en un plano.

y la **aceleración angular** de L respecto a L_0 por

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.} \tag{2.32}$$

Las dimensiones de la posición angular, la velocidad angular y la aceleración angular son radianes (rad), rad/s y rad/s^2 respectivamente. Aunque estas cantidades suelen expresarse en grados o revoluciones en vez de radianes, deben convertirse en radianes antes de usarlas en cálculos.

Observe la analogía entre las Ecs. (2.31) y (2.32) y las que relacionan la posición, la velocidad y la aceleración de un punto en una recta (Tabla 2.2). En cada caso la posición se especifica con una sola coordenada escalar, que puede ser positiva o negativa. (En la Fig. 2.18 la dirección antihoraria es positiva.) Como las ecuaciones son idénticas, los problemas que impliquen movimientos angulares de una línea se pueden analizar con los mismos métodos aplicados al movimiento en línea recta.

Tabla 2.2 Las ecuaciones que rigen el movimiento en línea recta y las ecuaciones que rigen el movimiento angular de una línea tienen forma idéntica.

Movimiento en línea recta	Movimiento angular
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

Rotación de un vector unitario Hemos visto que los vectores unitarios cartesianos **i**, **j** y **k** son constantes siempre que el sistema coordenado no gire. Sin embargo, en otros sistemas coordenados los vectores unitarios usados para describir el movimiento de un punto giran conforme se mueve el punto. Para obtener expresiones de la velocidad y la aceleración en tales sistemas coordenados, debemos conocer las derivadas respecto al tiempo de un vector unitario en rotación.

Podemos describir el movimiento angular de un vector unitario **e** en un plano como describimos el movimiento angular de una línea. La dirección de **e** respecto a una línea de referencia L_0 se especifica con el ángulo θ en la Fig. 2.19(a), y la razón de rotación de **e** respecto a L_0 se especifica con la velocidad angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

La derivada respecto al tiempo de **e** se define por

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{e}(t + \Delta t) - \mathbf{e}(t)}{\Delta t}.$$

La Fig. 2.19(b) muestra el vector **e** en el tiempo t y en el tiempo $t + \Delta t$. El cambio en **e** durante este intervalo es $\Delta\mathbf{e} = \mathbf{e}(t + \Delta t) - \mathbf{e}(t)$, y el ángulo

al cual gira **e** es $\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$. El triángulo de la Fig. 2.19(b) es isósceles, por lo que la magnitud de $\Delta\mathbf{e}$ es

$$|\Delta\mathbf{e}| = 2|\mathbf{e}| \operatorname{sen}(\Delta\theta/2) = 2 \operatorname{sen}(\Delta\theta/2).$$

Para escribir el vector $\Delta\mathbf{e}$ en términos de esta expresión, incluimos un vector unitario **n** que señala en la dirección de $\Delta\mathbf{e}$ (Fig. 2.19b):

$$\Delta\mathbf{e} = |\Delta\mathbf{e}|\mathbf{n} = 2 \operatorname{sen}(\Delta\theta/2)\mathbf{n}.$$

En términos de esta expresión, la derivada respecto al tiempo de **e** es

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{e}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\operatorname{sen}(\Delta\theta/2)\,\mathbf{n}}{\Delta t}.$$

Para evaluar este límite, lo escribimos en la forma

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\mathbf{n}.$$

En el límite, cuando Δt tiende a cero, sen $(\Delta\theta/2)/(\Delta\theta/2)$ es igual a 1, $\Delta\theta/\Delta t$ es igual a $d\theta/dt$, y el vector unitario **n** es perpendicular a $\mathbf{e}(t)$ (Fig. 2.19c). Por tanto, la derivada respecto al tiempo de **e** es

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{n} = \omega\mathbf{n}, \tag{2.33}$$

donde **n** es un vector unitario que es perpendicular a **e** y señala en la dirección positiva de θ (Fig. 2.19d). En las siguientes secciones usaremos este resultado al deducir expresiones para la velocidad y aceleración de un punto en diferentes sistemas coordenados.

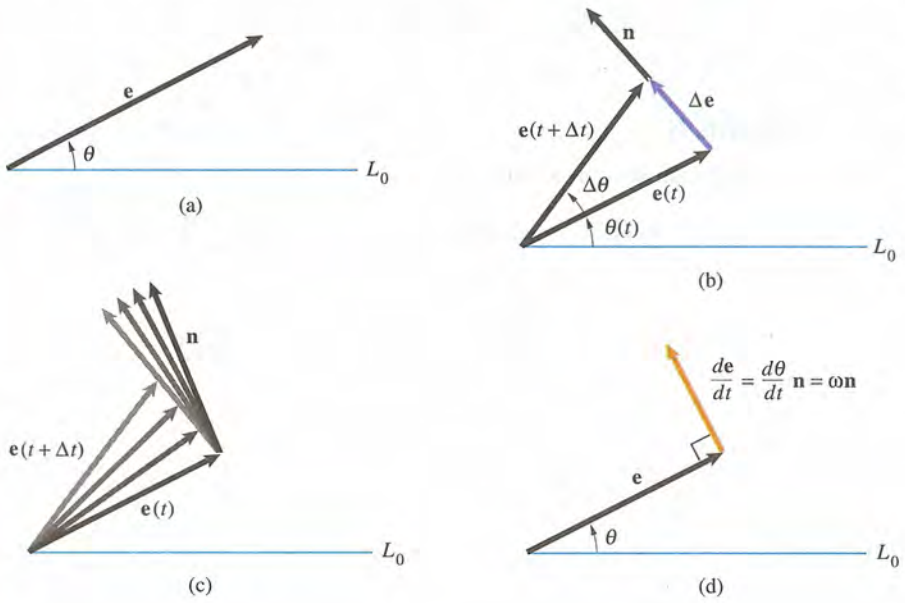


Figura 2.19
(a) Vector unitario **e** y línea de referencia L_0.
(b) El cambio $\Delta\mathbf{e}$ en **e** de t a $t + \Delta t$.
(c) Cuando Δt tiende a cero, **n** resulta perpendicular a $\mathbf{e}(t)$.
(d) Derivada de **e** respecto al tiempo.

Ejemplo 2.7

El rotor de un motor de reacción está girando a 10 000 rpm cuando se interrumpe el suministro de combustible. La aceleración resultante es $\alpha = -0.02\omega$, donde ω es la velocidad angular en rad/s.
(a) ¿Cuánto tarda el rotor en alcanzar 1000 rpm?
(b) ¿Cuántas revoluciones gira el rotor mientras desacelera a 1000 rpm?

ESTRATEGIA

Para analizar el movimiento angular del rotor, definimos una línea L fija al rotor y perpendicular a su eje (Fig. 2.20). Luego examinamos el movimiento de L respecto a la línea de referencia L_θ. La posición, velocidad y aceleración angulares de L definen el movimiento angular del rotor.

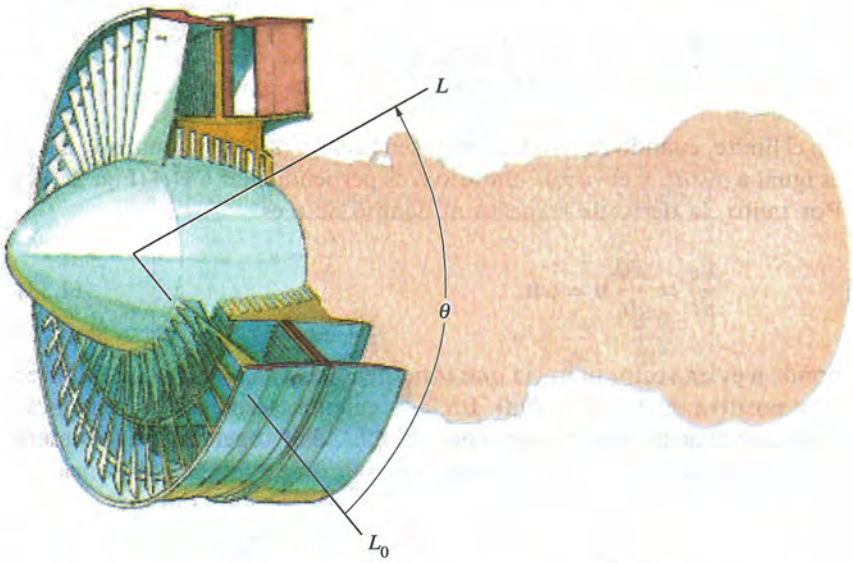


Figura 2.20
Línea L y línea de referencia L_0 que especifican la posición angular del rotor.

SOLUCIÓN

La conversión de rpm a rad/s es

$$1 \text{ rpm} = 1 \text{ revolución/min} \times \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ revolución}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)$$

$$= \pi/30 \text{ rad/s}.$$

(a) La aceleración angular es

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -0.02\omega.$$

Separando variables,

$$\frac{d\omega}{\omega} = -0.02dt,$$

e integramos, definiendo $t = 0$ como el tiempo en que se corta el combustible:

$$\int_{10\,000\pi/30}^{1000\pi/30} \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t -0.02\,dt.$$

Evaluando las integrales y despejando t obtenemos

$$t = \left(\frac{1}{0.02}\right) \ln\left(\frac{10\,000\pi/30}{1000\pi/30}\right) = 115.1 \text{ s}.$$

(b) Escribimos la aceleración angular como

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\omega = -0.02\omega,$$

separamos variables,

$$d\omega = -0.02\,d\theta,$$

e integramos, definiendo $\theta = 0$ como la posición angular en que se corta el combustible:

$$\int_{10\,000\pi/30}^{1000\pi/30} d\omega = \int_0^{\theta} -0.02\,d\theta.$$

Despejando θ obtenemos

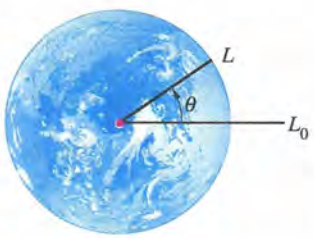
$$\theta = \left(\frac{1}{0.02}\right)[(10\,000\pi/30) - (1000\pi/30)]$$
$$= 15\,000\pi \text{ rad} = 7500 \text{ revoluciones}.$$

Problemas

2.85 ¿Cuáles son las magnitudes de las velocidades angulares (en rad/s) de la aguja horaria y la aguja minutera mostradas?

P2.85

2.86 En la Fig. P2.86, sea L una línea del centro de la Tierra a un punto fijo sobre el ecuador, y sea L_0 una línea de referencia de dirección fija. La figura muestra la Tierra vista desde arriba del polo norte.
(a) ¿Es $d\theta/dt$ positiva o negativa?
(b) ¿Cuál es la magnitud de $d\theta/dt$ en rad/s?

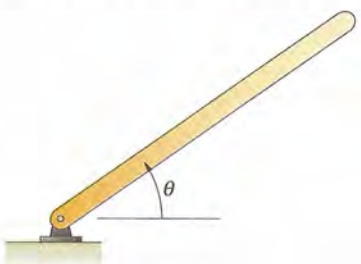


P2.86

2.87 El ángulo entre una línea L y una línea de referencia L_0 es $\theta = 2t^2$ rad.
(a) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración angulares de L respecto a L_0 en $t = 6$ s?
(b) ¿Cuántas revoluciones gira L respecto a L_0 durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 6$ s?

Estrategia: Use Ecs. (2.31) y (2.32) para determinar la velocidad y la aceleración angulares como funciones del tiempo.

2.88 En la Fig. P2.88, el ángulo θ entre la barra y la línea horizontal es $\theta = t^3 - 2t^2 + 4$ (grados). Determine la velocidad y la aceleración angulares de la barra en $t = 10$ s.



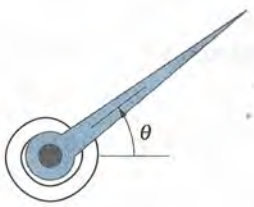
P2.88

2.89 La aceleración angular de una línea L respecto a una línea de referencia L_0 es $\alpha = 30 - 6t$ rad/s^2. Cuando $t = 0$, $\theta = 0$ y $\omega = 0$. ¿Cuál es la velocidad angular máxima de L respecto a L_0 durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 10$ s?

2.90 Una turbina de gas empieza a girar en $t = 0$ con aceleración angular $\alpha = 6t$ rad/s^2 durante 3 s y luego desacelera con $\alpha = -3$ rad/s^2 hasta que se detiene.
(a) ¿Qué velocidad angular máxima alcanza?
(b) ¿Cuál es el ángulo total que gira?

2.91 El rotor de un generador eléctrico está girando a 200 rpm cuando el motor se apaga. Debido a efectos de fricción, la desaceleración angular del rotor después de que se apaga el motor es $\alpha = -0.01\omega$ rad/s^2, donde ω es la velocidad angular en rad/s. ¿Cuántas revoluciones gira el rotor hasta que se detiene?

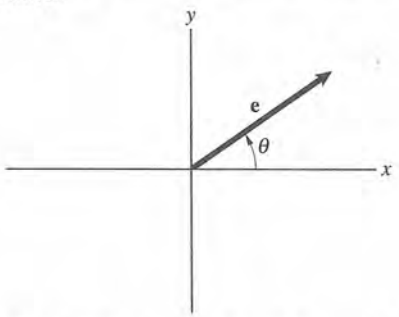
2.92 La aguja de un instrumento de medición está conectada a un resorte torsional que la somete a una aceleración angular $\alpha = -4\theta$ rad/s^2, donde θ es la posición angular de la aguja en radianes respecto a una dirección de referencia. Si la aguja se libera del reposo en $\theta = 1$ rad, ¿cuál es su velocidad angular en $\theta = 0$?



P2.92

2.93 El ángulo θ de la Fig. P2.93 mide la dirección del vector unitario **e** respecto al eje x. Si $\omega = d\theta/dt = 2$ rad/s, determine el vector $d\mathbf{e}/dt$: (a) cuando $\theta = 0$; (b) cuando $\theta = 90°$; (c) cuando $\theta = 180°$.

Estrategia: Use la Ec. (2.33) o exprese **e** en términos de sus componentes x y y, y derive respecto al tiempo.
its time derivative.



P2.93

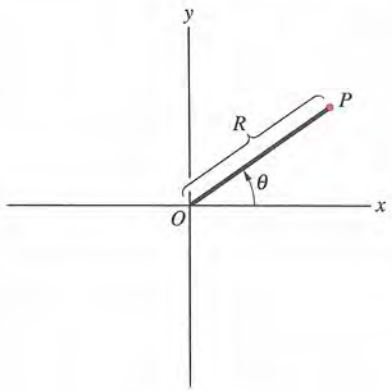
2.94 En el Prob. 2.93 suponga que el ángulo $\theta = 2t^2$ rad. ¿Cuál es el vector $d\mathbf{e}/dt$ en $t = 4$ s?

2.95 La línea OP tiene longitud constante R. El ángulo $\theta = \omega_0 t$, donde ω_0 es una constante.
(a) Use las relaciones

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}$$

para determinar la velocidad del punto P respecto a O.
(b) Use Ec. (2.33) para determinar la velocidad de P respecto a O, y vea que su resultado coincida con el de la parte (a).

Estrategia: En la parte (b), escriba el vector posición de P respecto a O como $\mathbf{r} = R\mathbf{e}$, donde $\mathbf{e}$ es un vector unitario que apunta de O a P.



P2.95

Componentes normal y tangencial

Al describir el movimiento curvilíneo especificamos la posición de un punto por su posición medida *a lo largo de su trayectoria*, y expresamos la velocidad y la aceleración en sus componentes tangencial y normal (perpendicular) a la trayectoria. Estas componentes son muy útiles cuando un punto se mueve en una trayectoria circular, y permiten observar el carácter de la velocidad y la aceleración en el movimiento curvilíneo.

Considere un punto P que sigue una trayectoria plana curvilínea (Fig. 2.21a). El vector de posición $\mathbf{r}$ especifica la posición de P respecto al punto de referencia O, y la coordenada s mide la posición de P respecto a un punto O' sobre su trayectoria. La velocidad de P respecto a O es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \tag{2.34}$$

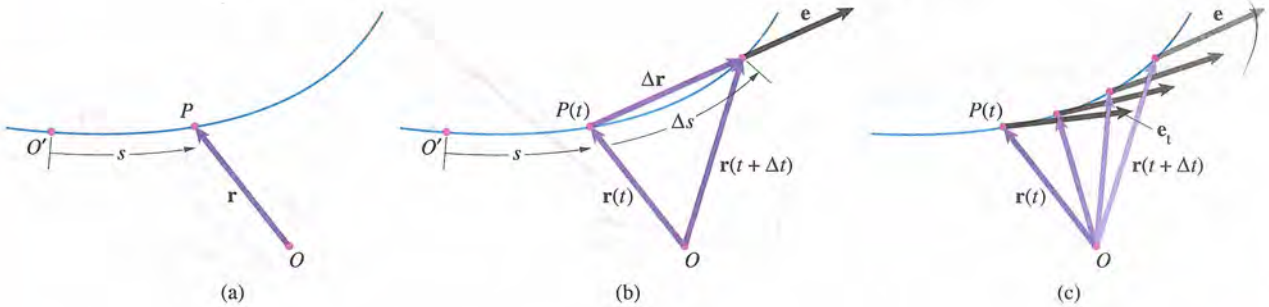
donde $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ (Fig. 2.21b). Denotamos con Δs la distancia recorrida entre t y $t + \Delta t$. Si se toma un vector unitario $\mathbf{e}$ definido apuntando en la dirección de $\Delta\mathbf{r}$, podemos escribir la Ec. (2.34) como

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \mathbf{e}.$$

Cuando Δt tiende a cero, $\Delta s/\Delta t$ se vuelve ds/dt y $\mathbf{e}$ es un vector unitario tangente a la trayectoria en la posición de P en el tiempo t, que denotamos con $\mathbf{e}_t$ (Fig. 2.21c):

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t = \frac{ds}{dt}\,\mathbf{e}_t. \tag{2.35}$$

Figura 2.21
(a) La posición de P a lo largo de su trayectoria se especifica con la coordenada s.
(b) Posición de P en el tiempo t y en el tiempo $t + \Delta t$.
(c) El límite de $\mathbf{e}$ cuando $\Delta t \to 0$ es un vector unitario tangente a la trayectoria.



La velocidad de un punto en movimiento curvilíneo es un vector cuya magnitud es igual a la razón de cambio de la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria y cuya dirección es tangente a ésta.

Para la aceleración de P, derivamos respecto al tiempo la Ec. (2.35):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}_t}{dt}. \tag{2.36}$$

Si la trayectoria no es una línea recta, el vector unitario $\mathbf{e}_t$ gira conforme P se mueve. En consecuencia, la derivada respecto al tiempo de $\mathbf{e}_t$ no es cero. En la sección anterior dedujimos una expresión para la derivada respecto al tiempo de un vector unitario en rotación en términos de la velocidad angular del vector unitario, Ec. (2.33). Para usar ese resultado, definimos el **ángulo de trayectoria** θ que especifica la dirección de $\mathbf{e}_t$ respecto a una línea de referencia (Fig. 2.22). Entonces, de la Ec. (2.33), la derivada respecto al tiempo de $\mathbf{e}_t$ es

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_n,$$

donde $\mathbf{e}_n$ es un vector unitario normal a $\mathbf{e}_t$ que apunta en la dirección positiva de θ si $d\theta/dt$ es positiva (Fig. 2.22). Sustituyendo esta expresión en la Ec. (2.36) obtenemos la aceleración de P:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_n. \tag{2.37}$$

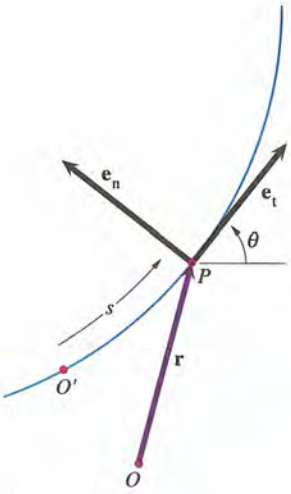
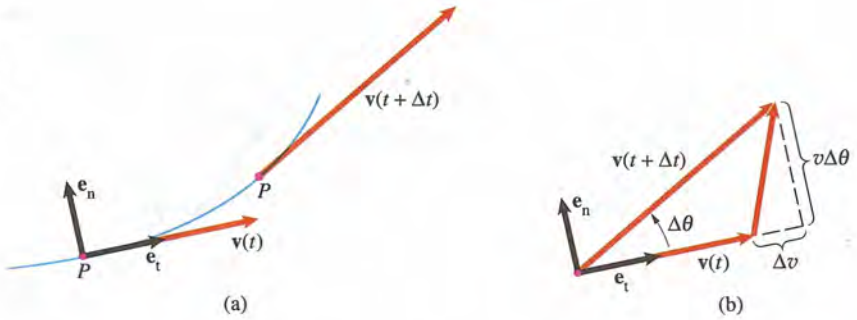


Figura 2.22
Ángulo θ de la trayectoria.

Podemos deducir este resultado de una manera menos rigurosa pero que aclara el significado de las componentes tangencial y normal de la aceleración. La Fig. 2.23(a) muestra la velocidad de P en los tiempos t y $t + \Delta t$. En la Fig. 2.23(b) se puede ver que el cambio en la velocidad, $\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$, consiste en dos componentes. La componente Δv, tangente a la trayectoria en el tiempo t, se debe al cambio en la *magnitud* de la velocidad. La componente $v\Delta\theta$, que es perpendicular a la trayectoria en el tiempo t, se debe al cambio de *dirección* del vector de velocidad. Así, el cambio en la velocidad es (aproximadamente)

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) = \Delta v\mathbf{e}_t + v\Delta\theta\mathbf{e}_n.$$

Figura 2.23
(a) Velocidad de P en t y en $t + \Delta t$.
(b) Componentes tangencial y normal del cambio en la velocidad.



Para obtener la aceleración dividimos esta expresión entre Δt y tomamos el límite cuando $\Delta t \to 0$:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta v}{\Delta t} \mathbf{e}_t + v \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \mathbf{e}_n \right]$$

$$= \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + v \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_n.$$

Así, obtuvimos de nuevo la Ec. (2.37). Pero, esta deducción señala claramente que la componente tangencial de la aceleración proviene de la razón de cambio de la magnitud de la velocidad, mientras que la componente normal proviene de la razón de cambio de la dirección del vector de velocidad. Si la trayectoria es una línea recta en el tiempo t, la componente normal de la aceleración es igual a cero porque $d\theta/dt$ es cero.

Podemos expresar la aceleración en otra forma que a menudo es más conveniente. La Fig. 2.24 muestra las posiciones sobre la trayectoria alcanzadas por P en los tiempos t y $t + dt$. Si la trayectoria es curva, las líneas rectas que se extiendan desde esos puntos perpendicularmente a la trayectoria se intersecarán como se muestra. La distancia ρ de la trayectoria al punto donde esas dos líneas se intersecan se llama **radio de curvatura instantáneo** de la trayectoria (si la trayectoria es circular, ρ es simplemente el radio de ella). El ángulo $d\theta$ es el cambio en el ángulo de la trayectoria, y ds es la distancia recorrida entre t y $t + \Delta t$. ρ está relacionada con ds por

$$ds = \rho \, d\theta.$$

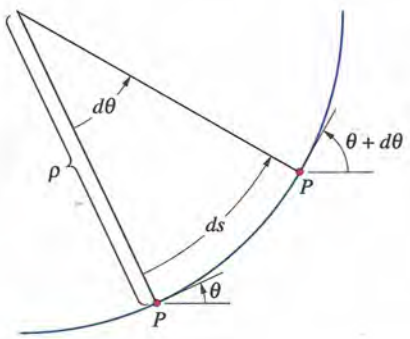


Figura 2.24
Radio de curvatura ρ instantáneo.

Dividiendo entre dt obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = v = \rho \frac{d\theta}{dt}.$$

Usando esta relación, podemos escribir la Ec. (2.37) como

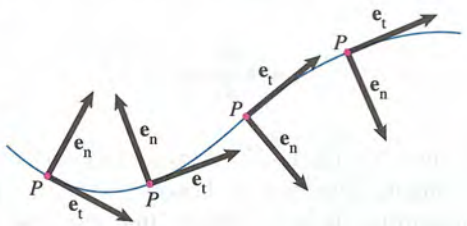
$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n.$$

Para un valor dado de v, la componente normal de la aceleración depende del radio de curvatura instantáneo. Cuanto mayor es la curvatura de la

trayectoria, mayor es la componente normal de la aceleración. Cuando la aceleración se expresa de esta manera, el vector unitario $\mathbf{e}_n$ debe definirse de manera que apunte hacia el lado *cóncavo* de la trayectoria (Fig. 2.25).

Figura 2.25

El vector unitario normal a la trayectoria apunta hacia el lado cóncavo de ésta.



Así, la velocidad y la aceleración en componentes normal y tangencial son (Fig. 2.26)

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t = \frac{ds}{dt}\mathbf{e}_t, \tag{2.38}$$

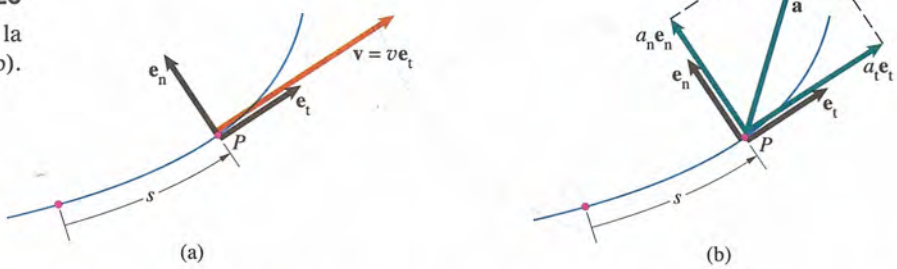
$$\mathbf{a} = a_t\,\mathbf{e}_t + a_n\,\mathbf{e}_n, \tag{2.39}$$

donde

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \qquad a_n = v\frac{d\theta}{dt} = \frac{v^2}{\rho}. \tag{2.40}$$

Figura 2.26

Componentes normal y tangencial de la velocidad (a) y la aceleración (b).

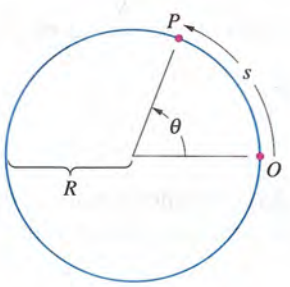


Movimiento circular Si un punto P se mueve en una trayectoria circular de radio R (Fig. 2.27), la distancia s está relacionada con el ángulo θ por

$$s = R\theta. \qquad \textbf{Trayectoria circular}$$

Figura 2.27

Punto moviéndose en una trayectoria circular.



Esta relación significa que podemos especificar la posición de P a lo largo de la trayectoria circular por medio de s o θ. Derivando respecto al tiempo esta ecuación, obtenemos una relación entre $v = ds/dt$ y la velocidad angular de la línea que va del centro de la trayectoria a P:

$$v = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega. \qquad \text{Trayectoria circular} \tag{2.41}$$

Derivando de nuevo, obtenemos una relación entre la componente tangencial de la aceleración $a_t = dv/dt$ y la aceleración angular:

$$a_t = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha. \qquad \text{Trayectoria circular} \tag{2.42}$$

Para la trayectoria circular, el radio de curvatura instantáneo $\rho = R$, por lo que la componente normal de la aceleración es

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2. \qquad \text{Trayectoria circular} \tag{2.43}$$

Como los problemas que implican movimiento circular son comunes, vale la pena recordar estas expresiones. Tenga cuidado de usarlas *sólo* cuando la trayectoria sea circular.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de las Ecs. (2.38) y (2.39) para analizar los movimientos curvilíneos de los cuerpos. Como las ecuaciones que relacionan s, v y la componente tangencial de la aceleración,

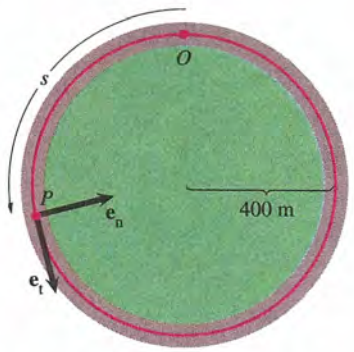
$$v = \frac{ds}{dt},$$

$$a_t = \frac{dv}{dt},$$

tienen una forma idéntica a la de las ecuaciones que rigen el movimiento de un punto a lo largo de una línea recta, en algunos casos se pueden resolver usando los mismos métodos aplicables al movimiento en línea recta.

Ejemplo 2.8

Figura 2.28



(a) La coordenada s mide la distancia a lo largo de la pista.

La motocicleta de la Fig. 2.28 parte del reposo en $t = 0$ sobre una pista circular de 400 m de radio. La componente tangencial de su aceleración es $a_t = 2 + 0.2t$ m/s^2. En $t = 10$ s determine: (a) la distancia que ha recorrido a lo largo de la pista; (b) la magnitud de su aceleración.

ESTRATEGIA

Sea s la distancia desde la posición inicial O de la motocicleta a su posición en el tiempo t (Fig. a). Conociendo la aceleración tangencial en función del tiempo, podemos integrar para determinar v y s como funciones del tiempo.

SOLUCIÓN

(a) La aceleración tangencial es

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2 + 0.2t \text{ m/s}^2.$$

Integrando,

$$\int_0^v dv = \int_0^t (2 + 0.2t)\, dt,$$

obtenemos v en función del tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2t + 0.1t^2 \text{ m/s}.$$

Integrando esta ecuación,

$$\int_0^s ds = \int_0^t (2t + 0.1t^2)\, dt,$$

la coordenada s en función del tiempo es

$$s = t^2 + \frac{0.1}{3}t^3 \text{ m}.$$

En $t = 10$ s, la distancia recorrida a lo largo de la pista es

$$s = (10)^2 + \frac{0.1}{3}(10)^3 = 133.3 \text{ m}.$$

(b) En $t = 10$ s, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_t = 2 + 0.2(10) = 4 \text{ m/s}^2.$$

También debemos determinar la componente normal de la aceleración. El radio de curvatura instantáneo de la trayectoria es el radio de la pista circular, $\rho = 400$ m. La magnitud de la velocidad en $t = 10$ s es

$$v = 2(10) + 0.1(10)^2 = 30 \text{ m/s}.$$

Por tanto,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(30)^2}{400} = 2.25 \text{ m/s}^2.$$

La magnitud de la aceleración en $t = 10$ s es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(4)^2 + (2.25)^2} = 4.59 \text{ m/s}^2.$$

Ejemplo 2.9

Un satélite está en órbita circular de radio R alrededor de la Tierra. ¿Cuál es su velocidad?

ESTRATEGIA

La aceleración debida a la gravedad a una distancia R del centro de la Tierra es gR_E^2/R^2, donde R_E es el radio de la Tierra. Usando esta expresión junto con la ecuación para la aceleración en términos de sus componentes normal y tangencial, podemos obtener una ecuación para la velocidad del satélite.

SOLUCIÓN

En componentes normal y tangencial (Fig. 2.29), la aceleración del satélite es

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R}\mathbf{e}_n.$$

Esta expresión debe ser igual a la aceleración de la gravedad hacia el centro de la Tierra:

$$\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R}\mathbf{e}_n = \frac{gR_E^2}{R^2}\mathbf{e}_n.$$

Como no hay componente $\mathbf{e}_t$ en el lado derecho, concluimos que la magnitud de la velocidad del satélite es constante:

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Igualando las componentes $\mathbf{e}_n$ y despejando v obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{gR_E^2}{R}}.$$

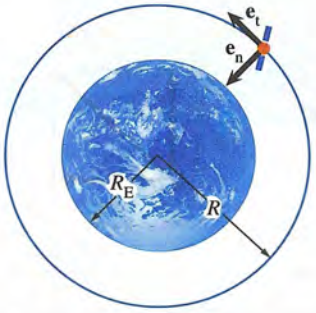


Figura 2.29
Descripción del movimiento del satélite en términos de las componentes normal y tangencial.

COMENTARIO

En el Ej. 2.5 determinamos la velocidad de escape de un cuerpo que viaja en línea recta alejándose de la Tierra, en términos de su distancia inicial desde el centro de la Tierra. La velocidad de escape de un cuerpo a una distancia R del centro de la Tierra, $v_{esc} = \sqrt{2gR_E^2/R}$, es sólo $\sqrt{2}$ veces la velocidad de un cuerpo en una órbita circular de radio R. Esto explica por qué fue posible empezar a lanzar sondas a otros planetas poco después de que se pusieron en órbita los primeros satélites.

Ejemplo 2.10

Durante un vuelo en que un helicóptero parte del reposo en $t = 0$, las componentes cartesianas de su aceleración son

$$a_x = 0.6t \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = 1.8 - 0.36t \text{ m/s}^2.$$

¿Cuáles son las componentes normal y tangencial de su aceleración y el radio de curvatura instantáneo de su trayectoria en $t = 4$ s?

ESTRATEGIA

Podemos integrar las componentes cartesianas de la aceleración para determinar las componentes cartesianas de la velocidad en $t = 4$ s. El vector de velocidad es tangente a la trayectoria, por lo que el conocimiento de las componentes cartesianas de la velocidad nos permite determinar el ángulo de la trayectoria.

SOLUCIÓN

Integrando las componentes de la aceleración respecto al tiempo (véase el Ej. 2.6), las componentes cartesianas de la velocidad son

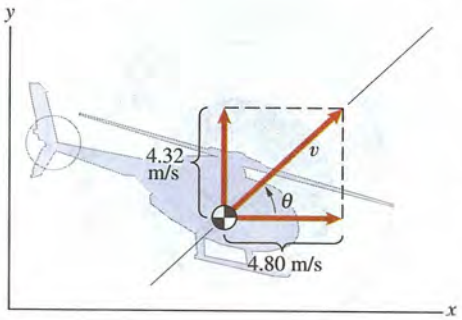
$$v_x = 0.3t^2 \text{ m/s},$$

$$v_y = 1.8t - 0.18t^2 \text{ m/s}.$$

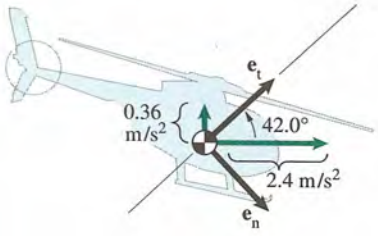
En $t = 4$ s, $v_x = 4.80$ m/s y $v_y = 4.32$ m/s. Por tanto, el ángulo de la trayectoria (Fig. a) es

$$\theta = \arctan\left(\frac{4.32}{4.80}\right) = 42.0°.$$

Figura 2.30



(a) Componentes cartesianas de la velocidad y ángulo θ de la trayectoria.



(b) Determinación de las componentes tangencial y normal de la aceleración a partir de las componentes cartesianas.

Las componentes cartesianas de la aceleración en $t = 4$ s son

$$a_x = 0.6(4) = 2.4 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = 1.8 - 0.36(4) = 0.36 \text{ m/s}^2.$$

Calculando las componentes de esas aceleraciones en las direcciones tangencial y normal a la trayectoria (Fig. b), obtenemos a_t y a_n:

$$a_t = (2.4) \cos 42.0° + (0.36) \text{ sen } 42.0° = 2.02 \text{ m/s}^2,$$

$$a_n = (2.4) \text{ sen } 42.0° - (0.36) \cos 42.0° = 1.34 \text{ m/s}^2.$$

Para determinar el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria, usamos la relación $a_n = v^2/\rho$. La magnitud de la velocidad en $t = 4$ s es

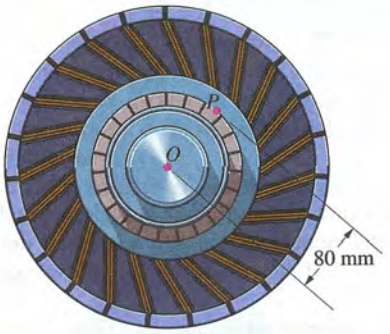
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(4.80)^2 + (4.32)^2} = 6.46 \text{ m/s},$$

por lo que el valor de ρ en $t = 4$ s es

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(6.46)^2}{1.34} = 31.2 \text{ m}.$$

Problemas

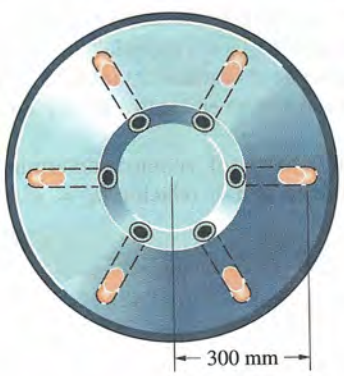
2.96 La armadura de un motor eléctrico gira a razón constante. La magnitud de la velocidad del punto P respecto a O es 4 m/s.
(a) ¿Cuáles son las componentes normal y tangencial de la aceleración de P respecto a O?
(b) ¿Cuál es la velocidad angular de la armadura?



P2.96

2.97 La armadura del Prob. 2.96 parte del reposo y tiene una aceleración angular constante $\alpha = 10$ rad/s^2. ¿Cuál es la velocidad y la aceleración de P respecto a O en términos de las componentes radial y tangencial después de 10 s?

2.98 Las centrífugas se usan en los laboratorios médicos para aumentar la velocidad de precipitación de la materia sólida presente en soluciones. Suponga que se quiere diseñar una centrífuga para someter muestras a aceleraciones de 1000 g.
(a) Si la distancia del centro de la centrífuga a la muestra es de 300 mm, ¿qué velocidad de rotación en rpm se necesita?
(b) Si se quiere que la centrífuga alcance sus rpm de diseño en 1 min, ¿qué aceleración angular constante se necesita?

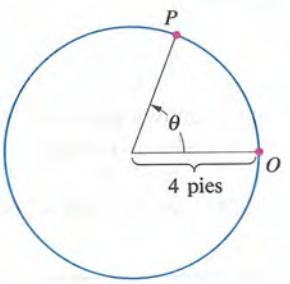


P2.98

2.99 Una lancha de motor parte del reposo y es conducida en una trayectoria circular de 40 pies de radio. La magnitud de su velocidad aumenta a una razón constante de 2 pie/s^2. En términos de las componentes normal y tangencial, determine: (a) la velocidad en función del tiempo; (b) la aceleración en función del tiempo.

P2.99

2.100 Se tiene el ángulo $\theta = 2t^2$ rad.
(a) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad y de la aceleración de P respecto a O en $t = 1$ s?
(b) ¿Qué distancia a lo largo de la trayectoria circular recorre P entre $t = 0$ y $t = 1$ s?



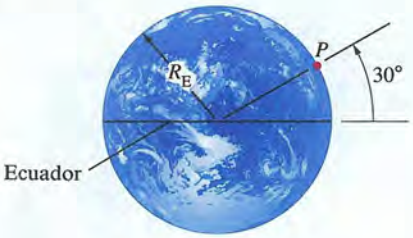
P2.100

2.101 En el Prob. 2.100, ¿cuál es la magnitud de la velocidad y de la aceleración de P respecto a O cuando P ha efectuado una revolución en la trayectoria circular comenzando en $t = 0$?

2.102 El radio de la Tierra es de 3960 millas. Si usted está de pie en el ecuador, ¿cuál es la magnitud de su velocidad respecto al centro de la Tierra?

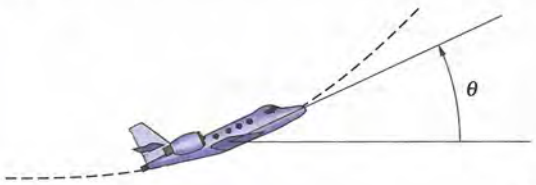
2.103 El radio de la Tierra es de 6370 km. Si usted está de pie en el ecuador, ¿cuál es la magnitud de su aceleración respecto al centro de la Tierra?

2.104 Suponga que usted está de pie en un punto P a 30° de latitud norte (es decir, en un punto a 30° al norte del ecuador). El radio de la Tierra es $R_E = 3960$ millas. ¿Cuáles son las magnitudes de su velocidad y aceleración respecto al centro de la Tierra?



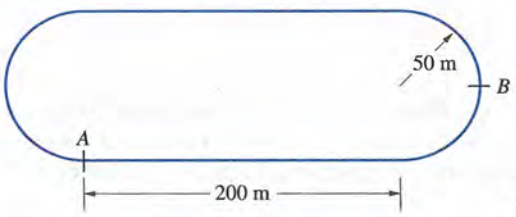
P2.104

2.105 La magnitud de la velocidad del avión mostrado es constante e igual a 400 m/s. La razón de cambio del ángulo θ de su trayectoria es constante e igual a 5°/s.
(a) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración del avión en términos de componentes normal y tangencial?
(b) ¿Cuál es el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria del avión?



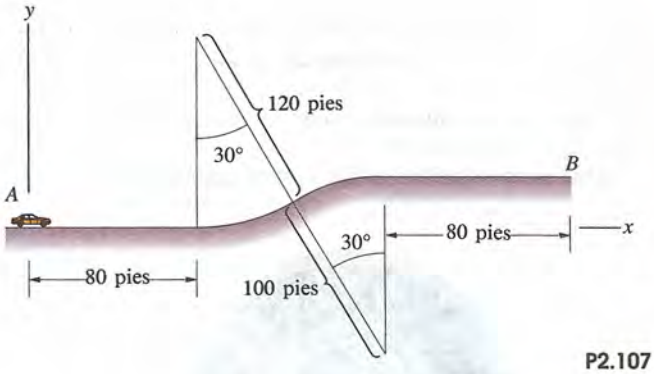
P2.105

2.106 En $t = 0$, un automóvil parte del reposo en el punto A. Se mueve hacia la derecha y la componente tangencial de su aceleración es $a_t = 0.4t$ m/s^2. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración del automóvil cuando llega al punto B?



P2.106

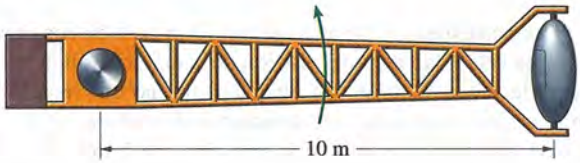
2.107 Un automóvil incrementa su velocidad a una razón constante de 40 mi/h en A a 60 mi/h en B. ¿Cuál es la magnitud de su aceleración 2 s después de que pasa por el punto A?



P2.107

2.108 Determine la magnitud de la aceleración del automóvil del Prob. 2.107 cuando ha viajado a lo largo del camino una distancia (a) de 120 pies desde A; (b) de 160 pies desde A.

2.109 Un aspirante a astronauta va a someterse a una prueba en una centrífuga con radio de 10 m. El perderá la conciencia si su aceleración horizontal total llega a 14 g. ¿Cuál debe ser la aceleración angular constante máxima de la centrífuga, partiendo de cero, para que esta persona no pierda la conciencia en el primer minuto?



P2.109

2.110 Un proyectil tiene una velocidad inicial de 20 pie/s a 30° sobre la horizontal.
(a) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración del proyectil en términos de las componentes normal y tangencial cuando está en el punto más alto de su trayectoria?
(b) ¿Cuál es el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria del proyectil cuando éste se encuentra en el punto más alto de su trayectoria?

Estrategia: En la parte (b), se puede determinar el radio de curvatura instantáneo con la relación $a_n = v^2/\rho$.

P2.110

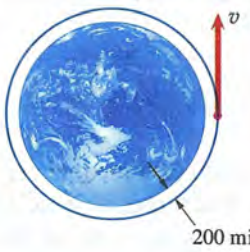
2.111 En el Prob. 2.110, sea $t = 0$ el instante en el que se dispara el proyectil.
(a) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración en términos de las componentes normal y tangencial en $t = 0.2$ s?
(b) ¿Cuál es el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria en $t = 0.2$ s?

2.112 Las coordenadas cartesianas de un punto que se mueve en el plano x-y son

$$x = 20 + 4t^2 \text{ m}, \quad y = 10 - t^3 \text{ m}.$$

¿Cuál es el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria en $t = 3$ s?

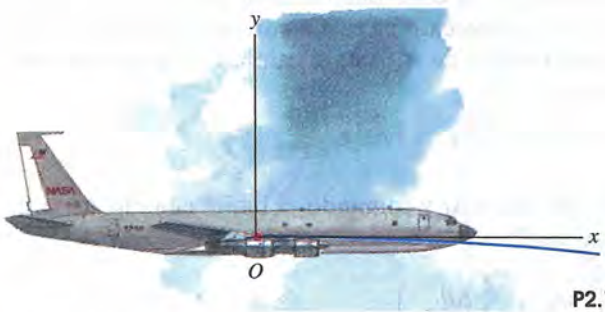
2.113 Un satélite se encuentra en una órbita circular a 200 mi sobre la superficie de la Tierra, cuyo radio es de 3960 mi.
(a) ¿Cuál es la magnitud v de la velocidad del satélite respecto al centro de la Tierra?
(b) ¿Cuánto tarda el satélite en completar una órbita?



P2.113

2.114 Para el entrenamiento de astronautas, el avión mostrado debe alcanzar la "ingravidez" por un corto periodo de tiempo volando a lo largo de una trayectoria tal que su aceleración sea $a_x = 0$, $a_y = -g$. Si su velocidad en O en $t = 0$ es $\mathbf{v} = v_0\mathbf{i}$, demuestre que el piloto automático debe volar el avión de manera que su componente tangencial de aceleración en función del tiempo sea

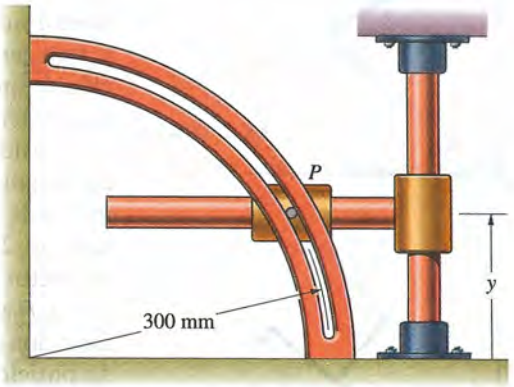
$$a_t = g\frac{(gt/v_0)}{\sqrt{1 + (gt/v_0)^2}}.$$



P2.114

2.115 En el Prob. 2.114, ¿cuál es la componente normal de aceleración del avión en función del tiempo?

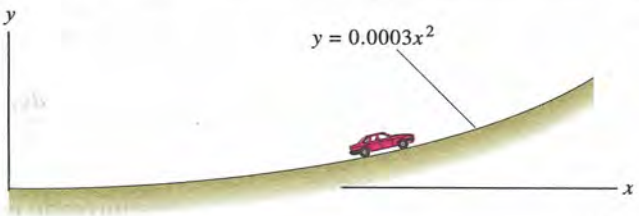
2.116 Si $y = 100$ mm, $dy/dt = 200$ mm/s y $d^2y/dt^2 = 0$, ¿cuáles son la velocidad y la aceleración de P en términos de las componentes normal y tangencial?



P2.116

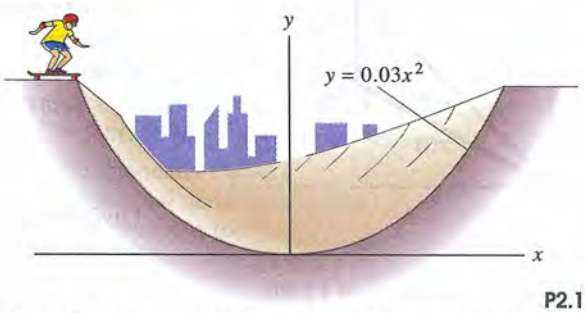
2.117 Suponga que el punto P del Prob. 2.116 se mueve hacia arriba por la ranura con velocidad $\mathbf{v} = 300\,\mathbf{e}_t$ mm/s. Cuando $y = 150$ mm, ¿qué valor tienen dy/dt y d^2y/dt^2?

2.118 Un auto viaja a 100 km/h cuesta arriba por un camino recto cuyo perfil vertical se puede aproximar con la ecuación mostrada. Cuando la coordenada horizontal del auto es $x = 400$ m, ¿cuáles son las componentes de su aceleración?



P2.118

2.119 Un joven patina sobre la superficie de concreto de un canal vacío descrito por la ecuación mostrada. El joven parte de $y = 20$ pie y la magnitud de su velocidad está dada por $v = \sqrt{2(32.2)(20 - y)}$ pie/s. ¿Cuáles son las componentes normal y tangencial de su aceleración cuando llega al fondo?



P2.119

2.120 En el Prob. 2.119, ¿cuáles son las componentes normal y tangencial de la aceleración del joven cuando ha pasado por el fondo y alcanza la posición $y = 10$pies?

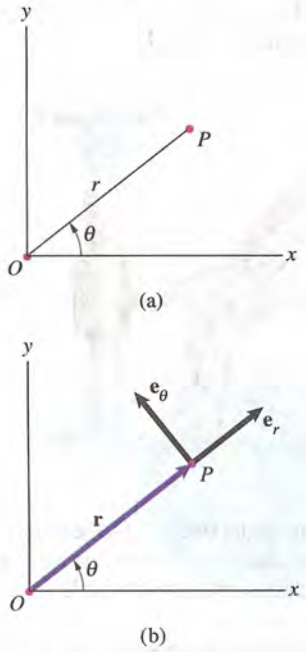


Figura 2.31

(a) Coordenadas polares de P.
(b) Vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$, y vector de posición $\mathbf{r}$.

Coordenadas polares y cilíndricas

Las coordenadas polares suelen usarse para describir el movimiento curvilíneo de un punto. El movimiento circular, los problemas de ciertas órbitas y, más generalmente, los problemas de **fuerza central**, en los que la aceleración de un punto se dirige hacia un punto dado, pueden expresarse convenientemente en coordenadas polares.

Consideremos un punto P en el plano x-y de un sistema coordenado cartesiano. Podemos especificar la posición de P respecto al origen O por medio de sus coordenadas cartesianas x, y o por sus coordenadas polares, r, θ (Fig. 2.31a). Para expresar vectores en coordenadas polares, definimos un vector unitario $\mathbf{e}_r$ que señale en la dirección de la línea radial del origen a P y un vector unitario $\mathbf{e}_\theta$ perpendicular a $\mathbf{e}_r$ y que apunte en la dirección creciente de θ (Fig. 2.31b). En términos de esos vectores, el vector de posición $\mathbf{r}$ de O a P es

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r. \tag{2.44}$$

(Observe que $\mathbf{r}$ no tiene componente en la dirección de $\mathbf{e}_\theta$.)

Podemos determinar la velocidad de P en coordenadas polares derivando respecto al tiempo la Ec. (2.44):

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}. \tag{2.45}$$

Cuando P se mueve en una trayectoria curvilínea, el vector unitario $\mathbf{e}_r$ gira con velocidad angular $\omega = d\theta/dt$. Por tanto, de la Ec. (2.33), la derivada respecto al tiempo de $\mathbf{e}_r$ en términos de $\mathbf{e}_\theta$ se puede expresar como

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta. \tag{2.46}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (2.45) obtenemos la velocidad de P:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\omega\mathbf{e}_\theta. \tag{2.47}$$

Podemos obtener el resultado de un modo menos riguroso, pero más directo e intuitivo. La Fig. 2.32 muestra el vector de posición de P en los tiempos t y $t + \Delta t$. El cambio en el vector de posición, $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$, consiste en dos componentes. La componente Δr se debe al cambio en la posición radial r y tiene la dirección de $\mathbf{e}_r$. La componente $r\,\Delta\theta$ debida al cambio en θ tiene la dirección de $\mathbf{e}_\theta$. Así, el cambio en la posición de P es (aproximadamente)

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \Delta r\,\mathbf{e}_r + r\,\Delta\theta\,\mathbf{e}_\theta.$$

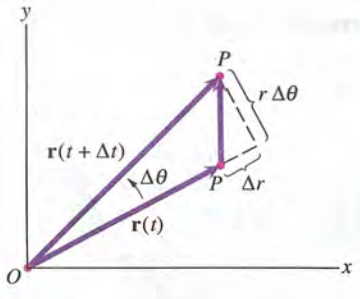


Figura 2.32

Vector de posición de P en t y en $t + \Delta t$.

Dividiendo esta expresión entre Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, se obtiene la velocidad de P:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta r}{\Delta t}\mathbf{e}_r + r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\mathbf{e}_\theta\right]$$

$$= \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\omega\mathbf{e}_\theta.$$

Una componente de la velocidad está en la dirección radial y es igual a la razón de cambio de la posición radial r. La otra componente es normal, o *transversal* a la dirección radial, y es proporcional a la distancia radial y a la razón de cambio de θ.

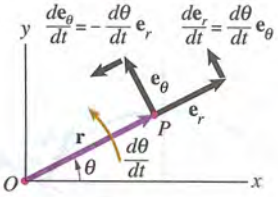


Figura 2.33
Derivadas respecto al tiempo de $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$.

Tenemos la aceleración de P derivando respecto al tiempo Ec. (2.47):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}. \tag{2.48}$$

La derivada respecto al tiempo del vector unitario $\mathbf{e}_r$ debido a la razón de cambio de θ está dada por la Ec. (2.46). Cuando P se mueve, $\mathbf{e}_\theta$ también gira con velocidad angular $d\theta/dt$ (Fig. 2.33). En esta figura se puede ver que la derivada respecto al tiempo de $\mathbf{e}_\theta$ tiene la dirección $-\mathbf{e}_r$ si $d\theta/dt$ es positiva:

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_r.$$

Sustituyendo esta expresión y la Ec. (2.46) en la Ec. (2.48), obtenemos la aceleración de P:

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{e}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\mathbf{e}_\theta.$$

Así, la velocidad y la aceleración son (Fig. 2.34)

$$\boxed{\mathbf{v} = v_r\,\mathbf{e}_r + v_\theta\,\mathbf{e}_\theta = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\omega\,\mathbf{e}_\theta} \tag{2.49}$$

y

$$\boxed{\mathbf{a} = a_r\,\mathbf{e}_r + a_\theta\,\mathbf{e}_\theta,} \tag{2.50}$$

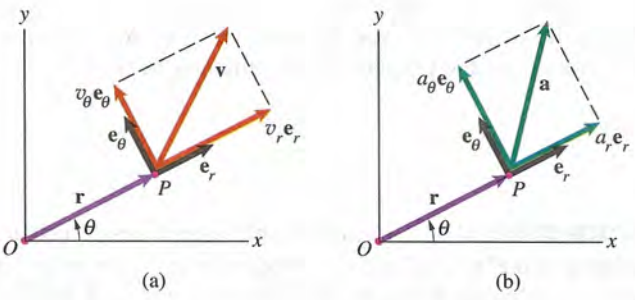


Figura 2.34
Componentes radial y transversal de la velocidad (a) y la aceleración (b).

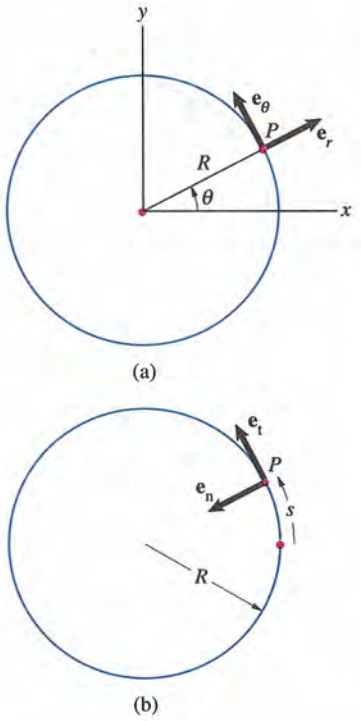


Figura 2.35

Punto P moviéndose en una trayectoria circular.
(a) Coordenadas polares.
(b) Componentes normal y tangencial.

donde

$$\boxed{a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2,}$$

$$\boxed{a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = r\alpha + 2\frac{dr}{dt}\omega.} \qquad (2.51)$$

El término $-r\omega^2$ en la componente radial de la aceleración se llama **aceleración centrípeta,** y el término $2(dr/dt)\omega$ en la componente transversal se llama **aceleración de Coriolis.**

Movimiento circular El movimiento circular puede describirse usando las componentes radial y transversal o las componentes normal y tangencial. Comparemos esos dos métodos de expresar la velocidad y la aceleración de un punto P que se mueve en una trayectoria circular de radio R (Fig. 2.35). Como la coordenada polar $r = R$ es constante, la Ec. (2.49) para la velocidad se reduce a

$$\mathbf{v} = R\omega\,\mathbf{e}_\theta.$$

En términos de las componentes normal y tangencial, la velocidad es

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t.$$

Observe en la Fig. 2.35 que $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_t$. Comparando esas dos expresiones para la velocidad obtenemos la relación entre la velocidad y la velocidad angular en el movimiento circular:

$$v = R\omega.$$

De las Ecs. (2.50) y (2.51), la aceleración en coordenadas polares para una trayectoria circular de radio R es

$$\mathbf{a} = -R\omega^2\,\mathbf{e}_r + R\alpha\,\mathbf{e}_\theta,$$

y la aceleración en términos de las componentes normal y tangencial es

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R}\mathbf{e}_n.$$

El vector unitario $\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_n$. Debido a la relación $v = R\omega$, las componentes normales de la aceleración son iguales: $v^2/R = R\omega^2$. Igualando las componentes transversal y tangencial, obtenemos la relación

$$\frac{dv}{dt} = a_t = R\alpha.$$

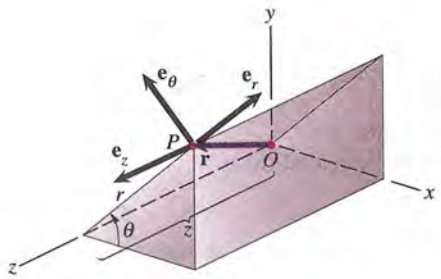


Figura 2.36

Coordenadas cilíndricas r, θ, z del punto P y vectores unitarios $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$.

Coordenadas cilíndricas Las coordenadas polares describen el movimiento de un punto P en el plano x-y. Podemos describir el movimiento tridimensional usando **coordenadas cilíndricas** r, θ, z (Fig. 2.36). Las coordenadas cilíndricas r y θ son las coordenadas polares de P medidas en el

plano paralelo al plano x-y, y las definiciones de los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ no cambian. La posición de P perpendicular al plano x-y se mide con la coordenada z, y el vector unitario $\mathbf{e}_z$ apunta en la dirección positiva del eje z.

El vector de posición $\mathbf{r}$ en coordenadas cilíndricas es la suma de la expresión para el vector de posición en coordenadas polares y la componente z:

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r + z\,\mathbf{e}_z \tag{2.52}$$

(La coordenada polar r no es igual a la magnitud de $\mathbf{r}$ excepto cuando P se encuentra en el plano x-y.) Derivando obtenemos la velocidad,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= v_r\,\mathbf{e}_r + v_\theta\,\mathbf{e}_\theta + v_z\,\mathbf{e}_z \\ &= \frac{dr}{dt}\,\mathbf{e}_r + r\omega\,\mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{e}_z,\end{aligned} \tag{2.53}$$

y la aceleración,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_r\,\mathbf{e}_r + a_\theta\,\mathbf{e}_\theta + a_z\,\mathbf{e}_z, \tag{2.54}$$

donde

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2, \qquad a_\theta = r\alpha + 2\frac{dr}{dt}\omega, \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{2.55}$$

Observe que las Ecs. (2.53) y (2.54) se reducen a las expresiones en coordenadas polares para la velocidad y aceleración, Ecs. (2.49) y (2.50), cuando P se mueve a lo largo de una trayectoria en el plano x-y.

Los siguientes dos ejemplos muestran el uso de las Ecs. (2.49) y (2.50) para analizar movimientos curvilíneos de cuerpos en coordenadas polares.

Ejemplo 2.11

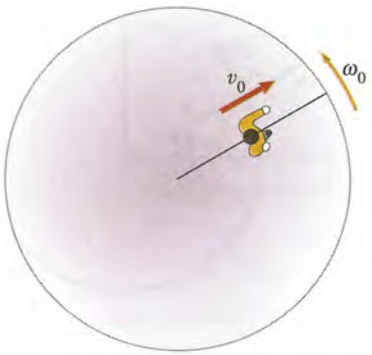


Figura 2.37

Suponga que está usted de pie sobre un gran disco (un tiovivo) que gira con velocidad angular constante ω_0, y usted empieza a caminar con rapidez constante v_0 a lo largo de una línea recta radial pintada sobre el disco (Fig. 2.37). ¿Cuáles son su velocidad y aceleración cuando se encuentre a una distancia r del centro del disco?

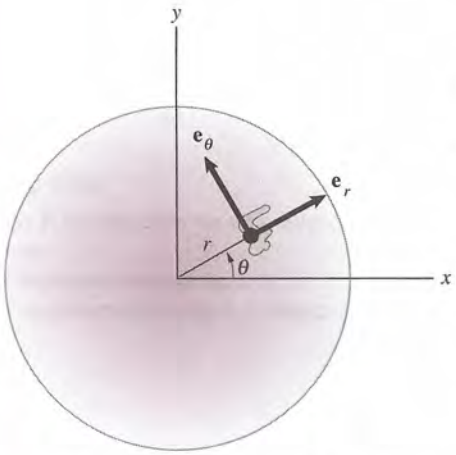
ESTRATEGIA

Podemos describir su movimiento en coordenadas polares (Fig. a). Usando la información dada acerca de su movimiento y el movimiento del disco, podemos evaluar los términos en las expresiones para la velocidad y la aceleración en coordenadas polares.

SOLUCIÓN

La rapidez con que usted camina a lo largo de la línea radial es la razón de cambio de r, $dr/dt = v_0$, y la velocidad angular del disco es la razón de cambio de θ, $\omega = \omega_0$. Su velocidad es

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{e}_r + r\omega\,\mathbf{e}_\theta = v_0\mathbf{e}_r + r\omega_0\mathbf{e}_\theta.$$



(a) Su posición en coordenadas polares.

Su velocidad consiste en dos componentes: la componente radial debida a la rapidez con que usted va caminando, y una componente transversal debida a la razón de rotación del disco. La componente transversal se incrementa conforme aumenta su distancia desde el centro del disco.

Su rapidez al caminar $v_0 = dr/dt$ es constante, por lo que $d^2r/dt^2 = 0$. La velocidad angular del disco, $\omega_0 = d\theta/dt$, también es constante, por lo que $d^2\theta/dt^2 = 0$. La componente radial de su aceleración es

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = -r\omega_0^2,$$

y la componente transversal es

$$a_\theta = r\alpha + 2\frac{dr}{dt}\omega = 2v_0\omega_0.$$

COMENTARIO

Si usted ha tratado alguna vez de caminar sobre un tiovivo, sabrá que no es fácil. Este ejemplo indica por qué: subjetivamente, usted va caminando a lo largo de una línea recta con velocidad constante, pero en realidad usted experimenta, debido a la rotación del disco, la aceleración centrípeta a_r y la aceleración a_θ de Coriolis.

Ejemplo 2.12

En la Fig. 2.38 el brazo del robot está programado de manera que el punto P describa la trayectoria

$$r = 1 - 0.5 \cos 2\pi t \text{ m},$$

$$\theta = 0.5 - 0.2 \operatorname{sen} 2\pi t \text{ rad}.$$

En $t = 0.8$ s, determine: (a) la velocidad de P en términos de las componentes radial y transversal; (b) las componentes cartesianas de la velocidad de P.

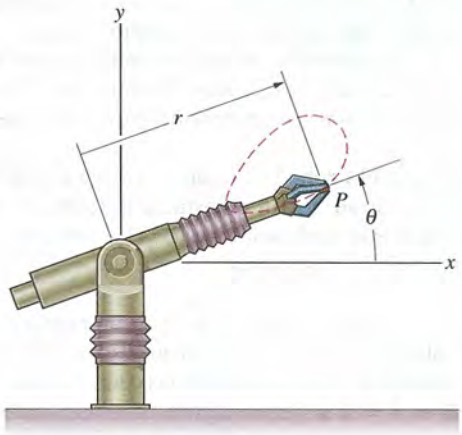


Figura 2.38

ESTRATEGIA

(a) Como r y θ están dadas en función del tiempo, podemos calcular las derivadas en la expresión para la velocidad en coordenadas polares y obtener la velocidad en función del tiempo.
(b) Con el valor de θ en $t = 0.8$ s, usamos la trigonometría para hallar las componentes cartesianas en términos de la radial y la transversal.

SOLUCIÓN

(a) De la Ec. (2.49), la velocidad es

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta$$

$$= (\pi \operatorname{sen} 2\pi t)\,\mathbf{e}_r + (1 - 0.5\cos 2\pi t)(-0.4\pi \cos 2\pi t)\,\mathbf{e}_\theta.$$

En $t = 0.8$ s,

$$\mathbf{v} = -2.99\,\mathbf{e}_r - 0.328\,\mathbf{e}_\theta \text{ (m/s)}.$$

(b) En $t = 0.8$ s, $\theta = 0.690$ rad $= 39.5°$ (Fig. a). La componente x de la velocidad de P es

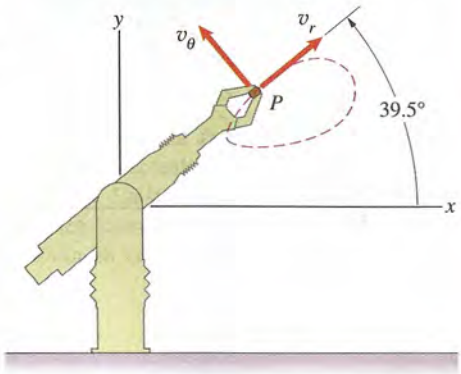
$$v_x = v_r \cos 39.5° - v_\theta \operatorname{sen} 39.5°$$

$$= (-2.99)\cos 39.5° - (-0.328)\operatorname{sen} 39.5° = -2.09 \text{ m/s}.$$

y la componente y es

$$v_y = v_r \operatorname{sen} 39.5° + v_\theta \cos 39.5°$$

$$= (-2.99)\operatorname{sen} 39.5° + (-0.328)\cos 39.5° = -2.16 \text{ m/s}.$$



(a) Posición en $t = 0.8$ s.

COMENTARIO

Cuando las componentes de un vector se determinan en sistemas coordenados diferentes, siempre se debe verificar que éstos den la misma magnitud. En este ejemplo,

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2.99)^2 + (-0.328)^2} = \sqrt{(-2.09)^2 + (-2.16)^2} = 3.01 \text{ m/s}.$$

Recuerde que aunque las componentes de la velocidad son diferentes en los dos sistemas coordenados, esas componentes describen el mismo vector de velocidad.

Problemas

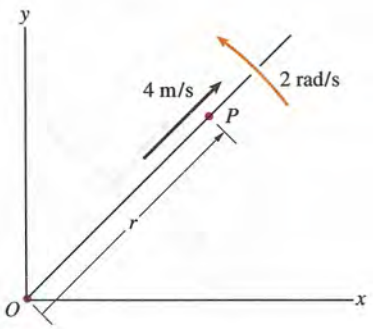
2.121 En un tiempo determinado, las coordenadas polares de un punto P que se mueve en el plano x-y son $r = 4$ pie, $\theta = 0.5$ rad, y sus derivadas respecto al tiempo son $dr/dt = 8$ pie/s y $d\theta/dt = -2$ rad/s. (a) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de P? (b) ¿Cuáles son las componentes cartesianas de esa velocidad?

2.122 En el Prob. 2.121, suponga que $d^2r/dt^2 = 6$ pie/s^2 y $d^2\theta/dt^2 = 3$ rad/s^2. En el instante descrito, determine: (a) la magnitud de la aceleración de P; (b) el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria.

2.123 Las coordenadas polares de un punto P que se mueve en el plano x-y son $r = t^3 - 4t$ m, $\theta = t^2 - t$ rad. Determine la velocidad de P en términos de las componentes radial y transversal en $t = 1$ s.

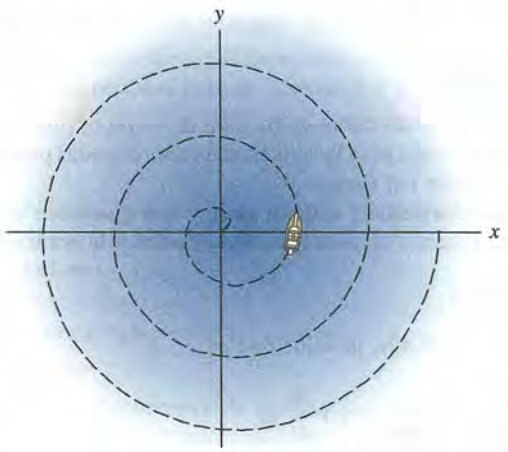
2.124 En el Prob. 2.123, ¿cuál es la aceleración de P en términos de las componentes radial y transversal en $t = 1$ s?

2.125 En Fig. P2.125 la línea radial gira con velocidad angular constante de 2 rad/s. El punto P se mueve a lo largo de la línea con rapidez constante de 4 m/s. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de P cuando $r = 2$ m.



P2.125

2.126 Una embarcación que busca tesoros arqueológicos navega a 4 nudos y sigue la trayectoria $r = 10\theta$ m, con θ en radianes (1 nudo = 1 milla náutica, o 1852 m, por hora). Cuando $\theta = 2\pi$ rad, determine la velocidad de la embarcación (a) en coordenadas polares; (b) en coordenadas cartesianas.



P2.126

2.127 En el Prob. 2.126, ¿cuál es la aceleración de la embarcación en coordenadas polares?

Estrategia: La magnitud de la velocidad de la embarcación es constante, por lo que se sabe que la componente tangencial de su aceleración es igual a cero.

2.128 Un punto P se mueve en el plano x-y a lo largo de la trayectoria descrita por la ecuación $r = e^{\theta}$, donde θ está en radianes. La velocidad angular $d\theta/dt = \omega_0 =$ constante, y $\theta = 0$ en $t = 0$. (a) Dibuje una gráfica polar de la trayectoria para valores de θ de 0 a 2π. (b) Demuestre que la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo son $\mathbf{v} = \omega_0 e^{\omega_0 t}(\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta)$, $\mathbf{a} = 2\omega_0^2 e^{\omega_0 t}\mathbf{e}_\theta$.

2.129 En Prob. 2.128, muestre que el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria en función del tiempo es $\rho = \sqrt{2}e^{\omega_0 t}$.

2.130 En el Ej. 2.12, determine la aceleración del punto P en $t = 0.8$ s (a) en términos de las componentes radial y transversal; (b) en términos de las componentes cartesianas.

2.131 Una cuenta se desliza por un alambre que gira en el plano x-y con velocidad angular constante w_0. La componente radial de la aceleración de la cuenta es cero. La de su velocidad es v_0 cuando $r = r_0$. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad de la cuenta en función de r.

Estrategia: La componente radial de la velocidad es

$$v_r = \frac{dr}{dt},$$

y la componente radial de su aceleración es

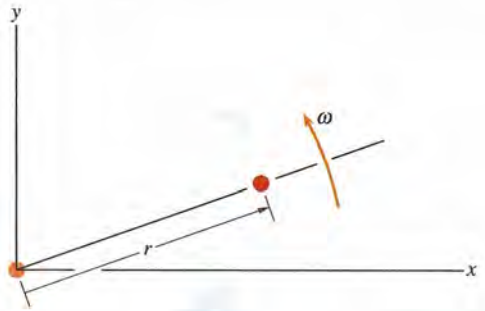
$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{dv_r}{dt} - r\omega_0^2.$$

Usando la regla de la cadena,

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv_r}{dr}v_r,$$

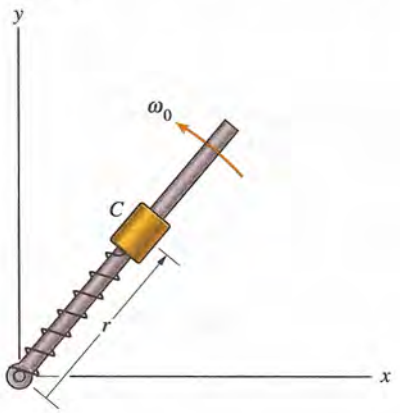
la componente radial de la aceleración se puede expresar en la forma

$$a_r = \frac{dv_r}{dr}v_r - r\omega_0^2.$$



P2.131

2.132 La barra gira en el plano x-y de la figura con velocidad angular constante ω_0. La componente radial de la aceleración del collarín C es $a_r = -Kr$, donde K es una constante. Cuando $r = r_0$, la componente radial de la velocidad de C es v_0. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad de C en función de r.

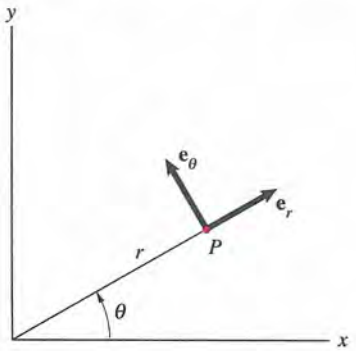


P2.132

2.133 Las coordenadas cartesianas de un punto P en el plano x-y están relacionadas con las coordenadas polares por las relaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$.
(a) Demuestre que los vectores unitarios **i** y **j** están relacionados con los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ por

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_r\cos\theta - \mathbf{e}_\theta\,\text{sen}\,\theta,$$
$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_r\,\text{sen}\,\theta + \mathbf{e}_\theta\cos\theta.$$

(b) Partiendo de la expresión para el vector de posición de P en coordenadas cartesianas, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, deduzca la Ec. (2.44) para el vector de posición en coordenadas polares.
(c) Tomando la derivada respecto al tiempo del vector de posición del punto P expresado en coordenadas cartesianas, deduzca la Ec. (2.47) para la velocidad en coordenadas polares.

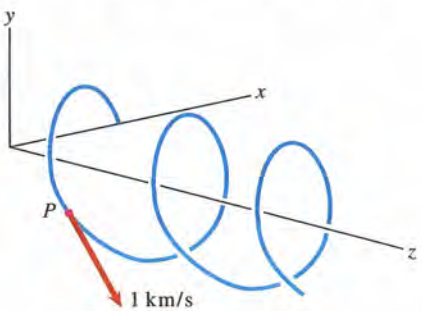


P2.133

2.134 El avión mostrado vuela en línea recta a 400 mi/h. El radio de su hélice es de 5 pies, y gira a 2000 rpm en dirección antihoraria cuando se ve desde el frente del avión. Determine la velocidad y la aceleración de un punto en la punta de la hélice en coordenadas cilíndricas. (Considere el eje z como está orientado en la figura.)

P2.134

2.135 Una partícula cargada P en un campo magnético se mueve en la trayectoria espiral descrita por $r = 1$ m, $\theta = 2z$ rad (z está en metros). La partícula se mueve en la dirección mostrada con rapidez constante $|\mathbf{v}| = 1$ km/s. ¿Cuál es la velocidad de la partícula en coordenadas cilíndricas?



P2.135

2.136 ¿Cuál es la aceleración de la partícula cargada del Prob. 2.135 en coordenadas cilíndricas?

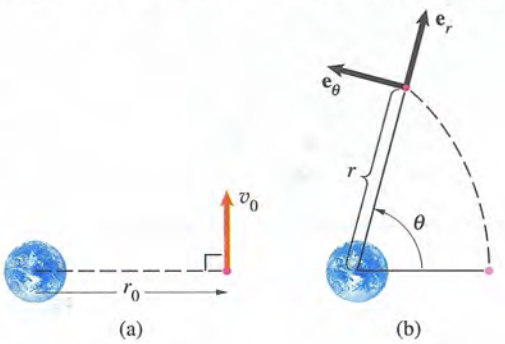
2.4 Mecánica de órbitas

La determinación analítica de Newton con respecto a las órbitas elípticas de los planetas, que se habían deducido a partir de datos observados por Johannes Kepler (1571-1630), constituyó un triunfo de la mecánica newtoniana y una confirmación de la relación inversa cuadrada de la aceleración gravitatoria. Podemos usar las ecuaciones desarrolladas en este capítulo para determinar la órbita de un satélite terrestre o de un planeta.

Suponga que en $t = 0$ un satélite tiene velocidad inicial v_0 a una distancia r_0 del centro de la Tierra (Fig. 2.39a). Se supone que la velocidad inicial es perpendicular a la línea que va del centro de la Tierra al satélite. La posición de éste durante su movimiento subsecuente está especificada por sus coordenadas polares (r, θ), donde θ se mide desde su posición en $t = 0$ (Fig. 2.39b). Se debe determinar r en función de θ.

Figura 2.39

(a) Posición y velocidad iniciales de un satélite terrestre.
(b) Especificación de la trayectoria subsecuente en coordenadas polares.



Si concebimos a la Tierra como una esfera homogénea, la aceleración debida a la gravedad a una distancia r del centro de ella es

$$\mathbf{a} = -\frac{gR_E^2}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

donde R_E es el radio de la Tierra. Igualando esta expresión a la Ec. (2.50) para la aceleración en coordenadas polares,

$$\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{e}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\mathbf{e}_\theta = -\frac{gR_E^2}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

e igualando las componentes $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$, obtenemos las ecuaciones

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{gR_E^2}{r^2}, \tag{2.56}$$

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0. \tag{2.57}$$

Podemos escribir la Ec. (2.57) en la forma

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

que indica que

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = rv_\theta = \text{constante}. \tag{2.58}$$

En $t = 0$ las componentes de la velocidad son $v_r = 0$, $v_\theta = v_0$, y la posición radial es $r = r_0$. Por tanto, podemos escribir la constante en la Ec. (2.58) en términos de las condiciones iniciales:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = rv_\theta = r_0v_0. \tag{2.59}$$

Usando la Ec. (2.59) para eliminar $d\theta/dt$ de la Ec. (2.56) obtenemos

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r_0^2v_0^2}{r^3} = -\frac{gR_E^2}{r^2}. \tag{2.60}$$

Podemos resolver esta ecuación diferencial mediante el cambio de variable

$$u = \frac{1}{r}. \tag{2.61}$$

Al proceder así también cambiamos la variable independiente de t a θ porque queremos determinar r en función del ángulo θ y no de t. Para expresar la Ec. (2.60) en términos de u se determina d^2r/dt^2 en términos de u. Con la regla de la cadena, escribimos la derivada de r respecto al tiempo como

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}. \tag{2.62}$$

Observe en la Ec. (2.59) que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{r_0v_0}{r^2} = r_0v_0u^2. \tag{2.63}$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (2.62) obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = -r_0v_0\frac{du}{d\theta}. \tag{2.64}$$

Diferenciamos esta expresión con respecto al tiempo y aplicamos de nuevo la regla de la cadena:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-r_0v_0\frac{du}{d\theta}\right) = -r_0v_0\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -r_0v_0\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Usando la Ec. (2.63) para eliminar $d\theta/dt$ de esta expresión, obtenemos la segunda derivada respecto al tiempo de r en términos de u:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -r_0^2v_0^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (2.60) se obtiene una ecuación diferencial lineal de u en función de θ:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{gR_E^2}{r_0^2 v_0^2}.$$

La solución general de esta ecuación es

$$u = A\,\text{sen}\,\theta + B\cos\theta + \frac{gR_E^2}{r_0^2 v_0^2}, \tag{2.65}$$

donde A y B son constantes. Podemos usar las condiciones iniciales para determinar A y B. Cuando $\theta = 0$, $u = 1/r_0$. Así mismo, cuando $\theta = 0$ la componente radial de la velocidad $v_r = dr/dt = 0$, por lo que de la Ec. (2.64), $du/d\theta = 0$. De esas dos condiciones obtenemos

$$A = 0, \qquad B = \frac{1}{r_0} - \frac{gR_E^2}{r_0^2 v_0^2}.$$

Sustituyendo estos resultados en la Ec. (2.65), podemos escribir la solución resultante para $r = 1/u$ como

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\theta}, \tag{2.66}$$

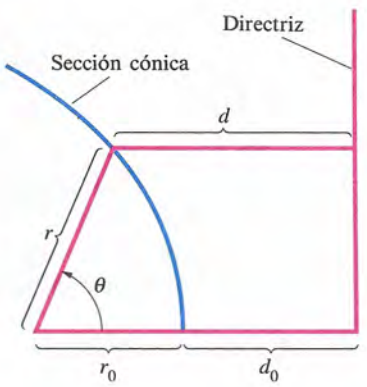
donde

$$\varepsilon = \frac{r_0 v_0^2}{gR_E^2} - 1. \tag{2.67}$$

La curva llamada **sección cónica** (Fig. 2.40) tiene la propiedad de que la razón de r a la distancia perpendicular d a una línea recta, llamada *directriz*, es constante. Esta razón, $r/d = r_0/d_0$, se llama **excentricidad** de la curva. En la Fig. 2.40 vemos que

$$r\cos\theta + d = r_0 + d_0,$$

Figura 2.40
Si la razón r/d es constante, la curva describe una sección cónica.



que se puede escribir en términos de la excentricidad como

$$\frac{r}{r_0} = \frac{1 + (r_0/d_0)}{1 + (r_0/d_0)\cos\theta}.$$

Comparando esta expresión con la Ec. (2.66), vemos que *la órbita del satélite describe una sección cónica con excentricidad* ε.

El valor de la excentricidad determina el carácter de la órbita (Fig. 2.41). Si la velocidad inicial v_0 se escoge de modo que $\varepsilon = 0$, la Ec. (2.66) se reduce a $r = r_0$ y la órbita es circular. Haciendo $\varepsilon = 0$ en la Ec. (2.67) y despejando v_0, obtenemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_E^2}{r_0}}, \tag{2.68}$$

que concuerda con la velocidad de una órbita circular obtenida en el Ej. 2.9 por un método diferente.

Si $0 < \varepsilon < 1$, la órbita es una elipse. El radio máximo de la elipse se presenta cuando $\theta = 180°$. Haciendo θ igual a 180° en la Ec. (2.66), obtenemos una expresión para el radio máximo de la elipse en términos del radio inicial y ε:

$$r_{\text{máx}} = r_0\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right). \tag{2.69}$$

Observe que el radio máximo de la elipse aumente sin límite cuando $\varepsilon \to 1$. Cuando $\varepsilon = 1$, la órbita es una parábola, lo cual significa que v_0 es la velocidad de escape. Haciendo $\varepsilon = 1$ en la Ec. (2.67) y despejando v_0 obtenemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gR_E^2}{r_0}},$$

que es el mismo valor obtenido para la velocidad de escape que en el Ej. 2.5 para el caso de movimiento de alejamiento de la Tierra. Si $\varepsilon > 1$, la órbita es una hipérbola.

La solución que hemos presentado, basada en la hipótesis de que la Tierra es una esfera homogénea, da en forma aproximada la órbita de un satélite terrestre. La determinación precisa de la órbita requiere tomar en cuenta las variaciones del campo gravitatorio de la Tierra debido a su distribución real de masa. De manera similar, dependiendo de la exactitud requerida, la determinación de la órbita de un planeta alrededor del Sol puede requerir que se tomen en cuenta las perturbaciones debidas a las atracciones gravitatorias de los otros planetas.

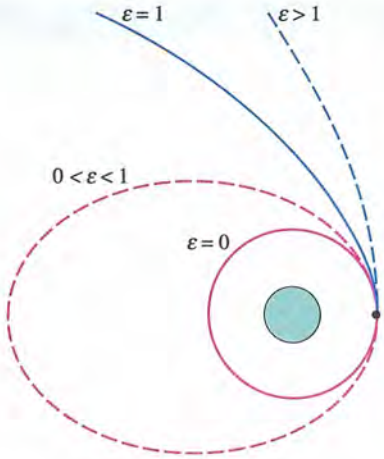


Figura 2.41
Órbitas para diferentes valores de la excentricidad.

Ejemplo 2.13

Un satélite terrestre está en una órbita elíptica con radio mínimo de 4160 mi y radio máximo de 10 000 mi.
(a) Determine la velocidad del satélite cuando está en el perigeo (su radio mínimo) y cuando se halla en el apogeo (su radio máximo).
(b) Dibuje una gráfica de la órbita.

ESTRATEGIA

Podemos considerar el radio y la velocidad del satélite en el perigeo como las condiciones iniciales r_0 y v_0 usadas al obtener la Ec. (2.66). Como también conocemos el radio máximo de la órbita, podemos despejar en la Ec. (2.69) la excentricidad de la órbita y luego usar la Ec. (2.67) para determinar v_0. De acuerdo con la Ec. (2.58), el producto de r y la componente transversal de la velocidad es constante. Podemos usar esta condición para determinar la velocidad en el apogeo.

SOLUCIÓN

(a) Despejando ε en la Ec. (2.69), la excentricidad de la órbita es

$$\varepsilon = \frac{r_{\text{máx}}/r_0 - 1}{r_{\text{máx}}/r_0 + 1} = \frac{10\,000/4160 - 1}{10\,000/4160 + 1} = 0.412.$$

Ahora, de la Ec. (2.67), la velocidad en el perigeo es

$$v_0 = \sqrt{\frac{(\varepsilon + 1)gR_E^2}{r_0}} = \sqrt{\frac{(0.412 + 1)(32.2)[(3960)(5280)]^2}{(4160)(5280)}}$$

$$= 30\,087 \text{ pie/s}.$$

En el perigeo y en el apogeo, la velocidad tiene sólo una componente transversal. Por tanto, la velocidad en el apogeo, v_a, está relacionada con la velocidad v_0 en el perigeo por

$$r_0 v_0 = r_{\text{máx}} v_a.$$

Resolvemos esta ecuación para la velocidad en el apogeo:

$$v_a = \frac{r_0}{r_{\text{máx}}} v_0 = \left(\frac{4160}{10\,000}\right)(30\,087) = 12\,516 \text{ pie/s}.$$

(b) Dibujando la Ec. (2.66) con $\varepsilon = 0.412$, obtenemos la gráfica de la órbita (Fig. 2.42).

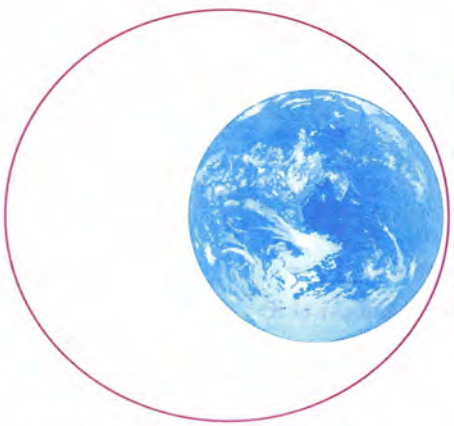


Figura 2.42
Órbita de un satélite terrestre con un perigeo de 4160 mi y un apogeo de 10 000 mi.

Ejemplo 2.14

Aplicación a la ingeniería

Satélites de comunicaciones

Un satélite de comunicaciones usualmente se coloca en órbita geosincrónica, es decir, una órbita circular sobre el ecuador en la que el satélite permanece sobre el mismo punto de la Tierra conforme ésta gira debajo de él. El satélite se coloca en órbita geosincrónica desde una órbita circular de espera cercana a la Tierra por medio de un procedimiento llamado *transferencia Hohmann* (Fig. 2.43). Sea v_1 la velocidad del satélite en la órbita circular de espera. El satélite se impulsa primero desde v_1 a una velocidad v_2 en la dirección tangencial a la órbita de espera para colocarlo en una órbita elíptica cuyo radio máximo es igual al radio de la órbita geosincrónica. Cuando el satélite alcanza la órbita geosincrónica, su velocidad ha disminuido de v_2 a una velocidad v_3. Se le impulsa luego a la velocidad v_4 necesaria para que quede en la órbita geosincrónica, completándose así la transferencia Hohmann. (a) Determine el radio r_g (en km) de la órbita geosincrónica. (b) El radio de la Tierra es $R_E = 6370$ km. Si el radio de la órbita circular de espera es $r_p = 6670$ km, determine las velocidades v_1, v_2, v_3 y v_4.

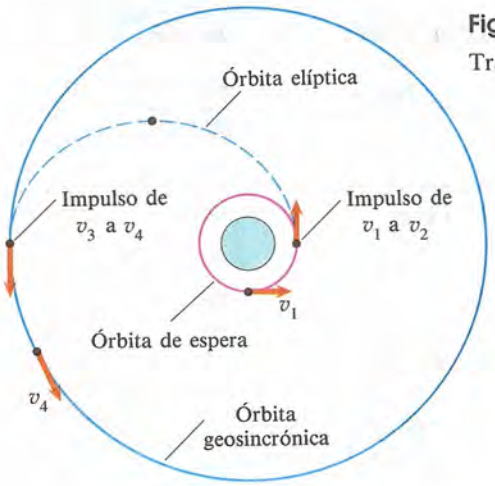


Figura 2.43
Transferencia Hohmann.

ESTRATEGIA

(a) Para estar en órbita geosincrónica, un satélite debe completar una revolución en aproximadamente 24 h, mientras que la Tierra gira una revolución debajo de él. Esta condición, junto con la Ec. (2.68) para la velocidad de un satélite en órbita circular, nos permite determinar el radio de una órbita geosincrónica. (b) Como las órbitas de espera y geosincrónicas son circulares, podemos usar la Ec. (2.68) para determinar v_1 y v_4. Las condiciones iniciales para la órbita elíptica son $r_0 = r_p$, $v_0 = v_2$. Queremos que el radio máximo de la órbita elíptica sea igual al radio de la órbita geosincrónica: $r_{máx} = r_g$. Podemos despejar de la Ec. (2.69) la excentricidad de la órbita elíptica y luego usar la Ec. (2.67) para determinar $v_0 = v_2$. Según la Ec. (2.58), el producto de r y la componente transversal de la velocidad es constante mientras el satélite está en la órbita elíptica, por lo que podemos determinar la velocidad v_3 a partir de la relación $r_p v_2 = r_g v_3$.

SOLUCIÓN

(a) Sea $T = 24\,\text{h} = (24)(3600)\,\text{s}$. En un tiempo T, un satélite en órbita geosincrónica debe viajar la distancia $2\pi r_g$, de modo que

$$2\pi r_g = v_4 T. \tag{2.70}$$

De la Ec. (2.68), la velocidad v_4 y el radio r_g también deben satisfacer la ecuación

$$v_4 = \sqrt{\frac{gR_E^2}{r_g}}.$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (2.70) y despejando r_g obtenemos

$$r_g = g^{1/3}\left(\frac{TR_E}{2\pi}\right)^{2/3} = (9.81)^{1/3}\left(\frac{(24)(3600)(6.37\times 10^6)}{2\pi}\right)^{2/3}$$

$$= 4.22\times 10^4\ \text{km}.$$

(b) De la Ec. (2.68), la velocidad del satélite en la órbita de espera es

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR_E^2}{r_p}} = \sqrt{\frac{(9.81)(6.37\times 10^6)^2}{6.67\times 10^6}} = 7725\ \text{m/s},$$

y su velocidad en la órbita geosincrónica es

$$v_4 = \sqrt{\frac{gR_E^2}{r_g}} = \sqrt{\frac{(9.81)(6.37\times 10^6)^2}{4.22\times 10^7}} = 3070\ \text{m/s}.$$

De la Ec. (2.69), el radio máximo de la órbita elíptica está relacionado con su excentricidad por

$$r_g = r_p\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Despejando ε obtenemos

$$\varepsilon = \frac{r_g/r_p - 1}{r_g/r_p + 1} = 0.727.$$

Ahora podemos encontrar v_2 con la Ec. (2.67):

$$v_2 = \sqrt{\frac{gR_E^2(\varepsilon+1)}{r_p}} = \sqrt{\frac{(9.81)(6.37\times 10^6)^2(0.727+1)}{6.67\times 10^6}}$$

$$= 10{,}153\ \text{m/s}.$$

De la relación $r_p v_2 = r_g v_3$, la velocidad v_3 es

$$v_3 = \left(\frac{r_p}{r_g}\right)v_2 = 1604\ \text{m/s}.$$

CONSIDERACIONES DE DISEÑO

Los satélites (Fig. 2.44) han revolucionado las comunicaciones haciendo posible la transmisión en tiempo real de información audiovisual a todo el planeta. Como los satélites se colocan en órbitas geosincrónicas, las estaciones terrestres que envían o reciben sus señales pueden usar antenas fijas sencillas y relativamente baratas (las antenas parabólicas comunes que reciben transmisiones de televisión apuntan hacia los satélites en órbitas geosincrónicas).

Como el radio de una órbita geosincrónica es grande en comparación con el radio de la Tierra, $r_g = 4.22 \times 10^4$ km o aproximadamente 26 200 mi, la construcción y el lanzamiento de los satélites de comunicaciones es un problema tremendo en el diseño de sistemas. En el Ej. 2.14, el satélite en órbita circular de espera debe ser impulsado de v_1 a v_2, un incremento en velocidad de 2427 m/s, para iniciar la órbita elíptica. Luego debe ser impulsado de v_3 a v_4, un incremento de 1467 m/s, para que quede en órbita geosincrónica. El satélite debe estar equipado con motores cohete capaces de producir esos incrementos de velocidad. Además, debe tener sistemas de control de orientación que puedan alinearlo en las direcciones correctas mediante cambios en la velocidad. Una vez colocado en órbita geosincrónica, el satélite debe poder determinar su orientación y apuntar sus propias antenas para recibir y transmitir señales.

Figura 2.44
Satélite de comunicaciones Intelsat V.

Problemas

Use los valores R_F = 6370 km = 3960 mi para el radio de la Tierra

2.137 Un satélite está en una órbita circular a 200 mi sobre la superficie de la Tierra.
(a) ¿Cuál es la magnitud de su velocidad?
(b) ¿Cuánto tarda en completar una revolución?

2.138 La Luna está aproximadamente a 238 000 mi de la Tierra. Si la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es circular con velocidad dada por la Ec. (2.68), ¿cuánto tarda la Luna en efectuar una revolución alrededor de la Tierra?

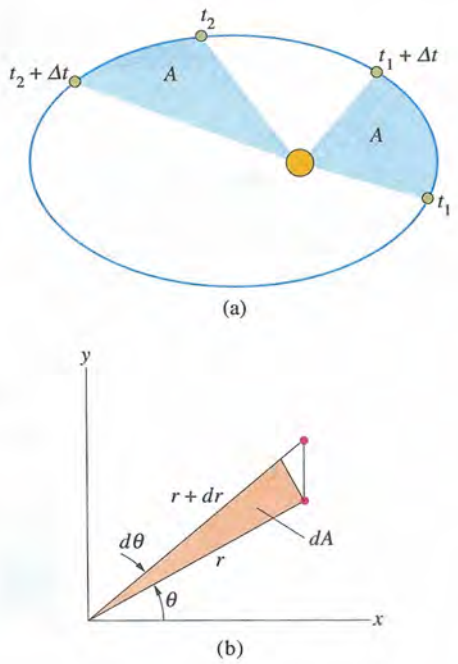
2.139 A un satélite se le da una velocidad inicial v_0 = 22 000 pie/s a una distancia $r_0 = 2R_E$ del centro de la Tierra, como se muestra en la Fig. 2.39(a).
(a) ¿Cuál es el radio máximo de la órbita elíptica resultante?
(b) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del satélite cuando está en la posición de su radio máximo?

2.140 Dibuje una gráfica de la órbita elíptica descrita en el Prob. 2.139.

2.141 A un satélite se le da una velocidad inicial v_0 a una distancia r_0 = 6800 km del centro de la Tierra, como se muestra en la Fig. 2.39(a). La órbita elíptica resultante tiene un radio máximo de 20 000 km. ¿Qué valor tiene v_0?

2.142 En el Prob. 2.141, ¿qué velocidad v_0 sería necesaria para poner el satélite en una órbita parabólica de escape?

2.143 A partir de datos astronómicos, Kepler dedujo que la línea del Sol a un planeta describe áreas iguales en tiempos iguales (Fig. a). Demuestre que esto se infiere del hecho de que la componente transversal a_θ de la aceleración del planeta es cero. (Cuando r cambia en una cantidad dr y θ cambia en una cantidad $d\theta$ (Fig. b), el elemento diferencial de área resultante es $dA = (r/2)(rd\theta)$.)

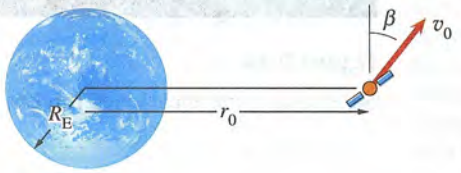


P2.143

2.144 En $t = 0$, un satélite terrestre está a una distancia r_0 del centro de la Tierra y tiene una velocidad inicial v_0 en la dirección mostrada. Demuestre que la ecuación polar de la órbita resultante es

$$\frac{r}{r_0} = \frac{(\varepsilon + 1)\cos^2\beta}{[(\varepsilon + 1)\cos^2\beta - 1]\cos\theta - (\varepsilon + 1)\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}\theta + 1},$$

donde $\varepsilon = (r_0 v_0^2/gR_E^2) - 1$.



P2.144

2.145 Dibuje las gráficas de las órbitas dadas por la ecuación polar obtenida en el Prob. 2.144 para $\varepsilon = 0$ y $\beta = 0, 30°$ y $60°$.

Los problemas 2.146 al 2.149 están relacionados con el Ej. 2.14.

2.146 Un satélite terrestre está en una órbita circular de espera de radio $r_p = 6800$ km. Determine el incremento de velocidad $v_2 - v_1$ necesario para ponerlo en una órbita elíptica con radio máximo igual al radio r_g de una órbita geosincrónica.

2.147 (a) Determine la velocidad v_3 del satélite del Prob. 2.146 cuando alcanza el radio de la órbita geosincrónica. (b) Determine el incremento de velocidad necesaria $v_y - v_3$ para colocar el satélite en órbita geosincrónica.

2.148 Un satélite está en una órbita circular de espera de radio $r_p = 4560$ mi desde el centro de la Tierra. Determine los incrementos de velocidad $v_2 - v_1$ y $v_4 - v_3$ necesarios para efectuar una transferencia Hohmann a una órbita circular con radio igual al radio de la órbita de la Luna (238 000 millas).

2.149 Un satélite está en una órbita circular de espera de radio $r_p = 3500$ km desde el centro de Marte. El radio de Marte es de 3394 km, la aceleración debida a la gravedad en su superficie es de 3.73 m/s^2, y gira sobre su eje polar una vez cada 24 h 37 min. Determine los incrementos de velocidad $v_2 - v_1$ y $v_4 - v_3$ necesarios para colocar el satélite en una órbita sincrónica alrededor de Marte.

2.5 *Movimiento relativo*

Hasta ahora, nuestro estudio se ha limitado al movimiento de un solo punto. Sin embargo, suele no ser el movimiento de un punto individual lo que se debe considerar, sino el movimiento *relativo entre ellos* de dos o más puntos. Por ejemplo, si un piloto quiere aterrizar sobre un portaaviones (Fig. 2.45a), le importan menos los movimientos de su avión y del

Figura 2.45(a)
En muchos casos el movimiento relativo es de mayor importancia que el movimiento individual.

(a)

portaaviones respecto a la Tierra que el movimiento *relativo* de su avión *respecto al portaaviones*. Un par de patinadores (Fig. 2.45b) debe controlar cuidadosamente sus movimientos individuales respecto al hielo, así como sus movimientos *relativos entre sí* para realizar con éxito sus figuras. En esta sección analizamos los movimientos relativos de puntos.

Supongamos que A y B son dos puntos cuyos movimientos individuales medimos respecto a un punto de referencia O, y analicemos cómo describir el movimiento de A respecto a B. Sean $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ los vectores de posición de los puntos A y B respecto a O (Fig. 2.46). El vector $\mathbf{r}_{A/B}$ es el vector de posición de A respecto a B. Estos vectores están relacionados por

$$\boxed{\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}.} \tag{2.71}$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo, obtenemos

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B},} \tag{2.72}$$

donde $\mathbf{v}_A$ es la velocidad de A respecto a O, $\mathbf{v}_B$ es la velocidad de B respecto a O y $\mathbf{v}_{A/B} = d\mathbf{r}_{A/B}/dt$ es la velocidad de A respecto a B.

(b)

Figura 2.45(b)

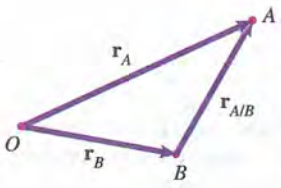


Figura 2.46
Dos puntos A y B y un punto de referencia O. Los vectores $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ especifican las posiciones de A y B respecto a O, y $\mathbf{r}_{A/B}$ especifica la posición de A respecto a B.

En el ejemplo del avión aproximándose al portaaviones, el avión podría ser el punto A y el portaaviones el punto B. Los movimientos individuales de ambos se medirían (p. ej., usando a bordo sistemas de navegación inerciales) respecto a un punto de referencia O fijo con respecto a la Tierra. Conocidas las velocidades del avión, $\mathbf{v}_A$, y del portaaviones, $\mathbf{v}_B$, el piloto podría usar la Ec. (2.72) para determinar su velocidad respecto al portaaviones.

Derivando respecto al tiempo la Ec. (2.72) obtenemos

$$\boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B},} \tag{2.73}$$

donde $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ son las aceleraciones de A y B respecto a O y $\mathbf{a}_{A/B} = d\mathbf{v}_{A/B}/dt$ es la aceleración de A respecto a B. Al deducir las Ecs. (2.72) y (2.73) hemos supuesto que los vectores de posición, de velocidad y de aceleración están expresados en términos de un amparo de referencia *que no gira*. En el capítulo 6 analizaremos movimientos relativos expresados en términos de marcos de referencia en rotación.

Los siguientes ejemplos muestran cómo usar las Ecs. (2.71) a (2.73) para analizar los movimientos relativos de cuerpos.

Ejemplo 2.15

Un portaaviones viaja en dirección norte a 15 nudos (millas náuticas por hora) respecto a la Tierra y con su radar determina que la velocidad de un avión respecto a él es horizontal y con magnitud de 300 nudos hacia el noreste. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la velocidad del avión respecto a la Tierra?

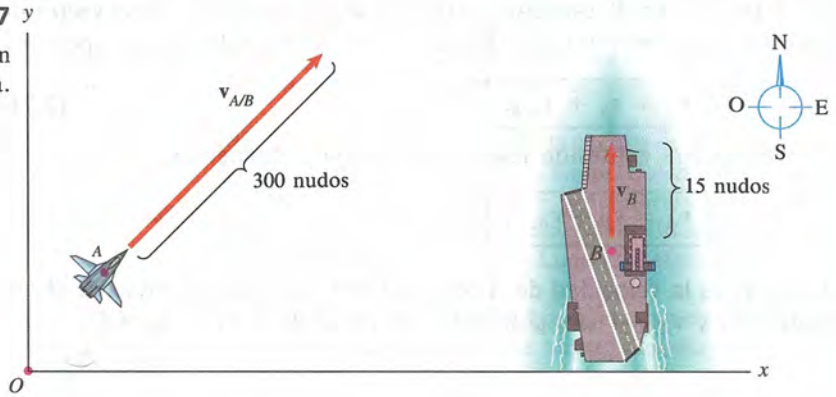


Figura 2.47 El avión (A), el portaaviones (B) y un punto O fijo relativo a la Tierra.

ESTRATEGIA

Como conocemos la velocidad del portaaviones respecto a la Tierra y la velocidad del avión respecto al portaaviones, podemos usar la Ec. (2.72) para determinar la velocidad del avión respecto a la Tierra.

SOLUCIÓN

Sea el avión el punto A y el portaaviones el punto B (Fig. 2.47). El punto O y el sistema coordenado xy están fijos respecto a la Tierra. En la figura se muestra la velocidad del portaaviones respecto a la Tierra y la velocidad del avión *respecto al portaaviones*. La velocidad del portaaviones es

$$\mathbf{v}_B = 15\mathbf{j} \text{ (nudos)},$$

y la velocidad del avión respecto al portaaviones es

$$\mathbf{v}_{A/B} = 300 \cos 45°\mathbf{i} + 300 \operatorname{sen} 45°\mathbf{j} \text{ (nudos)}.$$

Por tanto, la velocidad del avión respecto a la Tierra es

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} = 300 \cos 45°\mathbf{i} + (15 + 300 \operatorname{sen} 45°)\mathbf{j}$$

$$= 212.1\mathbf{i} + 227.1\mathbf{j} \text{ (nudos)}.$$

La magnitud de la velocidad del avión respecto a la Tierra es

$$\sqrt{(212.1)^2 + (227.1)^2} = 310.8 \text{ nudos},$$

y su dirección es arctan $(212.1/227.1) = 43.0°$ noreste.

Ejemplo 2.16

Un barco que se mueve a 5 m/s respecto al agua está en una corriente uniforme que fluye hacia el este a 2 m/s. Si el capitán quiere navegar hacia el noroeste respecto a la Tierra, ¿en qué dirección debe dirigir el barco? ¿Cuál será la magnitud resultante de la velocidad del barco respecto a la Tierra?

ESTRATEGIA

Sea el punto A el barco y sea B un punto que se mueve con el agua (Fig. a). El punto O y el sistema coordenado xy están fijos respecto a la Tierra. Conocemos $\mathbf{v}_B$, la dirección deseada de $\mathbf{v}_A$ y la magnitud de $\mathbf{v}_{A/B}$. Podemos usar la Ec. (2.72) para determinar la magnitud de $\mathbf{v}_A$ y la dirección de $\mathbf{v}_{A/B}$.

SOLUCIÓN

La velocidad del barco respecto a la Tierra es igual a la velocidad del agua respecto a la Tierra más la velocidad del barco respecto al agua:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}.$$

En la Fig. b mostramos esta relación junto con la información que tenemos sobre esas velocidades: la velocidad de la corriente es de 2 m/s hacia el este, la magnitud de la velocidad del barco respecto al agua es de 5 m/s, y la dirección de la velocidad del barco respecto a la Tierra es noroeste. En el sistema coordenado que se muestra, la velocidad de la corriente es $\mathbf{v}_B = 2\mathbf{i}$ m/s. No conocemos la magnitud de $\mathbf{v}_A$, pero, como conocemos su dirección, podemos escribirla en términos de componentes como

$$\mathbf{v}_A = -|\mathbf{v}_A| \cos 45°\mathbf{i} + |\mathbf{v}_A| \operatorname{sen} 45°\mathbf{j}.$$

La velocidad del barco respecto al agua es

$$\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = -(|\mathbf{v}_A| \cos 45° + 2)\mathbf{i} + |\mathbf{v}_A| \operatorname{sen} 45°\mathbf{j}.$$

La magnitud de este vector es

$$|\mathbf{v}_{A/B}| = \sqrt{(|\mathbf{v}_A| \cos 45° + 2)^2 + (|\mathbf{v}_A| \operatorname{sen} 45°)^2} = 5 \text{ m/s}.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos $|\mathbf{v}_A| = 3.38$ m/s, por lo que la velocidad del barco respecto al agua es

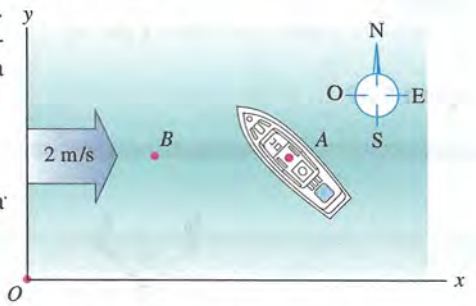
$$\mathbf{v}_{A/B} = -4.39\mathbf{i} + 2.39\mathbf{j} \text{ m/s}.$$

El capitán debe orientar su barco a arctan(4.39/2.39) = 61.4° hacia el noroeste para que el barco navegue en dirección noroeste respecto a la Tierra.

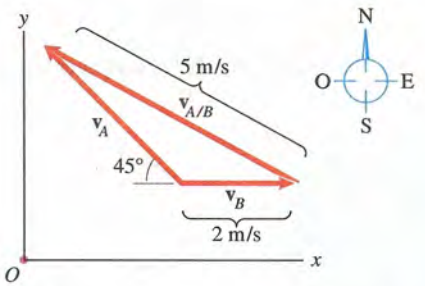
COMENTARIO

El problema descrito en este ejemplo debe resolverse siempre que un barco viaje en una corriente o un avión vuele en un viento que no es paralelo al curso deseado.

Figura 2.48



(a) El barco A y un punto B moviéndose en el agua.



(b) Diagrama de los vectores de velocidad.

Ejemplo 2.17

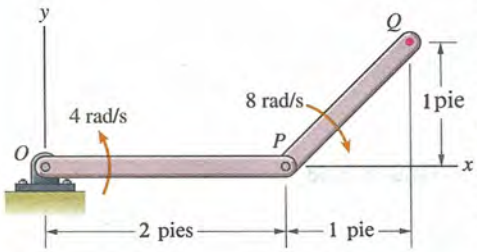
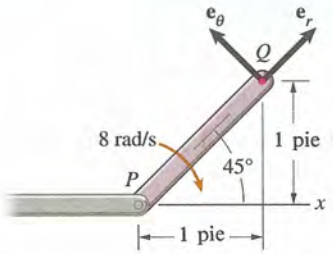


Figura 2.49

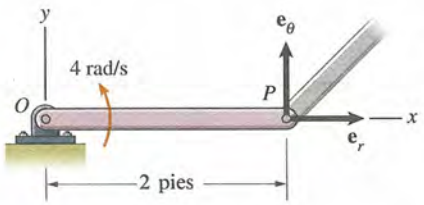
Las barras OP y PQ de la Fig. 2.49 giran en el plano x-y con velocidades angulares constantes. En el sistema coordenado fijo que se muestra, ¿cuál es la aceleración del punto Q respecto al punto fijo O?

ESTRATEGIA

Respecto al punto P, el punto Q se mueve en una trayectoria circular alrededor de P con velocidad angular constante. Podemos usar coordenadas polares para determinar $\mathbf{a}_{Q/P}$ y luego expresarla en términos de componentes del sistema coordenado xy. El punto P se mueve en una trayectoria circular alrededor de O con velocidad angular constante, y podemos usar coordenadas polares para determinar la aceleración $\mathbf{a}_P$ y luego expresarla en términos de componentes en el sistema coordenado xy. Entonces la aceleración de Q relativa a O es $\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + \mathbf{a}_{Q/P}$.



(a) Determinación de la aceleración de Q respecto a P.



(b) Determinación de la aceleración de P respecto a O.

SOLUCIÓN

Expresando el movimiento de Q respecto a P en coordenadas polares (Fig. a), obtenemos la componente radial de la aceleración,

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = 0 - (\sqrt{2})(-8)^2 = -90.51 \text{ pie/s}^2,$$

y la componente transversal,

$$a_\theta = r\alpha + 2\frac{dr}{dt}\omega = 0.$$

Por tanto, la aceleración de Q relativa a P en el sistema coordenado xy es

$$\mathbf{a}_{Q/P} = a_r \cos 45°\mathbf{i} + a_r \operatorname{sen} 45°\mathbf{j} = -64\mathbf{i} - 64\mathbf{j} \text{ (pie/s}^2\text{)}.$$

También expresamos la aceleración de P respecto a O en coordenadas polares (Fig. b). La componente radial es

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = 0 - (2)(4)^2 = -32 \text{ pie/s}^2,$$

y la componente transversal es

$$a_\theta = r\alpha + 2\frac{dr}{dt}\omega = 0.$$

La aceleración de P respecto a O en coordenadas xy es

$$\mathbf{a}_P = a_r\mathbf{i} = -32\mathbf{i} \text{ (pie/s}^2\text{)}.$$

Por tanto, la aceleración de Q respecto a O es

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + \mathbf{a}_{Q/P} = -32\mathbf{i} - 64\mathbf{i} - 64\mathbf{j}$$

$$= -96\mathbf{i} - 64\mathbf{j} \text{ (pie/s}^2\text{)}.$$

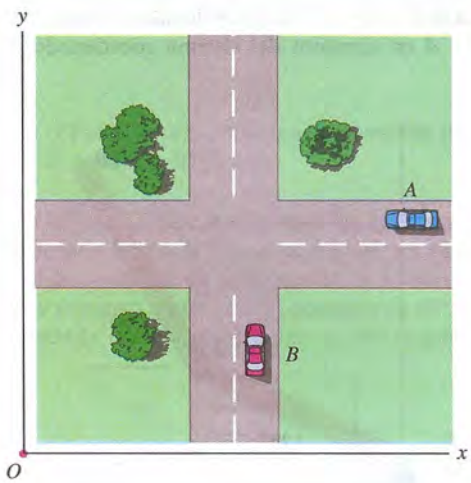
COMENTARIO

Al usar coordenadas polares, ¿violamos nuestra hipótesis de que los vectores en las Ecs. (2.71) a (2.73) se expresan en términos de un marco de referencia que no gira? No, porque las expresiones para la velocidad y la aceleración en coordenadas polares consideran que los vectores unitarios giran. Ellas dan la velocidad y la aceleración respecto al marco de referencia en que se miden las coordenadas polares (r, θ). Por lo mismo, se pueden usar componentes normal y tangencial para evaluar los términos en Ecs. (2.71) a (2.73).

Este ejemplo demuestra un uso importante del concepto de movimiento relativo. El movimiento del punto Q respecto al punto O es muy complicado. Sin embargo, como el movimiento de Q respecto a P y el de P respecto a Q son relativamente sencillos, podemos aprovechar las ecuaciones del movimiento relativo para obtener información sobre el movimiento de Q respecto a O.

Problemas

2.150 Dos automóviles A y B se aproximan a una intersección. A viaja a 20 m/s y va desacelerando a 2 m/s^2, y B viaja a 10 m/s y va desacelerando a 3 m/s^2. En el sistema coordenado fijo a la Tierra mostrado, determine la velocidad de A respecto a B y la velocidad de B respecto a A.

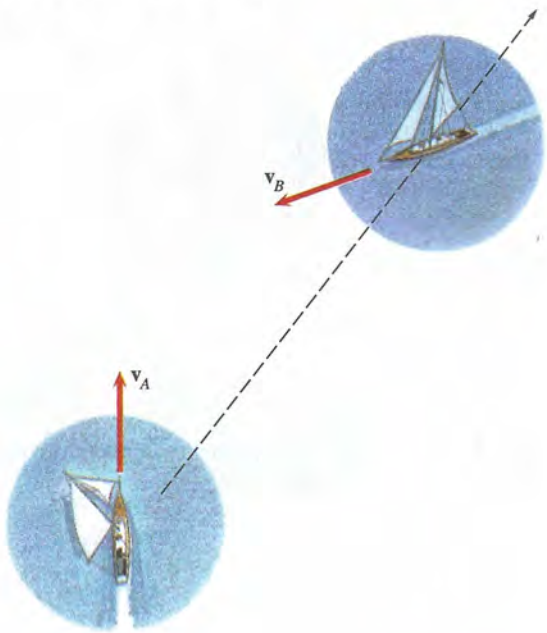


P2.150

2.151 En el Prob. 2.150 determine la aceleración de A respecto a B y la aceleración de B respecto a A.

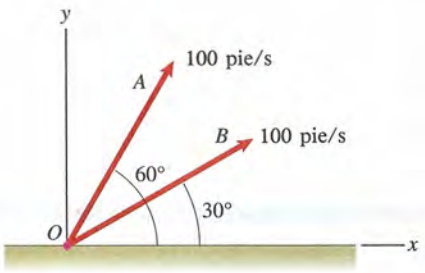
2.152 Suponga que los dos automóviles del Prob. 2.150 se aproximan a la intersección con velocidades constantes. Demuestre que los automóviles llegarán a la intersección al mismo tiempo si la velocidad de A respecto a B apunta de A hacia B.

2.153 Dos botes de vela tienen velocidades constantes $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ respecto a la Tierra. El capitán del bote A divisa un punto sobre el horizonte detrás del bote B. Como el bote B parece estar en reposo respecto a ese punto, el capitán se da cuenta de que debe cambiar su curso para evitar una colisión. Use la Ec. (2.72) para explicar por qué.



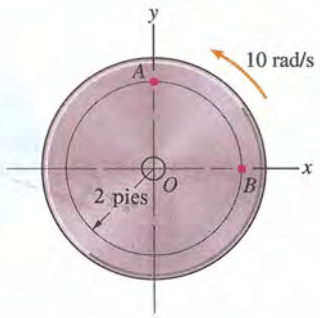
P2.153

2.154 Dos proyectiles A y B se disparan al mismo tiempo desde O con las velocidades y ángulos de elevación iniciales mostrados respecto al sistema coordenado fijo a la Tierra. En el instante en que B alcanza su punto más alto, determine: (a) la aceleración de A respecto a B; (b) la velocidad de A respecto a B; (c) el vector de posición de A respecto a B.



P2.154

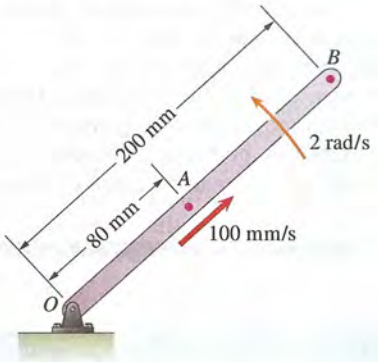
2.155 En un proceso de maquinado, el disco gira respecto al punto fijo O con una velocidad angular constante de 10 rad/s. En el sistema coordenado sin giro que se muestra, ¿cuál es la magnitud de la velocidad de A respecto a B?



P2.155

2.156 En el Prob. 2.155, ¿cuál es la magnitud de la aceleración de A respecto a B.

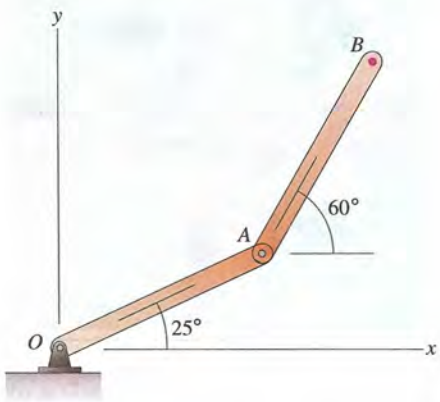
2.157 Una barra gira respecto al punto fijo O mostrado con una velocidad angular constante de 2 rad/s. El punto A se mueve hacia afuera a lo largo de la barra con una velocidad constante de 100 mm/s. El punto B es un punto fijo sobre la barra. En el instante mostrado, ¿cuál es la magnitud de la velocidad del punto A respecto al punto B?



P2.157

2.158 En el Prob. 2.157, ¿cuál es la magnitud de la aceleración del punto B respecto al punto A en el instante mostrado?

2.159 Las barras OA y AB mostradas tienen cada una 400 mm de longitud y giran en el plano x-y. OA tiene una velocidad angular antihoraria de 10 rad/s y una aceleración angular antihoraria de 2 rad/s^2. AB tiene una velocidad angular constante antihoraria de 5 rad/s. ¿Cuál es la velocidad del punto B respecto al punto A en términos del sistema coordenado fijo?



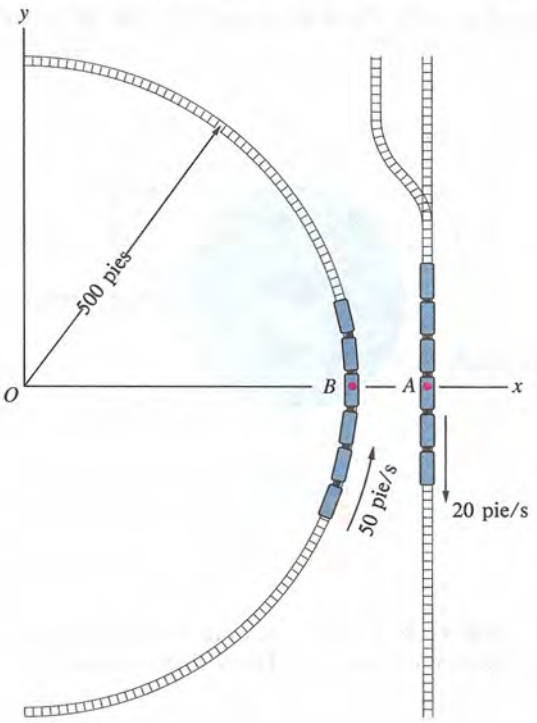
P2.159

2.160 En el Prob. 2.159, ¿cuál es la aceleración del punto B respecto al punto A?

2.161 En el Prob. 2.159, ¿cuál es la velocidad del punto B respecto al punto fijo O?

2.162 En el Prob. 2.159, ¿cuál es la aceleración del punto B respecto al punto fijo O?

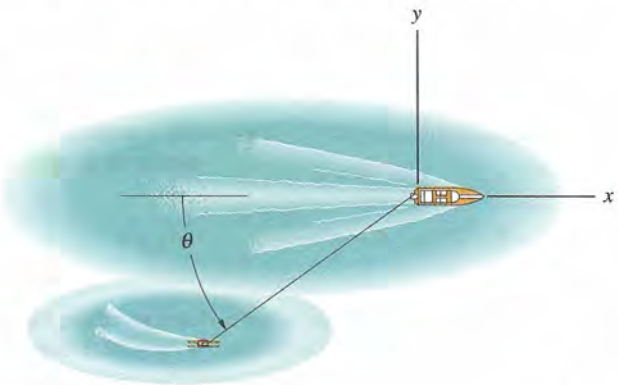
2.163 En la Fig. P2.163, el tren sobre la vía circular viaja con una velocidad constante de 50 pie/s. El tren sobre la vía recta viaja a 20 pie/s y está incrementando su velocidad a 2 pie/s^2. En el sistema coordenado fijo a la Tierra que se muestra, ¿cuál es la velocidad del pasajero A respecto al pasajero B?



P2.163

2.164 En el Prob. 2.163, ¿cuál es la aceleración del pasajero A respecto al pasajero B?

2.165 En la Fig. P2.165, la velocidad del bote respecto al sistema coordenado fijo a la Tierra es 40**i** pie/s y es constante. La longitud de la cuerda de remolque es de 50 pies. El ángulo θ es de 30° y aumenta a una razón constante de 10°/s. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración del esquiador respecto al bote?



P2.165

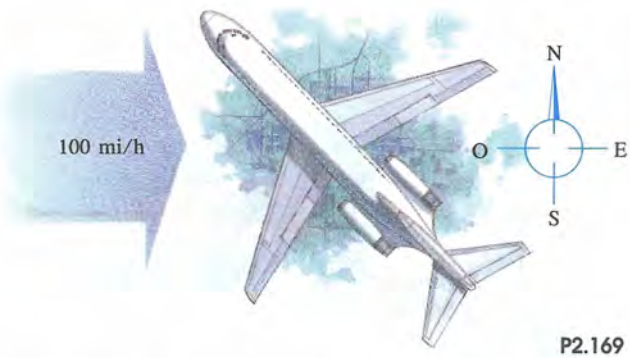
2.166 En el Prob. 2.165, ¿cuáles son la velocidad y la aceleración del esquiador respecto a la Tierra?

2.167 Un jugador de hockey patina con componentes de velocidad $v_x = 4$ pie/s, $v_z = -20$ pie/s cuando golpea el disco con una velocidad de 100 pie/s *respecto a sí mismo*. La posición del disco al ser golpeado es $x = 12$ pies, $z = 12$ pies. Si el jugador golpea el disco de modo que su vector de velocidad *respecto a él* esté dirigido hacia el centro de la meta, ¿dónde interseca el disco al eje x? ¿Entrará a la meta de 6 pies de ancho?

P2.167

2.168 En el Prob. 2.167, ¿a qué punto sobre el eje x debe el jugador dirigir el vector de velocidad del disco relativo a él para que entre por el centro de la meta?

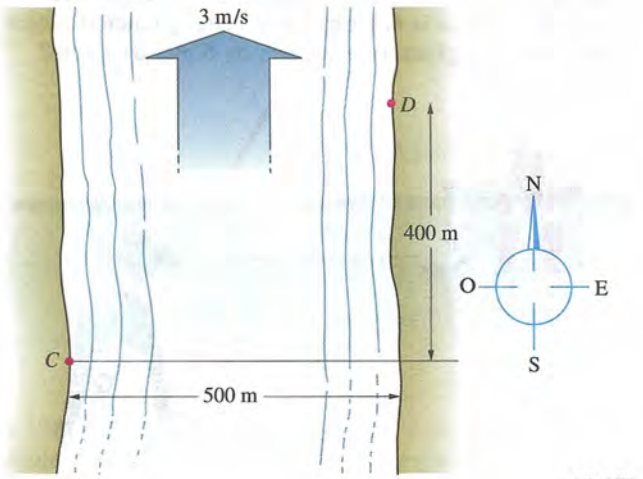
2.169 Un avión vuela en una corriente de aire que fluye hacia el este a 100 mi/h. La velocidad del avión respecto al aire es de 500 mi/h hacia el noroeste. ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad del avión respecto a la Tierra?



P2.169

2.170 En el Prob. 2.169, si el piloto quiere volar hacia una ciudad al noroeste de su posición presente, ¿en qué dirección debe dirigir el avión y cuál será la magnitud de su velocidad respecto a la Tierra?

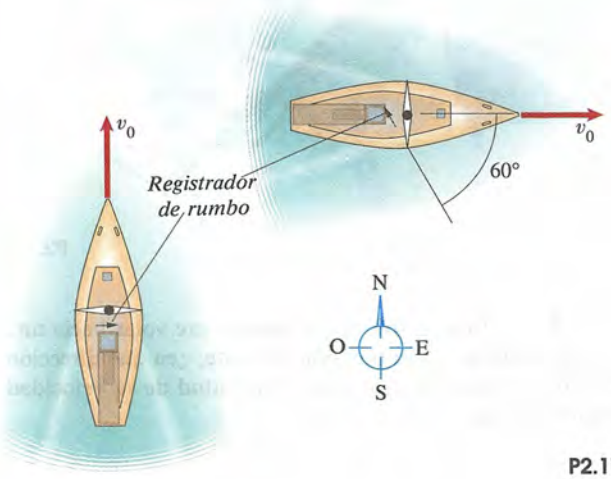
2.171 Un río fluye hacia el norte a 3 m/s (suponga que la corriente es uniforme). Si se quiere viajar en línea recta del punto C al punto D en un bote que navega a una velocidad constante de 10 m/s respecto al agua, ¿en qué dirección debe apuntar el bote? ¿Cuánto tarda en efectuar el cruce?



P2.171

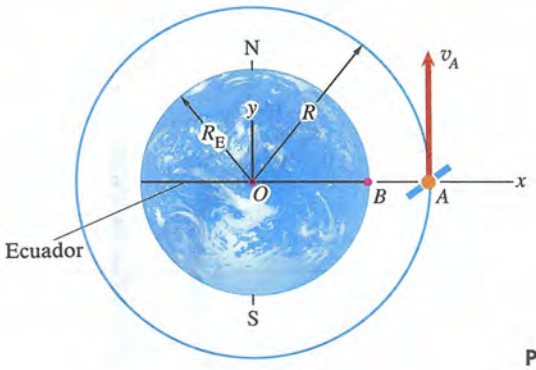
2.172 En el Prob. 2.171, ¿cuál es la mínima velocidad del bote respecto al agua, necesaria para navegar del punto C al punto D?

2.173 Una embarcación navega hacia el norte con velocidad v_0 respecto a la Tierra y luego hacia el este a la misma velocidad. La velocidad del viento es uniforme y constante. Un "registrador de rumbo" a bordo apunta en la dirección de la velocidad del viento respecto a la embarcación. ¿Cuáles son la dirección y la magnitud de la velocidad del viento respecto a la Tierra? (Obtenga la magnitud de la velocidad del viento en términos de v_0.)



P2.173

2.174 El origen O del sistema coordenado sin giro que se muestra está en el centro de la Tierra y el eje y apunta hacia el norte. El satélite A sobre el eje x está en una órbita circular polar de radio R y su velocidad es $v_A\mathbf{j}$. Sea ω la velocidad angular de la Tierra. ¿Cuál es la velocidad del satélite respecto al punto B sobre la Tierra directamente abajo del satélite?



P2.174

2.175 En el Prob. 2.174, ¿cuál es la aceleración del satelite respecto al punto B sobre la Tierra directamente abajo del satélite?

Ejemplo con computador

El siguiente ejemplo y los problemas están diseñados para utilizar una calculadora programable o un computador.

Ejemplo 2.18

Con la flotación considerada, la aceleración hacia abajo de una bola de acero que cae en un cierto líquido es $a = 0.9g - cv$, donde c es una constante proporcional a la viscosidad del líquido. Para determinar la viscosidad, se libera la bola del reposo en la parte superior de un tanque de 2 m de profundidad. Si la bola tarda 2 s en alcanzar el fondo, ¿cuál es el valor de c?

ESTRATEGIA

Podemos obtener una ecuación para c determinando en función del tiempo la distancia que la bola cae.

SOLUCIÓN

Medimos la posición s de la bola hacia abajo desde el punto en que se libera (Fig. a) y hacemos que $t = 0$ sea el tiempo inicial.

La aceleración es

$$a = \frac{dv}{dt} = 0.9g - cv.$$

Separando variables e integrando,

$$\int_0^v \frac{dv}{0.9g - cv} = \int_0^t dt,$$

obtenemos

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{0.9g}{c}(1 - e^{-ct}).$$

Integrando esta ecuación con respecto al tiempo, obtenemos la distancia que la bola ha caído desde que se libera en función del tiempo:

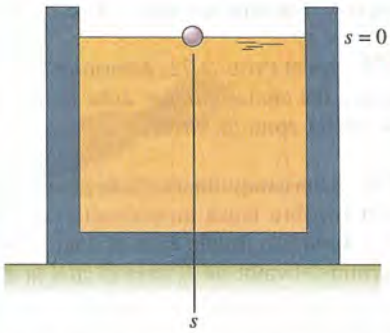
$$s = \frac{0.9g}{c^2}(ct - 1 + e^{-ct}).$$

Sabemos que $s = 2$ m cuando $t = 2$ s, de modo que para determinar c se requiere resolver la ecuación

$$f(c) = \frac{(0.9)(9.81)}{c^2}(2c - 1 + e^{-2c}) - 2 = 0.$$

No podemos resolver esta trascendente ecuación en forma cerrada para determinar c. Hay programas para resolver problemas, como *Mathcad* y *TK! Solver*, diseñados para obtener raíces de tales ecuaciones. Otro enfoque es calcular el valor de $f(c)$ para un intervalo de valores de c y graficar los resultados, como hicimos en la Fig. 2.51. De la gráfica calculamos que $c = 8.3$ s^{-1}.

Figura 2.50



(a) La bola se libera del reposo en la superficie.

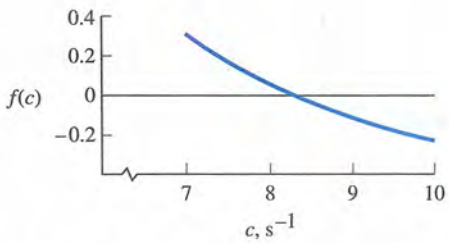


Figura 2.51

Gráfica de la función $f(c)$.

Problemas

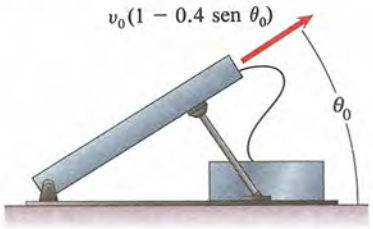
2.176 Un ingeniero que analiza un proceso de maquinado determina que de $t = 0$ a $t = 4$ s, la pieza de trabajo parte del reposo y se mueve en línea recta con aceleración

$$a = 2 + t^{0.5} - t^{1.5} \text{ pie/s}^2.$$

(a) Dibuje una gráfica de la posición de la pieza respecto a su posición en $t = 0$ para valores de t de $t = 0$ a $t = 4$ s. (b) Calcule la velocidad máxima durante este intervalo de tiempo y el tiempo en que ocurre.

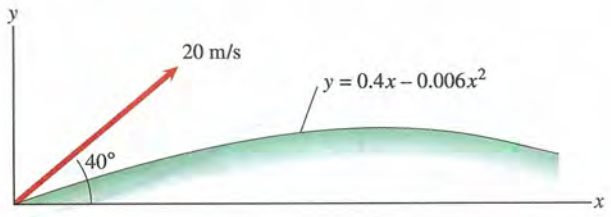
2.177 En el Prob. 2.72, determine el intervalo de ángulos θ dentro del cual el *pitcher* debe lanzar la pelota para que pase por la zona de *strike*.

2.178 Una catapulta diseñada para arrojar un cable a barcos en zozobra lanza un proyectil con velocidad inicial v_0 $(1 - 0.4 \text{ sen } \theta_0)$, donde θ_0 es el ángulo sobre la horizontal. Determine el valor de θ_0 para el cual la distancia alcanzada por el proyectil es máxima, y demuestre que la distancia máxima es $0.559\ v_0^2/g$.



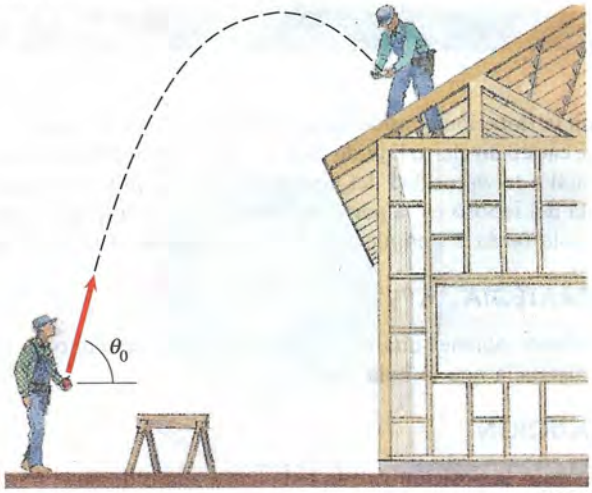
P2.178

2.179 En $t = 0$ un proyectil parte del origen a una velocidad inicial de 20 m/s a 40° sobre la horizontal. El perfil de la superficie del terreno sobre el que viaja puede aproximarse con la ecuación $y = 0.4x - 0.006x^2$, donde x y y están en metros. Determine en forma aproximada las coordenadas del punto en que toca el terreno.



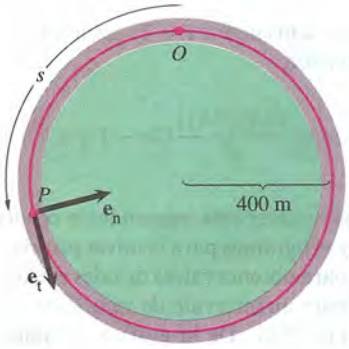
P2.179

2.180 Un carpintero que trabaja en una casa pide a su ayudante que le lance una manzana. La manzana es lanzada a 32 pie/s. ¿Cuáles dos valores de θ_0 permiten que la manzana caiga en la mano del carpintero, a 12 pies en la horizontal y 12 pies en la vertical del punto desde donde se lanza?



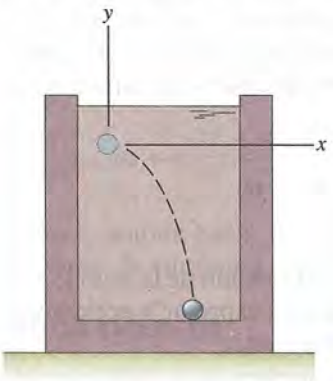
P2.180

2.181 Una motocicleta parte del reposo en $t = 0$ y se mueve a lo largo de una pista circular de 400 m de radio. La componente tangencial de su aceleración es $a_t = 2 + 0.2t$ m/s^2. Cuando la magnitud de su aceleración total es 6 m/s^2, la fricción ya no puede mantenerlo en la pista circular y patina hacia afuera. ¿Cuánto tarda, desde el inicio, en empezar a patinar y a qué velocidad va entonces?



P2.181

2.182 En $t = 0$, una bola de acero en un tanque de aceite recibe una velocidad horizontal $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}$ m/s. Las componentes de su aceleración son $a_x = -cv_x$, $a_y = -0.8g - cv_y$, $a_z = -cv_z$, donde c es una constante. Cuando la bola toca el fondo del tanque, su posición respecto a su posición en $t = 0$ es $\mathbf{r} = 0.8\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (m). ¿Cuál es el valor de c?



P2.182

2.183 Las coordenadas polares de un punto P que se mueve en el plano x-y son $r = t^3 - 4t$ m, $\theta = t^2 - t$ rad.
(a) Dibuje una gráfica de la magnitud de la velocidad de P de $t = 0$ a $t = 2$ s.
(b) Calcule la magnitud mínima de la velocidad y el tiempo en que ocurre.

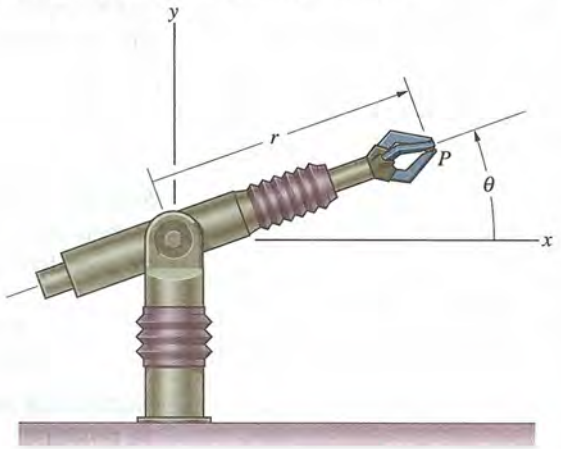
2.184 (a) Dibuje una gráfica de la magnitud de la aceleración del punto P del Prob. 2.183 de $t = 0$ a $t = 2$ s.
(b) Calcule la magnitud mínima de la aceleración y el tiempo en que ocurre.

2.185 El robot de la figura está programado de manera que el punto P describa la trayectoria

$$r = 1 - 0.5 \cos 2\pi t \text{ m},$$

$$\theta = 0.5 - 0.2 \operatorname{sen}[2\pi(t - 0.1)] \text{ rad}.$$

Determine los valores de r y θ en los que la magnitud de la velocidad de P alcanza su valor máximo.



P2.185

2.186 En el Prob. 2.185, determine los valores de r y θ para los que la magnitud de la aceleración de P alcanza su valor máximo.

Resumen del capítulo

La posición de un punto P respecto a un punto O se da con el **vector de posición r** que va de O a P. La **velocidad** de P respecto a O es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \text{Ec. (2.1)}$$

y la **aceleración** de P respecto a O es

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad \text{Ec. (2.2)}$$

Movimiento en línea recta

La posición de un punto P sobre una línea recta respecto a un punto de referencia O se especifica mediante una coordenada s medida a lo largo de la línea de O a P. La coordenada s y la velocidad y aceleración de P a lo largo de la línea están relacionadas por

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad \text{Ec. (2.3)}$$

$$a = \frac{dv}{dt}. \qquad \text{Ec. (2.4)}$$

Si la aceleración se especifica en función del tiempo, la posición y velocidad se pueden determinar en función del tiempo por integración. Si la aceleración se especifica en función de la velocidad, $dv/dt = a(v)$, entonces la velocidad se puede determinar en función del tiempo mediante la separación de variables:

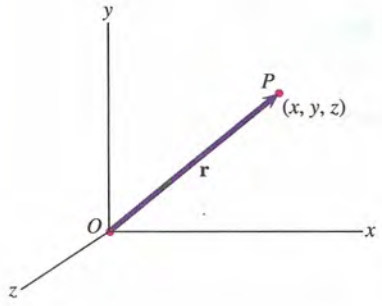
$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} = \int_{t_0}^{t} dt. \qquad \text{Ec. (2.16)}$$

Si la aceleración se especifica como función de la posición, $dv/dt = a(s)$, la regla de la cadena se puede usar para expresar la aceleración en términos de una derivada respecto a la posición:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v = a(s).$$

Separando variables, la velocidad se puede determinar como función de la posición:

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a(s)\,ds. \qquad \text{Ec. (2.19)}$$



Coordenadas cartesianas

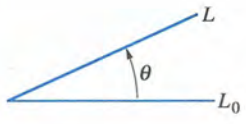
La posición, la velocidad, y la aceleración son [Ecs. (2.21) a (2.25)]

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k} = \frac{dv_x}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\,\mathbf{k}.$$

Las ecuaciones que describen el movimiento en cada dirección coordenada son idénticas en forma a las ecuaciones que describen el movimiento de un punto a lo largo de una línea recta.



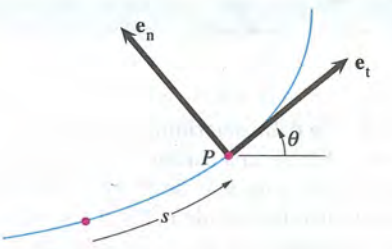
Movimiento angular

La velocidad angular ω y la aceleración angular α de L respecto a L_0 son

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \text{Ec. (2.31)}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \qquad \text{Ec. (2.32)}$$

Componentes normal y tangencial



La velocidad y la aceleración son

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_t = \frac{ds}{dt}\,\mathbf{e}_t, \qquad \text{Ec. (2.38)}$$

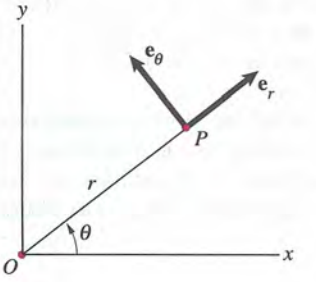
$$\mathbf{a} = a_t\,\mathbf{e}_t + a_n\,\mathbf{e}_n, \qquad \text{Ec. (2.39)}$$

donde

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = v\frac{d\theta}{dt} = \frac{v^2}{\rho}. \qquad \text{Ec. (2.40)}$$

El vector unitario $\mathbf{e}_n$ apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria. El término ρ es el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria.

Coordenadas polares



La posición, la velocidad, y la aceleración son

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r, \qquad \text{Ec. (2.44)}$$

$$\mathbf{v} = v_r\,\mathbf{e}_r + v_\theta\,\mathbf{e}_\theta = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{e}_r + r\omega\mathbf{e}_\theta, \qquad \text{Ec. (2.49)}$$

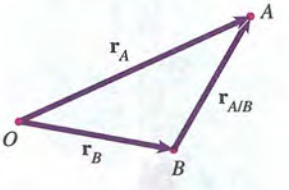
$$\mathbf{a} = a_r\,\mathbf{e}_r + a_\theta\,\mathbf{e}_\theta, \qquad \text{Ec. (2.50)}$$

donde

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2,$$

$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = r\alpha + 2\frac{dr}{dt}\omega. \qquad \text{Ec. (2.51)}$$

Movimiento relativo



Los vectores $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ especifican las posiciones de A y B respecto a O, y $\mathbf{r}_{A/B}$ especifica la posición de A respecto a B:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}. \qquad \text{Ec. (2.71)}$$

Derivando esta ecuación se obtienen las relaciones

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}, \qquad \text{Ec. (2.72)}$$

donde $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ son las velocidades de A y B respecto a O y $\mathbf{v}_{A/B} = d\mathbf{r}_{A/B}/dt$ es la velocidad de A respecto a B, y

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}, \qquad \text{Ec. (2.73)}$$

donde $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ son las aceleraciones de A y B respecto a O y $\mathbf{a}_{A/B} = d\mathbf{v}_{A/B}/dt$ es la aceleración de A respecto a B.

Problemas de repaso

2.187 Se debe determinar la duración de la luz ámbar en la intersección de una carretera. Los vehículos se aproximan a la intersección a no más de 65 mi/h, los tiempos de reacción de los conductores son de 0.5 s, y los vehículos pueden alcanzar con seguridad una desaceleración de al menos $0.4g$.
(a) ¿Cuánto tiempo debe permanecer la luz amarilla para que los conductores se detengan con seguridad antes de que se encienda la luz roja?
(b) ¿A qué distancia mínima deben estar los vehículos de la intersección cuando se pone la luz amarilla para poder detenerse con seguridad en la intersección?

2.188 La aceleración de un punto que se mueve a lo largo de una línea recta es $a = 4t + 2$ (m/s^2). Cuando $t = 2$ s, su posición es $s = 36$ m, y cuando $t = 4$ s, su posición es $s = 90$ m. ¿Cuál es su velocidad cuando $t = 4$ s?

2.189 Un cohete despega en línea recta ascendente. Su aceleración durante los 2 s que su motor está encendido es de 25 m/s^2. Ignore la resistencia aerodinámica. Determine (a) la velocidad máxima durante el vuelo; (b) la altura máxima alcanzada.

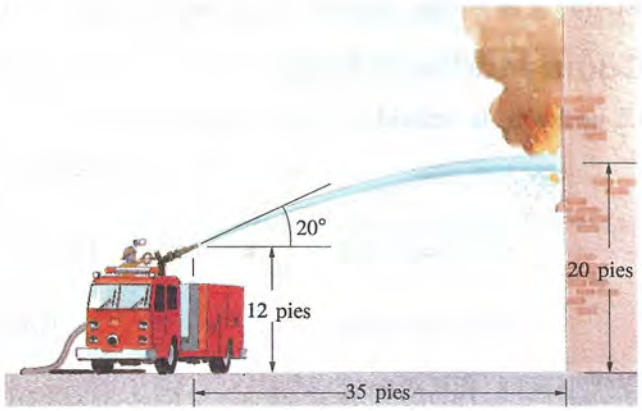
P2.189

2.190 En el Prob. 2.189, si el paracaídas del cohete no se abre, ¿cuál es el tiempo total de vuelo desde el despegue hasta que el cohete toca el suelo?

2.191 La aceleración de un punto que se mueve a lo largo de una línea recta es $a = -cv^3$, donde c es una constante. Si la velocidad del punto es v_0, ¿qué distancia se mueve antes de que su velocidad disminuya a $v_0/2$?

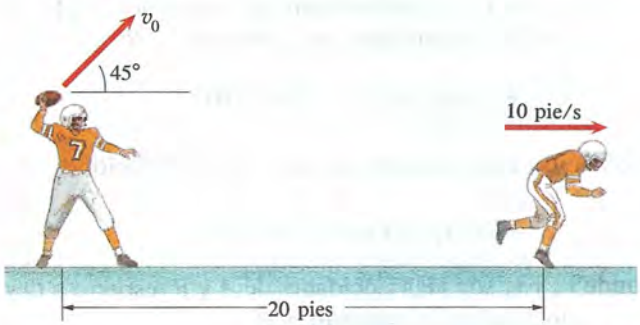
2.192 El agua sale de la boquilla de una manguera a 20° sobre la horizontal y toca la pared en el punto indicado. ¿Cuál es la velocidad del agua cuando sale de la boquilla?

Estrategia: Determine el movimiento del agua tratando cada partícula de agua como un proyectil.



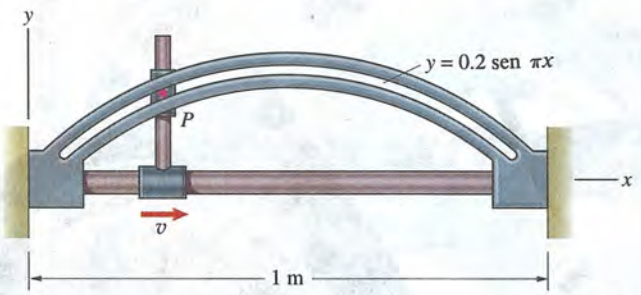
P2.192

2.193 Un mariscal de campo lanza el balón con velocidad v_0 a 45° sobre la horizontal. En el mismo instante, el receptor, que se encuentra 20 pies adelante de él, empieza a correr en línea recta a 10 pie/s y recibe el balón. Si el balón se lanzó y recibió a la misma altura sobre el terreno, ¿cuál es la velocidad v_0?



P2.193

2.194 La velocidad $v = 2$ m/s es constante. ¿Cuáles son las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto P cuando $x = 0.25$ m?

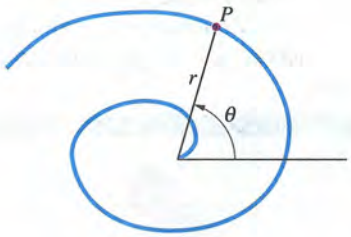


P2.194

2.195 En el Prob. 2.194, ¿cuál es la aceleración del punto P en términos de las componentes normal y tangencial cuando $x = 0.25$ m? ¿Cuál es el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria?

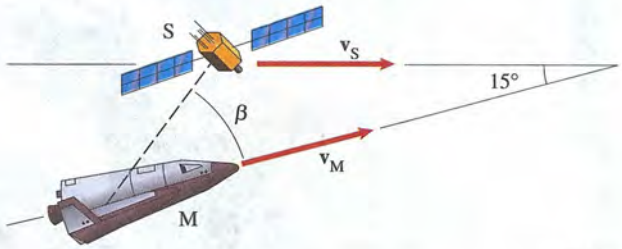
2.196 En el Prob. 2.194, ¿cuál es la aceleración del punto P en términos de las componentes radial y transversal (coordenadas polares) cuando $x = 0.25$ m?

2.197 Un punto P se mueve a lo largo de la trayectoria espiral $r = (0.1)\theta$ pie, donde θ está en radianes. La posición angular $\theta = 2t$ rad, donde t está en segundos, y $r = 0$ en $t = 0$. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de P en $t = 1$ s.



P2.197

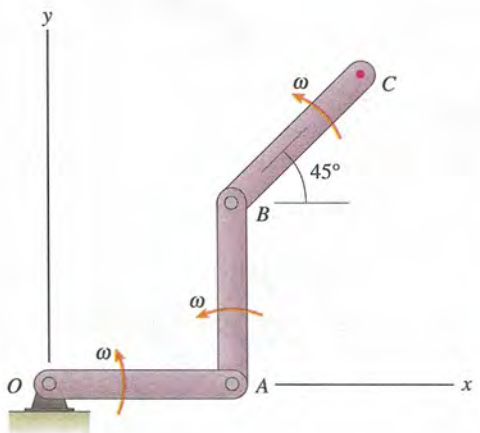
2.198 Un vehículo tripulado (M) intenta encontrarse con un satélite (S) para repararlo (no se muestran a escala). La magnitud de la velocidad del satélite es $|\mathbf{v}_S| = 6$ km/s, y una visual determina que el ángulo $\beta = 40°$. Si se supone que sus velocidades permanecen constantes y que los vehículos se mueven a lo largo de las líneas rectas mostradas, ¿cuál debe ser la magnitud de $\mathbf{v}_M$ para que se realice el encuentro?



P2.198

2.199 En Prob. 2.198, ¿cuál es la magnitud de la velocidad del vehículo tripulado respecto a la nave espacial una vez que la magnitud de $\mathbf{v}_M$ se ha ajustado para que se dé el encuentro?

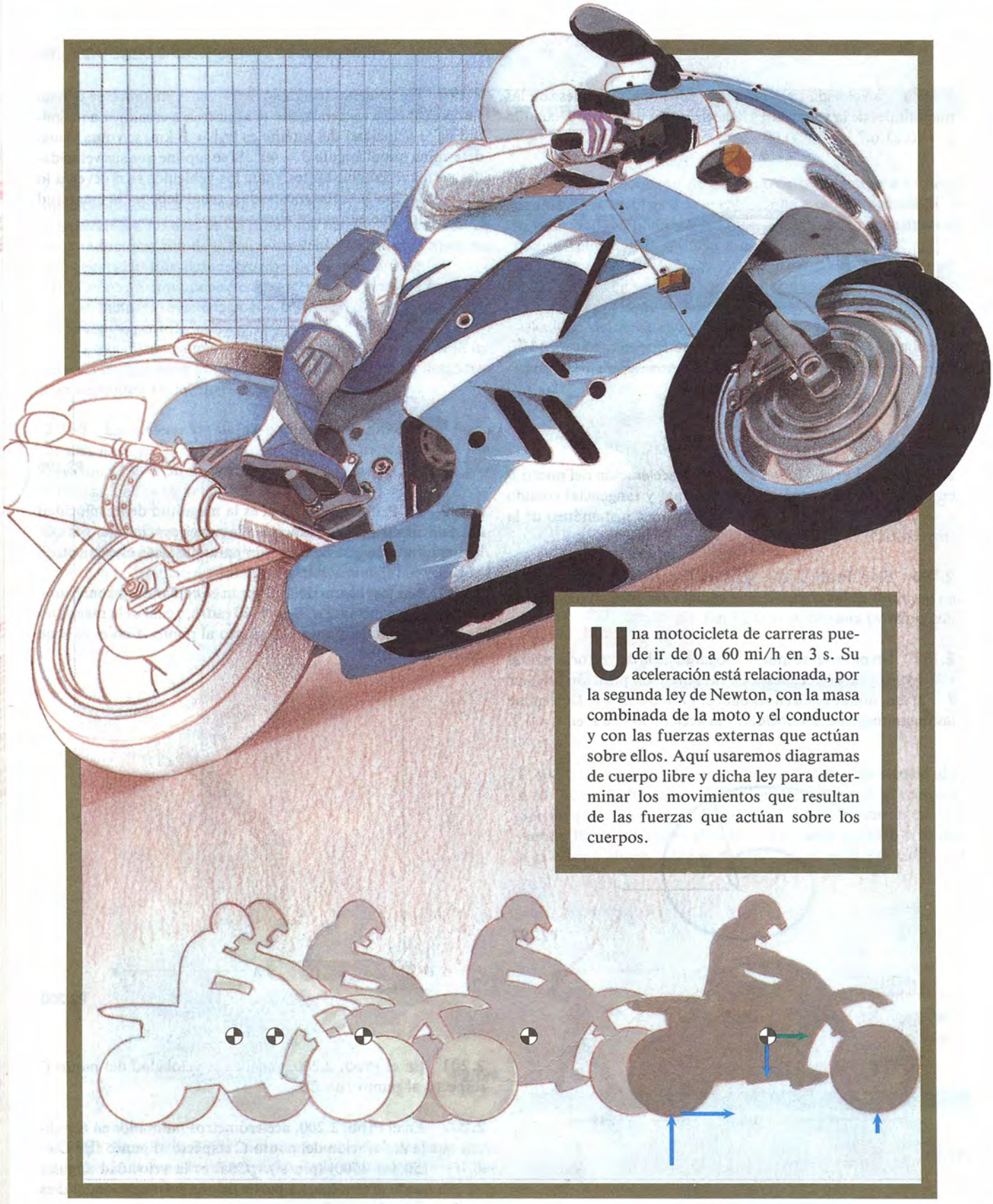
2.200 Las tres barras de 1 pie giran en el plano x-y con velocidad angular constante ω. Si $\omega = 20$ rad/s, ¿cuál es la magnitud de la velocidad del punto C respecto al punto A en el sistema coordenado fijo?



P2.200

2.201 En el Prob. 2.200, ¿cuál es la velocidad del punto C respecto al punto fijo O?

2.202 En el Prob. 2.200, acelerómetros montados en C indican que la aceleración del punto C respecto al punto fijo O es $\mathbf{a}_C = -1500\mathbf{i} - 1500\mathbf{j}$ (pie/s^2). ¿Cuál es la velocidad angular ω? ¿Se puede determinar, a partir de esta información, si ω es antihoraria u horaria?



Una motocicleta de carreras puede ir de 0 a 60 mi/h en 3 s. Su aceleración está relacionada, por la segunda ley de Newton, con la masa combinada de la moto y el conductor y con las fuerzas externas que actúan sobre ellos. Aquí usaremos diagramas de cuerpo libre y dicha ley para determinar los movimientos que resultan de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos.

Capítulo 3

Fuerza, masa y aceleración

HASTA ahora hemos analizado los movimientos de cuerpos sin considerar las fuerzas que los causan. En este capítulo relacionaremos causa y efecto: dibujando el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo para identificar las fuerzas que actúan sobre él, podemos usar la segunda ley de Newton para determinar su aceleración. Una vez conocida la aceleración, podemos determinar su velocidad y posición con los métodos desarrollados en el capítulo 2.

3.1 *Segunda ley de Newton*

La fuerza sobre una partícula es igual a la razón de cambio de su **cantidad de movimiento lineal,**† producto de su masa y de su velocidad:

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}).$$

Si la masa de la partícula es constante, la fuerza es igual al producto de su masa y de su aceleración:

$$\boxed{\mathbf{f} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.} \tag{3.1}$$

Ya indicamos que la segunda ley precisa los términos *fuerza* y *masa*. Una vez elegida una unidad de masa, la unidad de fuerza se define como la fuerza necesaria para dar a la unidad de masa una aceleración de magnitud unitaria. Por ejemplo, el newton, que es la unidad de fuerza en SI, es la fuerza necesaria para imprimir a una masa de un kilogramo una aceleración de un metro sobre segundo al cuadrado. En principio, la segunda ley da el valor de cualquier fuerza y la masa de cualquier cuerpo. Sometiendo una masa de un kilogramo a una fuerza arbitraria y midiendo la aceleración, podemos encontrar con ayuda de la segunda ley la dirección de la fuerza y su magnitud en newtons. Sometiendo una masa arbitraria a una fuerza de un newton y midiendo la aceleración, podemos encontrar con dicha ley el valor de la masa en kilogramos.

Si se conocen la masa de una partícula y la fuerza que actúa sobre ella, con la segunda ley podemos determinar su aceleración. Ya aprendimos a determinar la velocidad, posición y trayectoria de un punto si se conoce su aceleración. Por tanto, *la segunda ley ayuda a determinar el movimiento de una partícula si se conoce la fuerza que actúa sobre ella.*

†En esta obra usamos el término *cantidad de movimiento* para el término original *momentum*. Sin embargo, en otros libros el término se traduce como *ímpetu* o, simplemente, *momento*. Aparte, para *angular momentum* se emplea aquí *momento angular*, aunque habrá quien lo traduzca como *ímpetu angular*. (*N. del R.T.*)

3.2 *Marcos de referencia inerciales*

Cuando se analizó el movimiento de un punto, especificamos su posición, velocidad y aceleración respecto a un punto O de referencia arbitrario. Sin embargo, la segunda ley de Newton no se puede expresar en términos de cualquier punto de referencia. Si ninguna fuerza actúa sobre una partícula, medimos su movimiento respecto a determinado punto O de referencia, y concluimos que su aceleración es cero. En términos de este punto de referencia, la segunda ley de Newton concuerda con nuestra observación, pero si luego medimos el movimiento de la partícula respecto a un punto O' que tiene una aceleración respecto a O, determinaremos que su aceleración no es cero. Respecto a O', la segunda ley de Newton, por lo menos en la forma dada por la Ec. (3.1), no predice el resultado correcto. La Ec. (3.1) tampoco predice el resultado correcto si usamos un sistema coordenado, o marco de referencia, que esté girando.

Para Newton, la segunda ley debe expresarse en términos de un marco de referencia sin giro y sin aceleración respecto a las "estrellas fijas". Aun

si las estrellas estuvieran fijas, esto no es práctico, ya que virtualmente todo marco de referencia conveniente acelera, gira o hace ambas cosas debido al movimiento de la Tierra. La segunda ley se *puede* aplicar rigurosamente usando marcos de referencia sometidos a giros y aceleraciones, mediante la consideración apropiada de la aceleración y la rotación. En el Cap. 6 explicaremos cómo hacerlo. Por ahora, necesitamos indicar cuándo sí y cuándo no se puede aplicar la segunda ley de Newton.

Por fortuna, en casi todas las aplicaciones "mundanas" se puede aplicar la segunda ley de Newton en la forma dada por la Ec. (3.1) en términos de un marco de referencia fijo respecto a la Tierra, y obtener respuestas suficientemente precisas. Por ejemplo, si se tira una tiza en un cuarto, con un sistema coordenado fijo respecto al cuarto se puede predecir su movimiento. Mientras la tiza está en movimiento, gira la Tierra y, con ella, el sistema coordenado. Pero, como el *vuelo de la tiza es breve*, el efecto en la predicción es muy pequeño (la Tierra gira con lentitud; su velocidad angular es la mitad de la de la aguja horaria de un reloj). También se pueden obtener respuestas exactas en la mayoría de los casos, usando un marco de referencia que se traslade con velocidad constante respecto a la Tierra. Por ejemplo, si usted y un amigo juegan tenis en un barco que se mueve a velocidad constante, con la Ec. (3.1) en términos de un sistema coordenado fijo respecto al barco se puede analizar el movimiento de la pelota. Pero no se puede si el barco está girando o modificando su velocidad. En situaciones no "mundanas", como el movimiento de satélites y naves espaciales cerca de la Tierra, se puede aplicar la Ec. (3.1) con un sistema coordenado sin giro con origen en el centro de la Tierra.

Si se puede usar un marco de referencia para aplicar la Ec. (3.1), decimos que el marco de referencia es *inercial*. En Cap. 6 analizaremos los marcos de referencia inerciales. Por ahora, suponga que los ejemplos y problemas están planteados con respecto a marcos de referencia inerciales.

3.3 *Ecuación de movimiento para el centro de masa*

La segunda ley de Newton se postula para una partícula, o pequeño elemento de materia, pero una ecuación con exactamente la misma forma describe el movimiento del *centro de masa* de un cuerpo *arbitrario*. Podemos demostrar que la fuerza externa total sobre un cuerpo cualquiera es igual al producto de su masa por la aceleración de su centro de masa.

Dividimos *conceptualmente* un cuerpo en N partículas. Sea m_i la masa de la i-ésima partícula, y sea $\mathbf{r}_i$ su vector de posición (Fig. 3.1a). La masa m del cuerpo es la suma de las masas de las partículas,

$$m = \sum_i m_i,$$

donde la sumatoria con subíndice i significa "la suma sobre i de 1 a N". La posición del centro de masa del cuerpo es

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m}.$$

Derivando dos veces esta expresión obtenemos

$$\sum_i m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a}, \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{a}$ es la aceleración del centro de masa del cuerpo.

La i-ésima partícula puede estar sometida a fuerzas por las otras partículas. Sea $\mathbf{f}_{ij}$ la fuerza ejercida por la j-ésima partícula sobre la i-ésima. La tercera ley de Newton establece que la i-ésima partícula ejerce sobre la j-ésima partícula una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta: $\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$. Si denotamos la fuerza externa sobre la i-ésima partícula (i.e., la fuerza total que ejercen sobre la i-ésima partícula otros cuerpos) con $\mathbf{f}_i^{\mathrm{E}}$, la segunda ley de Newton para la i-ésima partícula es (Fig. 3.1b)

$$\sum_j \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i^{\mathrm{E}} = m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}.$$

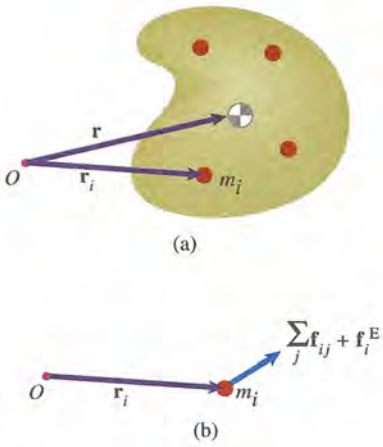


Figura 3.1

(a) División de un cuerpo en partículas. El vector $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la i-ésima partícula y $\mathbf{r}$ es el vector de posición del centro de masa del cuerpo. (b) Fuerzas sobre la i-ésima partícula.

Podemos escribir esta ecuación para cada partícula del cuerpo. Sumando las ecuaciones resultantes de $i = 1$ a N, obtenemos

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} + \sum_i \mathbf{f}_i^{\mathrm{E}} = m\mathbf{a}, \tag{3.3}$$

y usamos Ec. (3.2). El primer término del miembro izquierdo, que es la suma de las fuerzas internas sobre el cuerpo, es cero por la tercera ley:

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{f}_{31} + \cdots = \mathbf{0}.$$

El segundo término del miembro izquierdo de la Ec. (3.3) es la suma de las fuerzas externas sobre el cuerpo. Denotándolo con $\Sigma\mathbf{F}$, concluimos que la suma de las fuerzas externas es igual al producto de la masa por la aceleración del centro de masa:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}.} \tag{3.4}$$

Como esta ecuación es idéntica en forma al postulado de Newton para una partícula, la llamamos segunda ley de Newton. Al obtener este resultado no restringimos la naturaleza del "cuerpo" ni su estado de movimiento. La suma de las fuerzas externas sobre un cuerpo o conjunto de cuerpos (sólido, líquido o gas) es igual al producto de la masa total por la aceleración del centro de masa. Por ejemplo, un transbordador espacial está en órbita y aún tiene combustible. Si se encienden sus motores, el combustible empieza a agitarse en forma complicada, afectando el movimiento del transbordador debido a las fuerzas internas entre el combustible y el transbordador. Podemos usar la Ec. (3.4) para determinar la aceleración *exacta* del centro de masa del transbordador, incluyendo el combustible que contiene, y de ahí obtener la velocidad, la posición y la trayectoria del centro de masa.

3.4 Aplicaciones

Para aplicar la segunda ley de Newton a una situación particular, se debe escoger un sistema coordenado. Se encontrará a menudo que las fuerzas se pueden descomponer convenientemente en componentes de un sistema coordenado particular, o con base en la trayectoria del cuerpo. En las siguientes secciones usaremos diferentes tipos de sistemas coordenados para determinar los movimientos de los cuerpos.

Coordenadas cartesianas y movimiento en línea recta

Si expresamos la fuerza total y la aceleración de la segunda ley de Newton en términos de sus componentes en un sistema coordenado cartesiano,

$$(\Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k}) = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}),$$

obtenemos tres ecuaciones escalares de movimiento:

$$\boxed{\Sigma F_x = ma_x, \qquad \Sigma F_y = ma_y, \qquad \Sigma F_z = ma_z.} \tag{3.5}$$

La fuerza total en cada dirección coordenada es igual al producto de la masa por la componente de la aceleración en esa dirección (Fig. 3.2a).

Si el movimiento se limita al plano x-y, $a_z = 0$, por lo que la suma de las fuerzas en la dirección z es cero. Así, cuando el movimiento de un cuerpo se limita a un plano fijo, la componente de la fuerza total normal al plano es igual a cero. Para un movimiento en línea recta a lo largo del eje x (Fig. 3.2b), las Ecs. (3.5) son

$$\Sigma F_x = ma_x, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma F_z = 0.$$

En el movimiento en línea recta, las componentes de la fuerza total perpendicular a la línea son iguales a cero, y la componente de la fuerza total tangente a la línea es igual al producto de la masa por la aceleración del cuerpo a lo largo de la línea.

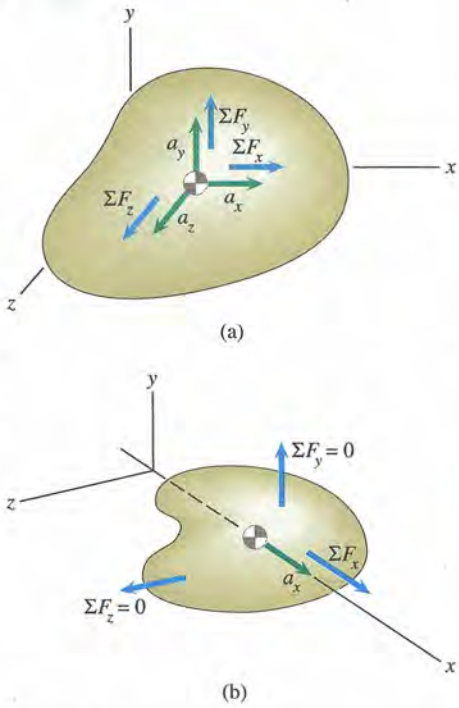


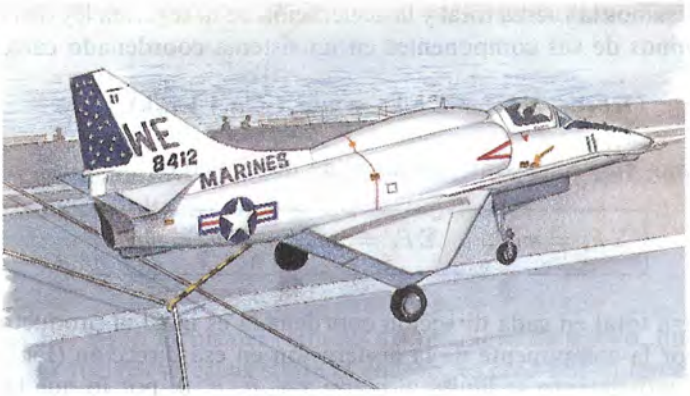
Figura 3.2
(a) Componentes de fuerza y aceleración en coordenadas cartesianas.
(b) Un cuerpo con movimiento en línea recta a lo largo del eje x.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de la segunda ley de Newton para analizar los movimientos de los cuerpos. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo se pueden identificar las fuerzas externas que actúan sobre él, y luego se puede usar la segunda ley de Newton para determinar su aceleración. Inversamente, si se conoce el movimiento de un cuerpo, se puede usar la segunda ley de Newton para determinar las fuerzas externas que actúan sobre él. En particular, si se sabe que la aceleración de un cuerpo en una dirección específica es nula, la suma de las fuerzas externas en esa dirección también debe ser nula.

Ejemplo 3.1

El avión de la Fig. 3.3 aterriza con una velocidad horizontal de 50 m/s respecto al portaaviones. La componente horizontal de la fuerza ejercida sobre el mecanismo de detención tiene una magnitud de $10\,000v$ N, donde v es la velocidad del avión en metros sobre segundo. La masa del avión es de 6500 kg.
(a) ¿Qué fuerza horizontal máxima ejerce el mecanismo de detención sobre el avión?
(b) Si se ignoran las otras fuerzas horizontales, ¿qué distancia recorre el avión antes de detenerse?

Figura 3.3



ESTRATEGIA

(a) Como el avión empieza a desacelerar cuando entra en contacto con el mecanismo de detención, la fuerza máxima se presenta durante ese contacto, es decir, cuando su velocidad es $v = 50$ m/s.
(b) La fuerza horizontal ejercida por el mecanismo de detención es igual al producto de la masa del avión por su aceleración. Una vez conocida la aceleración, podemos integrar para determinar la distancia requerida para que el avión se detenga.

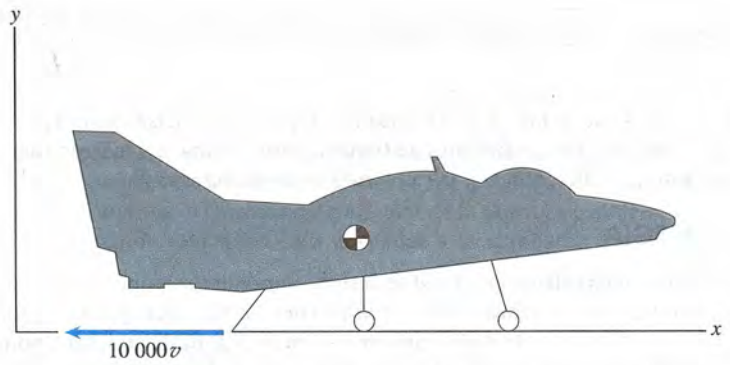
SOLUCIÓN

(a) La magnitud de la fuerza máxima es

$$10\,000v = (10\,000)(50) = 500\,000 \text{ N},$$

o 112 400 lb.
(b) Usando el sistema coordenado de la Fig. (a), obtenemos la ecuación de movimiento:

$$\Sigma F_x = ma_x:$$
$$-10\,000v_x = ma_x.$$



(a) El eje x está alineado con el movimiento horizontal del avión.

La aceleración del avión es función de su velocidad. Usamos la regla de la cadena para expresar la aceleración en términos de la derivada respecto a x:

$$ma_x = m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv_x}{dx}v_x = -10\,000v_x.$$

Ahora integramos, definiendo $x = 0$ como la posición en la que el avión entra en contacto con el mecanismo de detención:

$$\int_{50}^{0} m\,dv_x = -\int_{0}^{x} 10\,000\,dx.$$

Resolviendo para x obtenemos

$$x = \frac{50m}{10\,000} = \frac{(50)(6500)}{10\,000} = 32.5 \text{ m}.$$

COMENTARIO

Como demostramos en este ejemplo, una vez que se ha usado la segunda ley de Newton para determinar la aceleración, se aplican los métodos desarrollados en el Cap. 2 para determinar la posición y la velocidad.

Ejemplo 3.2

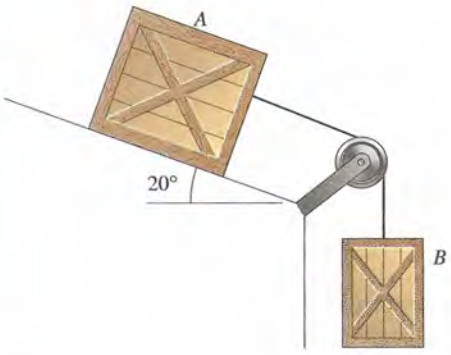


Figura 3.4

Las dos cajas de la Fig. 3.4 se liberan del reposo. Sus masas son $m_A = 40$ kg y $m_B = 30$ kg, y los coeficientes de fricción entre la caja A y la superficie inclinada son $\mu_s = 0.2$, y $\mu_k = 0.15$. ¿Cuál es su aceleración?

ESTRATEGIA

Debemos primero determinar si A se desliza. Supondremos que las cajas permanecen en reposo y veremos si la fuerza de fricción necesaria para el equilibrio excede a la fuerza de fricción máxima. Si ocurre el deslizamiento, podemos determinar la aceleración resultante dibujando los diagramas de cuerpo libre de las cajas y aplicando aisladamente a ellas la segunda ley de Newton.

SOLUCIÓN

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la caja A de la Fig. (a). Si suponemos que no se desliza, son aplicables las ecuaciones de equilibrio,

$$\Sigma F_x = T + m_A g \text{ sen } 20° - f = 0,$$
$$\Sigma F_y = N - m_A g \cos 20° = 0,$$

y la tensión T es igual al peso de la caja B. Por tanto, la fuerza de fricción necesaria para el equilibrio es

$$f = m_B g + m_A g \text{ sen } 20° = (30 + 40 \text{ sen } 20°)(9.81) = 428.5 \text{ N}.$$

La fuerza normal $N = m_A g \cos 20°$, por lo que la fuerza de fricción máxima que la superficie soportará es

$$f_{\text{máx}} = \mu_s N = (0.2)[(40)(9.81) \cos 20°] = 73.7 \text{ N}.$$

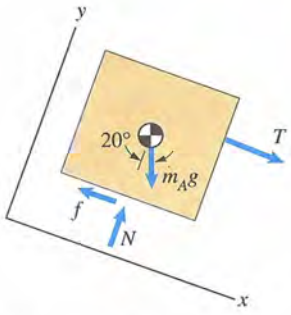
Entonces la caja A se desliza y la fuerza de fricción es $f = \mu_k N$. Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\Sigma F_x = T + m_A g \text{ sen } 20° - \mu_k N = m_A a_x,$$
$$\Sigma F_y = N - m_A g \cos 20° = 0.$$

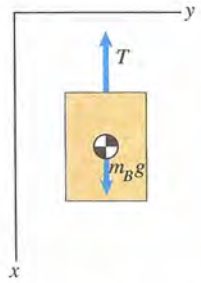
La caja A no tiene aceleración normal a la superficie, por lo que la suma de las fuerzas en la dirección y es igual a cero. En este caso *no conocemos* la tensión T porque la caja B no está en equilibrio. Del diagrama de cuerpo libre de la caja B (Fig. b) obtenemos la ecuación de movimiento

$$\Sigma F_x = m_B g - T = m_B a_x.$$

(Observe que en los dos sistemas coordenados que usamos, las dos cajas tienen la misma aceleración a_x.) Al aplicar la segunda ley de Newton a ambas cajas, obtuvimos tres ecuaciones en términos de las incógnitas T, N y a_x. Resolviendo para a_x obtenemos $a_x = 5.33$ m/s^2.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la caja A.



(b) Diagrama de cuerpo libre de la caja B.

COMENTARIOS

Observe que supusimos que la tensión en el cable es la misma en cada lado de la polea (Fig. c). De hecho, las tensiones deben ser diferentes porque se requiere un momento para impartir una aceleración angular a la polea. Por ahora, nuestro único recurso es suponer que la polea es suficientemente ligera de manera que el momento necesario para acelerarla sea insignificante. En el Cap. 7 incluiremos el análisis del movimiento angular de la polea en problemas de este tipo y obtendremos soluciones más apegadas a la realidad.

(c) Se supone que la tensión es igual en ambos lados de la polea.

Problemas

3.1 La fuerza externa total sobre un cuerpo de 10 kg es $90\mathbf{i} - 60\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$ (N). ¿Cuál es la magnitud de su aceleración respecto a un marco de referencia inercial?

3.2 La fuerza externa total sobre un cuerpo de 20 lb es $10\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$ (lb). Cuando $t = 0$, su vector de posición respecto a un marco de referencia inercial es $\mathbf{r} = 0$ y su velocidad es $\mathbf{v} = 20\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ (pie/s). Determine posición y velocidad cuando $t = 2$ s.

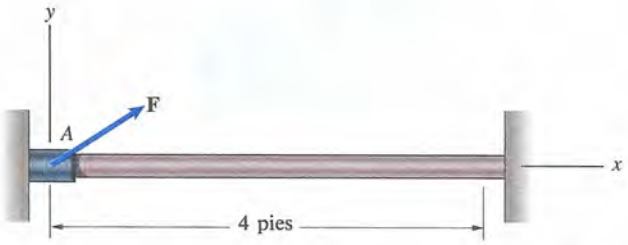
3.3 La fuerza externa total sobre un cuerpo es $10t\mathbf{i} + 60\mathbf{j}$ (lb). Cuando $t = 0$, su vector de posición respecto a un marco de referencia inercial es $\mathbf{r} = 0$ y su velocidad es $\mathbf{v} = 0.2\mathbf{j}$ pie/s. Cuando $t = 5$ s, la magnitud de su vector de posición se mide y determina como 8.75 pie. ¿Cuál es la masa del cuerpo?

3.4 La posición de un cuerpo de 10 kg respecto a un marco de referencia inercial es $\mathbf{r} = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - 30t^2\mathbf{k}$ (m). ¿Cuáles son las componentes de la fuerza externa total que actúa sobre el cuerpo en $t = 10$ s?

3.5 Si un helicóptero de 15 000 lb parte del reposo y su rotor ejerce una fuerza vertical constante de 20 000 lb, ¿cuánto se eleva en 2 s?

P3.5

3.6 El collarín A de 1 lb está inicialmente en reposo sobre la barra lisa horizontal en la posición mostrada. En $t = 0$, una fuerza $\mathbf{F} = \frac{1}{20}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{10}t\mathbf{j} - \frac{1}{30}t^3\mathbf{k}$ (lb) se aplica al collarín, ocasionando que éste se deslice a lo largo de la barra. ¿Cuál es la velocidad del collarín cuando éste llega al extremo derecho de la barra?



P3.6

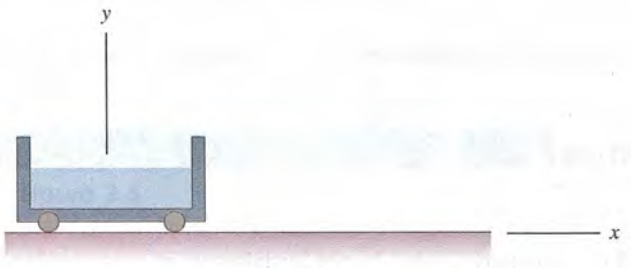
3.7 Suponga que está usted en un elevador y de pie sobre una báscula. Cuando el elevador está en reposo, la báscula indica su peso W.

(a) ¿Cuál es la aceleración del elevador si la báscula indica $1.01\ W$?

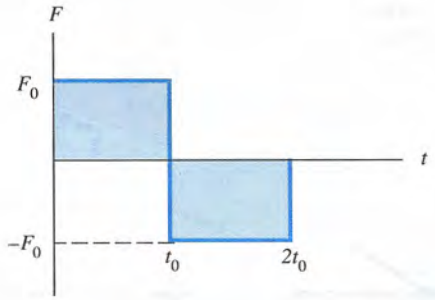
(b) ¿Cuál es su aceleración si la báscula indica $0.99\ W$?

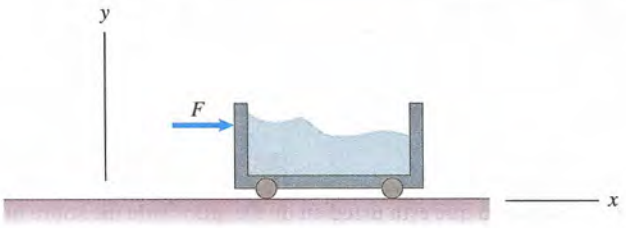
Estrategia: Dibuje su diagrama de cuerpo libre. La fuerza hacia arriba ejercida sobre usted por la báscula es igual a la fuerza que usted ejerce sobre ella.

3.8 Un carro parcialmente lleno de agua está inicialmente en reposo (Fig. a). La masa total del carro y el agua es m. El carro está sometido a una fuerza dependiente del tiempo (Fig. b). Si las fuerzas horizontales ejercidas sobre las ruedas por el piso son insignificantes y el agua no se derrama, ¿cuál es la coordenada x del centro del carro después de que el movimiento del agua ha cesado?



(a)





(b)

P3.8

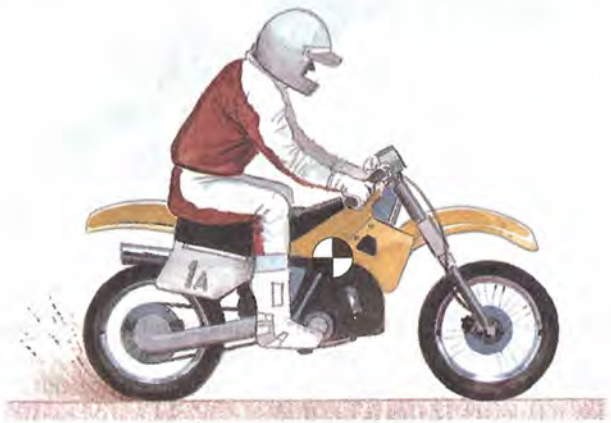
3.9 Un cohete viaja verticalmente hacia arriba a baja altitud. Su peso durante ese tiempo es de 200 klb y el empuje de su motor es de 270 klb. Un acelerómetro a bordo indica que su aceleración es de 10 pie/s^2 hacia arriba. ¿Cuál es la magnitud de la resistencia aerodinámica sobre el cohete?

P3.9

3.10 Un avión pesa 20 000 lb. En el instante mostrado, se aumenta en 5000 lb el empuje T del motor. La componente horizontal de la aceleración del avión antes del aumento del empuje es de 20 pie/s^2. ¿Cuál es la componente horizontal de la aceleración del avión un instante después del aumento del empuje?

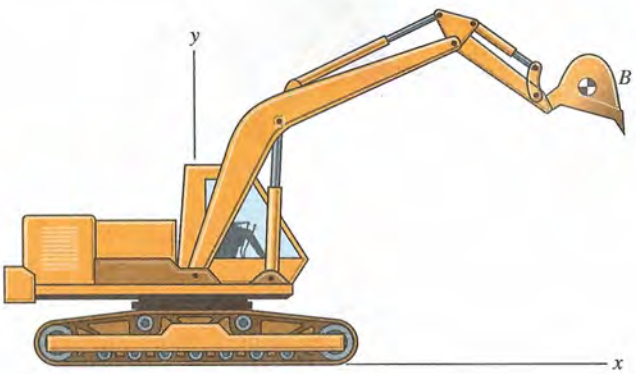
P3.10

3.11 En la Fig. P3.11 el peso combinado de la motocicleta y el conductor es de 360 lb. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos de la motocicleta y el camino es $\mu_k = 0.8$. Si el conductor hace patinar la rueda trasera (motriz), la fuerza normal entre esa rueda y el camino es de 250 lb, y si la fuerza ejercida sobre la rueda frontal por el camino es insignificante, ¿cuál es la aceleración horizontal resultante?



P3.11

3.12 El cangilón B de la figura pesa 400 lb y la aceleración de su centro de masa es $\mathbf{a} = -30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ (pie/s^2). Determine las componentes x y y de la fuerza total ejercida sobre el cangilón por sus soportes.



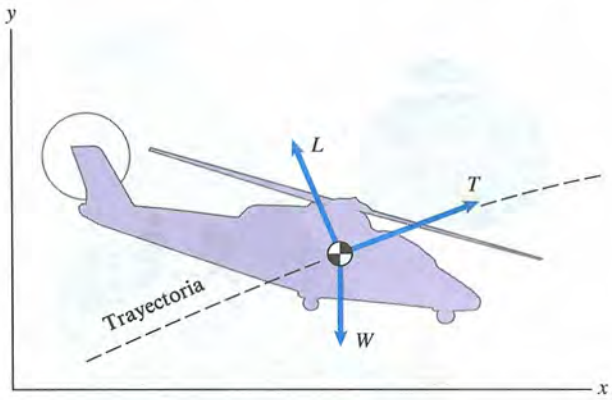
P3.12

3.13 Durante un vuelo de prueba un helicóptero de 9000 kg parte del reposo en $t = 0$; la aceleración de su centro de masa entre $t = 0$ y $t = 10$ s es

$$\mathbf{a} = (0.6t)\,\mathbf{i} + (1.8 - 0.36t)\,\mathbf{j}\ (\text{m/s}^2).$$

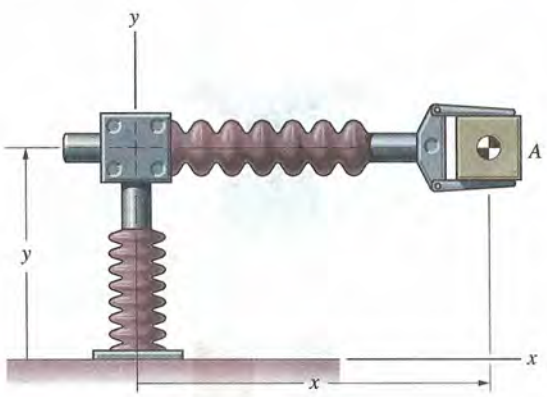
¿Cuál es la magnitud de la fuerza externa total sobre el helicóptero (incluido su peso) en $t = 6$ s?

3.14 Los ingenieros que llevan a cabo la prueba descrita en el Prob. 3.13 quieren expresar la fuerza total sobre el helicóptero en $t = 6$ s en términos de tres fuerzas: el peso W, una componente T tangente a la trayectoria y una componente L normal a la trayectoria. ¿Cuáles son los valores de W, T y L?



P3.14

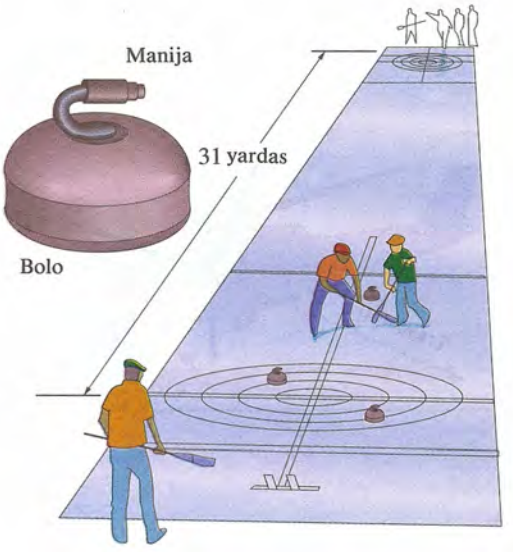
3.15 El robot de la figura está programado de manera que $x = 4 + t^2$ pulg, $y = \frac{1}{4}x^2$ pulg, $z = 0$ durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 4$ s. ¿Cuáles son las componentes x y y de la fuerza total ejercida por las tenazas del robot sobre la pieza A en $t = 2$ s?



P3.15

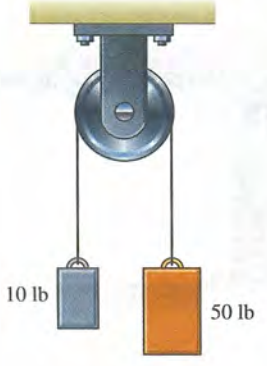
3.16 El robot del Prob. 3.15 se encuentra en reposo en $t = 0$ y está programado de manera que $a_x = 2 - 0.4v_x$ pulg/s^2, $a_y = 1 - 0.2v_y$ pulg/s^2, $a_z = 0$ durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 4$ s. ¿Cuáles son las componentes x y y de la fuerza total ejercida por las tenazas del robot sobre la pieza de 10 lb en $t = 2$ s?

3.17 En cierto juego de bolos, la idea es lanzar el bolo con peso de 44 lb hacia el centro de la meta localizada a 31 yardas del punto de lanzamiento. Si $\mu_k = 0.01$ y el bolo se lanza directamente hacia la meta, ¿qué velocidad inicial logrará un lanzamiento perfecto?



P3.17

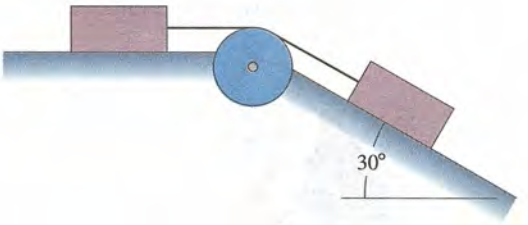
3.18 Los dos pesos mostrados se liberan del reposo. ¿Qué distancia cae el peso de 50 lb en medio segundo?



P3.18

3.19 En el Ej. 3.2, determine la razón de la tensión en el cable al peso de la caja B después de que las cajas se liberan del reposo.

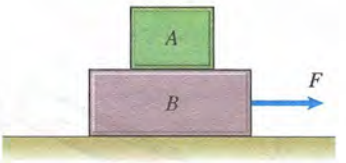
3.20 Cada caja de la figura pesa 50 lb y se puede ignorar la fricción. Si las cajas empiezan a moverse del reposo en $t = 0$, determine la magnitud de sus velocidades y la distancia que se han movido desde su posición inicial en $t = 1$ s.



P3.20

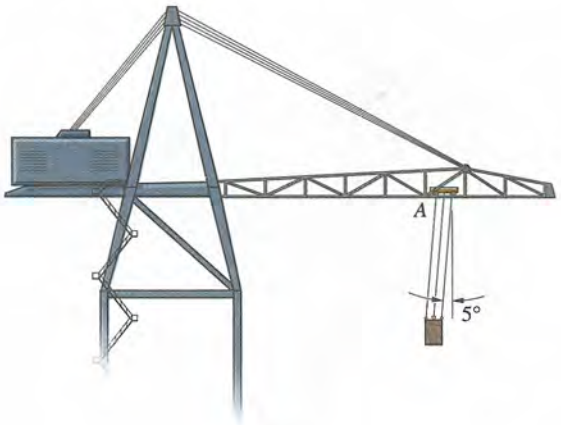
3.21 En el Prob. 3.20, determine la magnitud de la velocidad de las cajas y la distancia que se han movido desde su posición inicial en $t = 1$ s si el coeficiente de fricción cinética entre las cajas y la superficie es $\mu_k = 0.15$.

3.22 Las masas $m_A = 15$ kg, $m_B = 30$ kg, y los coeficientes de fricción entre todas las superficies son $\mu_s = 0.4$, $\mu_k = 0.35$. ¿Cuál es la fuerza máxima F que se puede aplicar sin que A se deslice respecto a B? ¿Cuál es la aceleración resultante?



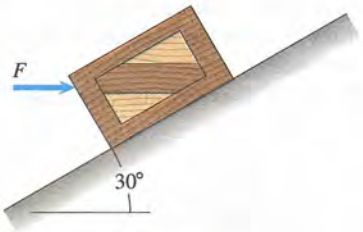
P3.22

3.23 La carretilla A de la grúa mostrada se mueve hacia la derecha con aceleración constante, y la carga de 800 kg se mueve sin oscilar.
(a) ¿Cuál es la aceleración de la carretilla y de la carga?
(b) ¿Cuál es la suma de las tensiones en los cables paralelos que soportan la carga?



P3.23

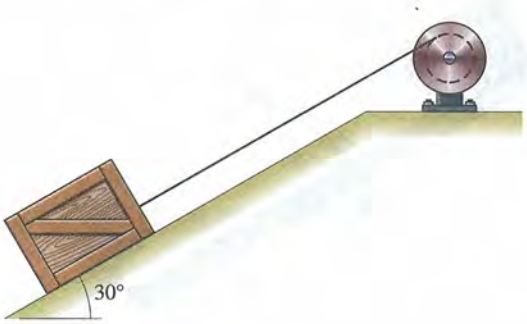
3.24 En la Fig. P3.24 la caja de 100 lb está inicialmente en reposo. Los coeficientes de fricción entre la caja y la superficie inclinada son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.16$. Determine la distancia que recorre la caja desde su posición inicial en 2 s si la fuerza horizontal es $F = 90$ lb.



P3.24

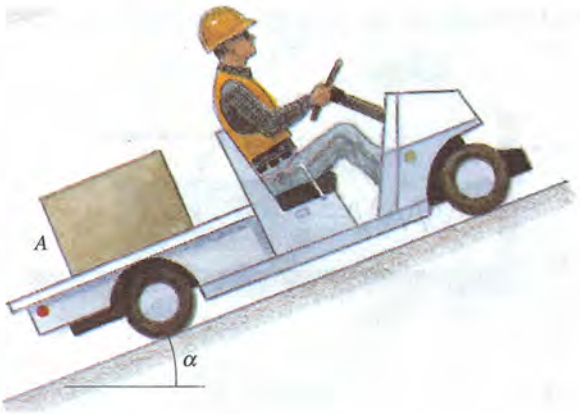
3.25 En el Prob. 3.24 determine la distancia que se mueve la caja desde su posición inicial en 2 s si la fuerza horizontal es $F = 30$ lb.

3.26 La caja mostrada tiene una masa de 120 kg y los coeficientes de fricción entre ella y el plano inclinado son $\mu_s = 0.6$ y $\mu_k = 0.5$. (a) ¿Qué tensión debe ejercer el malacate sobre el cable para que la caja en reposo empiece a deslizarse hacia arriba sobre el plano inclinado? (b) Si la tensión se mantiene en el valor determinado en la parte (a), ¿cuál es la magnitud de la velocidad de la caja cuando ésta ha ascendido 10 pies en el plano inclinado?



P3.26

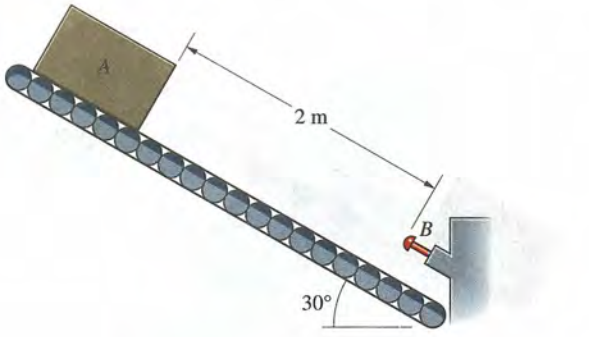
3.27 El vehículo utilitario mostrado se mueve hacia adelante a 10 pie/s. Los coeficientes de fricción entre su carga A y la plataforma del vehículo son $\mu_s = 0.5$, $\mu_k = 0.45$. Si $\alpha = 0$, determine la distancia más corta en que se puede detener el vehículo sin que la carga se deslice sobre la plataforma.



P3.27

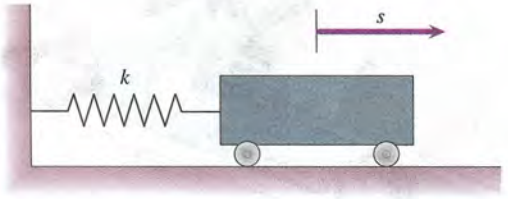
3.28 En el Prob. 3.27, determine la distancia más corta si el ángulo α es (a) 15°; (b) −15°.

3.29 En un proceso de ensamblado en línea, un paquete de 20 kg parte del reposo y se desliza hacia abajo por la rampa lisa. Suponga que se quiere diseñar el dispositivo hidráulico B mostrado para que ejerza una fuerza constante de magnitud F sobre el paquete y lo detenga en una distancia de 100 mm. ¿Cuál es la fuerza F requerida?



P3.29

3.30 En la Fig. P3.30, la fuerza ejercida por el resorte lineal sobre la masa de 10 kg es $F = -ks$, donde k es la constante del resorte y s es el desplazamiento de la masa, medido desde la posición en que el resorte no está estirado. El valor de k es 50 N/m. La masa se libera del reposo en la posición $s = 1$ m.
(a) ¿Cuál es la aceleración de la masa en el instante en que se libera?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando alcanza la posición $s = 0$?



P3.30

3.31 Un paracaidista y su paracaídas pesan 200 lb. Él va cayendo verticalmente a 100 pie/s cuando su paracaídas se abre. Entonces, la magnitud de la fuerza de arrastre es $0.5v^2$.
(a) ¿Cuál es la magnitud de su aceleración en el instante en que el paracaídas se abre?
(b) ¿Cuál es la magnitud de su velocidad cuando ha descendido 20 pies desde el punto en que se abrió el paracaídas?

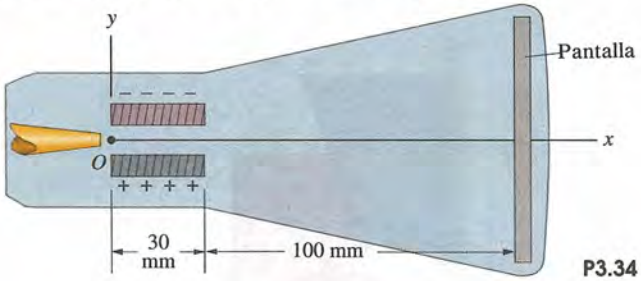
P3.31

3.32 Un lanzador al vacío se lanza sobre un río desde un puente de 130 pies de altura. La cuerda que lo sostiene mide 60 pies sin estirar y su constante de resorte es $k = 14$ lb/pie.
(a) ¿A qué altura sobre el río se encuentra el saltador cuando la cuerda lo detiene?
(b) ¿Cuál es la fuerza máxima que ejerce la cuerda sobre él?

P3.32

3.33 En el Prob. 3.32, ¿cuál es la velocidad máxima que alcanza el saltador y a qué altura sobre el río ocurre esto?

3.34 Un electrón (masa = 9.11×10^{-31} kg) entra por O a un tubo de rayos catódicos, con velocidad $\mathbf{v} = (2.2 \times 10^{7})\mathbf{i}$ (m/s). Mientras está entre las placas cargadas, el campo eléctrico generado por ellas lo somete a una fuerza $\mathbf{F} = -e\mathcal{E}\mathbf{j}$, donde la carga del electrón $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C (coulombs) y la intensidad del campo eléctrico $\mathcal{E} = 15$ kN/C. Las fuerzas externas sobre el electrón son insignificantes si éste no está entre las placas. ¿En qué parte de la pantalla incide el electrón?



P3.34

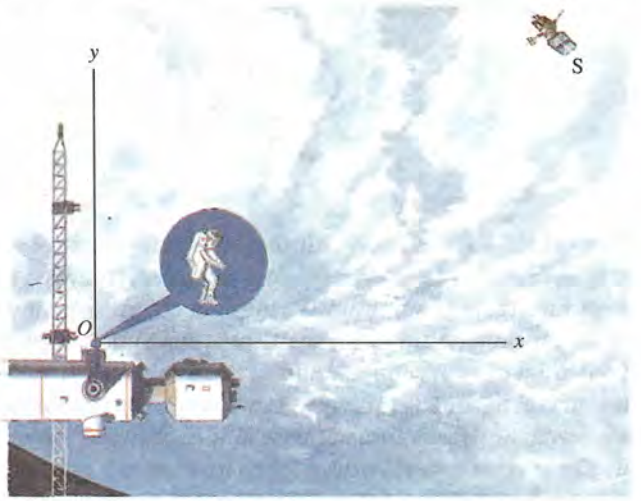
3.35 En el Prob. 3.34 determine en qué parte de la pantalla incide el electrón si la magnitud del campo eléctrico es $\mathcal{E} = 15$ sen (ωt) kN/C, donde la frecuencia circular $\omega = 2 \times 10^{9}$ s^{-1}.

3.36 Un astronauta quiere desplazarse desde una estación espacial hasta un satélite que necesita reparación. El astronuta sale de la estación espacial en O. Un dispositivo de lanzamiento a base de resorte da a su unidad de maniobras una velocidad inicial de 1 m/s (respecto a la estación espacial) en la dirección y. En ese instante, la posición del satélite es $x = 70$ m, $y = 50$ m, $z = 0$ y está viajando a 2 m/s (respecto a la estación) en la dirección x. El astronauta intercepta el satélite aplicando un empuje constante paralelo al eje x. La masa total del astronauta y su unidad de maniobras es de 300 kg.

(a) ¿Cuánto tarda en alcanzar el satélite?

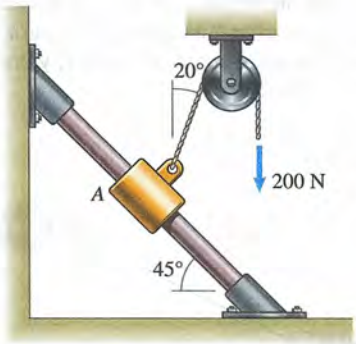
(b) ¿Cuál es la magnitud del empuje que debe aplicar para hacer la intercepción?

(c) ¿Cuál es su velocidad *respecto al satélite* cuando lo alcanza?



P3.36

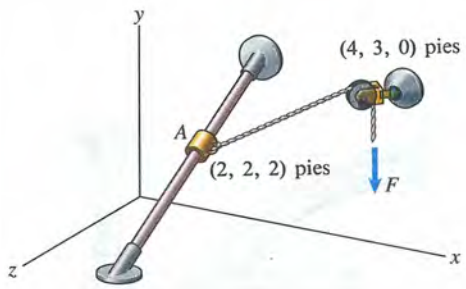
3.37 ¿Cuál es la aceleración del collarín A de 8 kg respecto a la barra lisa?



P3.37

3.38 En el Prob. 3.37 determine la aceleración del collarín A respecto a la barra si el coeficiente de fricción cinética entre el collarín y la barra es $\mu_k = 0.1$.

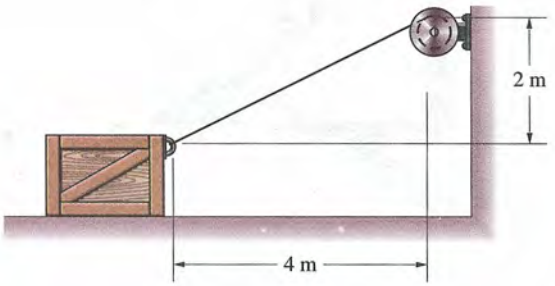
3.39 La aceleración del collarín A de 20 lb es $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (pie/s^2). ¿Cuál es la fuerza F?



P3.39

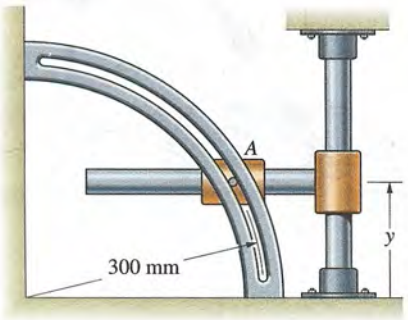
3.40 En el Prob. 3.39 determine la fuerza F si el coeficiente de fricción cinética entre el collarín y la barra es $\mu_k = 0.1$.

3.41 La caja de la figura es jalada a lo largo del piso por un malacate que repliega el cable a una razón constante de 0.2 m/s. La masa de la caja es de 120 kg y el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el piso es $\mu_k = 0.24$.
(a) En el instante mostrado, ¿cuál es la tensión en el cable?
(b) Obtenga una solución "cuasiestática" para la tensión en el cable ignorando la aceleración de la caja, y compárela con su resultado de la parte (a).



P3.41

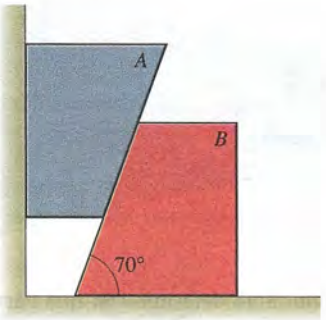
3.42 En la Fig. P3.42, si $y = 100$ mm, $dy/dt = 600$ mm/s y $d^2y/dt^2 = -200$ mm/s^2, ¿qué fuerza horizontal ejerce la ranura lisa circular sobre el deslizador A de 0.4 kg?



P3.42

3.43 Los dos bloques de 100 lb se liberan del reposo. Determine las magnitudes de sus aceleraciones si la fricción en todas las superficies de contacto es insignificante.

Estrategia: Use el hecho de que las componentes de las aceleraciones de los bloques perpendiculares a su interfaz mutua deben ser iguales.



P3.43

3.44 En el Prob. 3.43, determine cuánto tarda el bloque A en descender 1 pie si $\mu_k = 0.1$ en todas las superficies de contacto.

Componentes normal y tangencial

Cuando un cuerpo se mueve en una trayectoria curva plana, podemos expresar la segunda ley de Newton en las componentes normal y tangencial:

$$(\Sigma F_t \, \mathbf{e}_t + \Sigma F_n \, \mathbf{e}_n) = m(a_t \, \mathbf{e}_t + a_n \, \mathbf{e}_n), \tag{3.6}$$

donde

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Igualando las componentes normal y tangencial en la Ec. (3.6), obtenemos dos ecuaciones escalares de movimiento:

$$\boxed{\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt}, \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho}.} \tag{3.7}$$

La suma de las fuerzas en la dirección tangencial es igual al producto de la masa por la razón de cambio de la magnitud de la velocidad, y la suma de las fuerzas en la dirección normal es igual al producto de la masa por la componente normal de la aceleración (Fig. 3.5). La suma de las fuerzas perpendiculares a la trayectoria curva plana debe ser igual a cero.

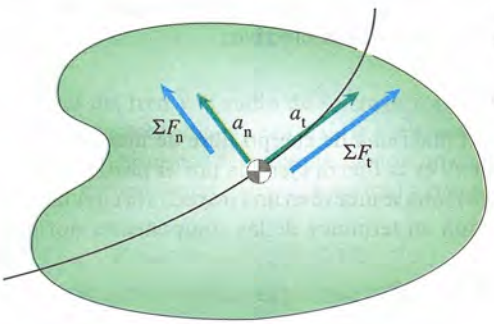


Figura 3.5
Componentes normal y tangencial de $\Sigma\mathbf{F}$ y $\mathbf{a}$.

En los siguientes ejemplos usaremos la segunda ley de Newton expresada en términos de las componentes normal y tangencial para analizar los movimientos de los cuerpos. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo se pueden identificar las componentes de las fuerzas que actúan sobre él y luego usar la segunda ley de Newton para determinar las componentes de su aceleración. O bien, si se conocen las componentes de la aceleración, se puede usar la segunda ley de Newton para determinar las fuerzas externas. Cuando un cuerpo describe una trayectoria circular, las componentes normal y tangencial suelen ser la mejor opción para analizar su movimiento.

Ejemplo 3.3

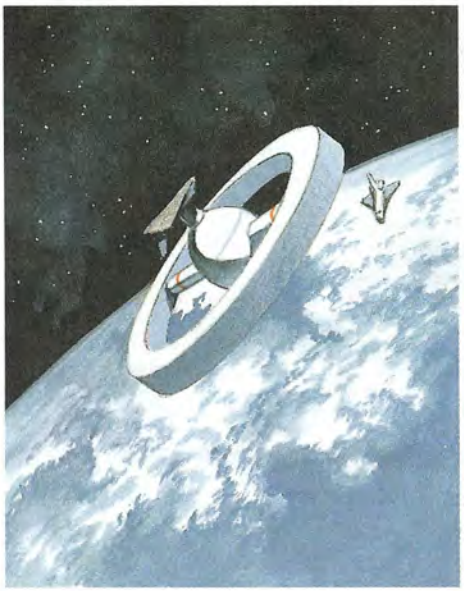


Figura 3.6

Las estaciones espaciales del futuro podrán diseñarse con movimiento giratorio para simular una gravedad artificial. Si la distancia desde el eje de rotación de la estación al anillo externo habitado es $R = 100$ m, ¿qué razón de rotación se necesita para simular una gravedad igual a la mitad de la terrestre?

ESTRATEGIA

Dibujando el diagrama de cuerpo libre de una persona en equilibrio y expresando la segunda ley de Newton en términos de las componentes normal y tangencial, podemos relacionar la fuerza ejercida sobre la persona por el piso con la velocidad angular de la estación. La persona ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el piso, que es su peso efectivo.

SOLUCIÓN

La Fig. (a) es el diagrama de cuerpo libre de una persona de pie en el anillo exterior, donde N es la fuerza ejercida por el piso. Con respecto al centro de la estación, la persona se mueve en una trayectoria circular de radio R. La segunda ley de Newton en términos de las componentes normal y tangencial es

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}:$$

$$N\,\mathbf{e}_n = m\left(\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R}\mathbf{e}_n\right).$$

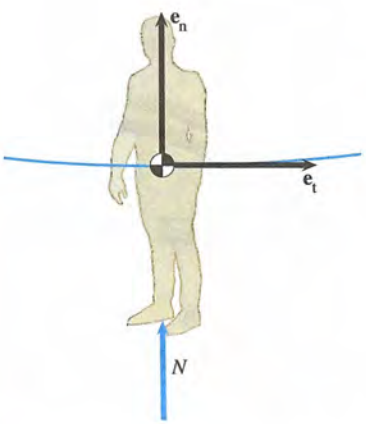
Por tanto, $N = mv^2/R$. La magnitud de su velocidad es $v = R\omega$, donde ω es la velocidad angular de la estación. Si se simula una gravedad igual a la mitad de la terrestre, $N = (1/2)\,mg$. Por tanto,

$$\frac{1}{2}mg = m\frac{(R\omega)^2}{R}.$$

Resolviendo para ω, obtenemos la velocidad angular necesaria de la estación,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} = \sqrt{\frac{9.81}{(2)(100)}} = 0.221 \text{ rad/s},$$

que equivale a una revolución cada 28.4 segundos.



(a) Diagrama de cuerpo libre de una persona de pie en el anillo habitado.

Ejemplo 3.4

El tren experimental de levitación magnética de la Fig. 3.7 está soportado por fuerzas de repulsión magnéticas normales a las vías. El movimiento transversal a las vías del tren es impedido por soportes laterales. El tren de 20 Mg viaja a 30 m/s sobre un segmento circular de vía de radio $R = 150$ m y ángulo de inclinación de 40°. ¿Qué fuerza debe ejercer el sistema de levitación magnética para soportar el tren y qué fuerza total ejercen los soportes laterales?

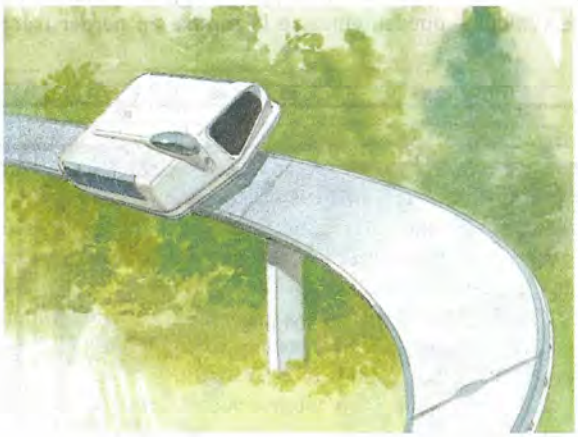


Figura 3.7

ESTRATEGIA

Conocemos la velocidad del tren y el radio de su trayectoria circular, por lo que podemos determinar su componente normal de aceleración. Expresando la segunda ley de Newton en términos de las componentes normal y tangencial, podemos determinar las componentes de fuerza normal y transversal a la vía.

SOLUCIÓN

La trayectoria del tren, vista desde arriba, es circular (Fig. a). El vector unitario $\mathbf{e}_n$ es horizontal y apunta hacia el centro de la trayectoria. En la Fig. (b) dibujamos el diagrama de cuerpo libre del tren visto desde el frente, donde M es la fuerza magnética normal a la vía y S es la fuerza transversal. La suma de las fuerzas en la dirección vertical (perpendicular a la trayectoria circular del tren) debe ser igual a cero:

$$M \cos 40° + S \operatorname{sen} 40° - mg = 0.$$

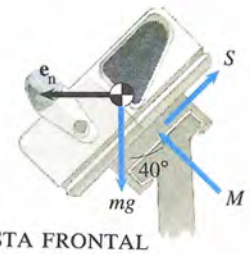
La suma de las fuerzas en la dirección $\mathbf{e}_n$ es igual al producto de la masa por la componente normal de la aceleración:

$$\Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho}:$$

$$M \operatorname{sen} 40° - S \cos 40° = m\frac{v^2}{R}.$$

Resolviendo para M y S obtenemos $M = 227.4$ kN y $S = 34.2$ kN.

(a) Vista superior de la trayectoria circular del tren.



(b) Diagrama de cuerpo libre del tren.

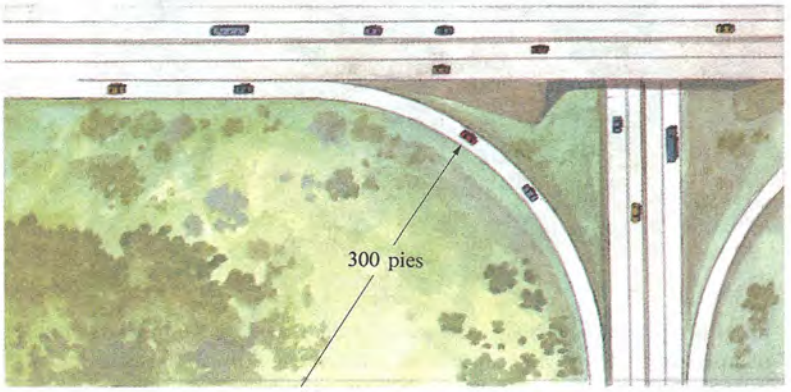
Ejemplo 3.5

Aplicaciones a la ingeniería

Dinámica de vehículos

El diseño preliminar de una rampa de autopista es circular con radio $R = 300$ pies (Fig. 3.8). Si se supone que el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el camino es de por lo menos $\mu_s = 0.4$, ¿cuál es la velocidad máxima a la que los vehículos pueden entrar a la rampa sin perder tracción?

Figura 3.8

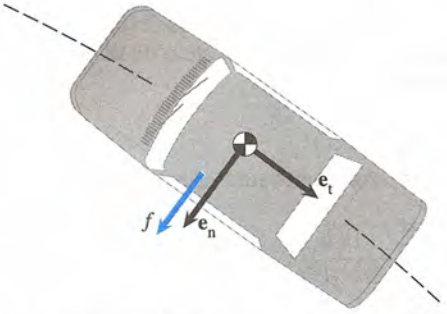


ESTRATEGIA

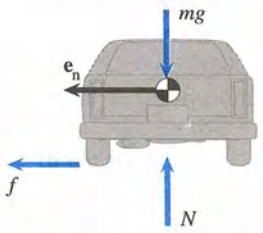
Como un vehículo sobre la rampa se mueve en una trayectoria circular, tiene una componente de aceleración normal que depende de su velocidad. La componente normal de la fuerza necesaria es ejercida por la fricción entre los neumáticos y el camino, y la fuerza de fricción no puede ser mayor que el producto de μ_s por la fuerza normal. Suponiendo que la fuerza de fricción es igual a este valor, podemos determinar la velocidad máxima para que no ocurra deslizamiento.

SOLUCIÓN

En la Fig. (a) vemos el diagrama de cuerpo libre de un auto sobre la rampa, y en la Fig. (b) lo vemos desde el frente. La fuerza de fricción f debe ser igual



(a) Vista superior del diagrama de cuerpo libre.



(b) Vista frontal.

al producto de la masa m del auto por su componente normal de aceleración:

$$f = m\frac{v^2}{R}.$$

La fuerza de fricción requerida aumenta con la velocidad v. La fuerza de fricción máxima que la superficie puede proporcionar es $f_{\text{máx}} = \mu_s N = \mu_s mg$. Por tanto, la velocidad máxima para que no ocurra deslizamiento es

$$v = \sqrt{\mu_s g R} = \sqrt{(0.4)(32.2)(300)} = 62.2 \text{ pie/s},$$

o 42.4 mi/h.

CONSIDERACIONES DE DISEÑO

Los ingenieros mecánicos, los ingenieros civiles que diseñan carreteras y los ingenieros que estudian los accidentes de tránsito y su prevención deben analizar y medir los movimientos de vehículos en diferentes condiciones. Usando los métodos descritos en este capítulo, pueden relacionar las fuerzas que actúan sobre los vehículos con sus movimientos y estudiar, por ejemplo, los efectos del peralte y la curvatura sobre la velocidad con que se puede guiar con seguridad un vehículo sobre un camino en curva (Fig. 3.9).

En el Ej. 3.5, el análisis indica que los vehículos perderán tracción si entran a la rampa con velocidades superiores a 42.4 mi/h. Esto puede danos una idea de la velocidad límite que se debe señalar para que los vehículos entren a la rampa con seguridad, o bien la rampa se podría diseñar para una mayor velocidad incrementando su radio de curvatura. Sin embargo, si se desea una mayor velocidad segura y las limitaciones de espacio impiden usar un mayor radio de curvatura, la rampa se podría diseñar con un peralte adecuado (véase Prob. 3.65).

Figura 3.9

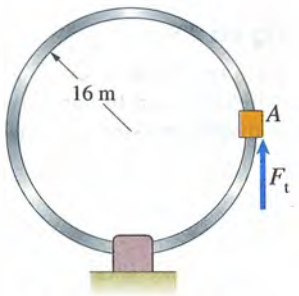
Las pruebas de la capacidad de los vehículos para tomar curvas influyen en el diseño de éstos y de las carreteras.

Problemas

3.45 Si se escoge apropiadamente la velocidad del tren del Ej. 3.4, la fuerza lateral S ejercida sobre él cuando viaja a lo largo de la vía circular es cero.
(a) ¿Cuál es esta velocidad?
(b) Explique por qué ésta es la velocidad deseable desde el punto de vista de los pasajeros.

3.46 Un satélite artificial con masa de 300 slugs se encuentra en una órbita circular de radio $R = 5000$ mi. Su velocidad relativa respecto al centro de la Tierra es de 23 092 pie/s.
(a) Use la información dada para determinar la fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite y compárela con el peso de éste a nivel del mar.
(b) La aceleración debida a la gravedad a una distancia R desde el centro de la Tierra es gR_E^2/R^2, donde el radio de la Tierra es $R_E = 3960$ mi. Use esta expresión para confirmar su respuesta a la parte (a).

3.47 El deslizador A de 2 kg mostrado parte del reposo y se desliza *en el plano horizontal* a lo largo de la barra lisa circular bajo la acción de una fuerza tangencial $F_t = 4t$ N. En $t = 4$ s, determine (a) la magnitud de la velocidad del deslizador; (b) la magnitud de la fuerza horizontal que ejerce la barra sobre el deslizador.



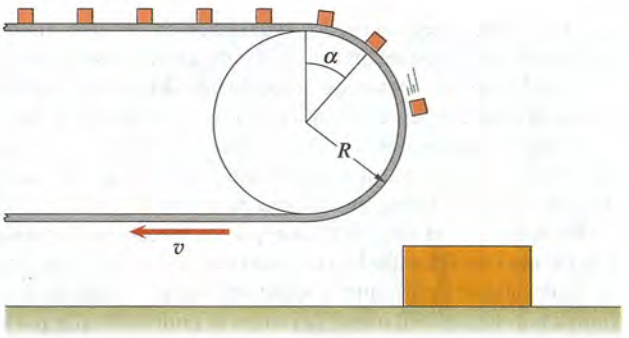
VISTA SUPERIOR

P3.47

3.48 Pequeñas piezas sobre una banda transportadora que se mueve con velocidad v constante caen en un arcón. Demuestre que el ángulo α en el que las piezas empiezan a deslizarse sobre la banda satisface la ecuación

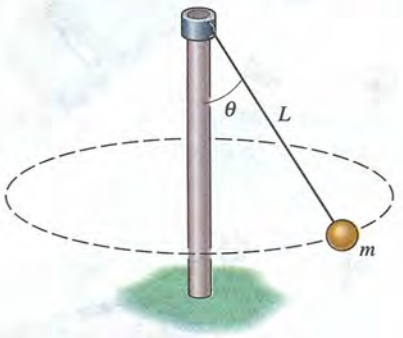
$$\cos\alpha - \frac{1}{\mu_s}\operatorname{sen}\alpha = \frac{v^2}{gR},$$

donde μ_s es el coeficiente de fricción estática entre las piezas y la banda.



P3.48

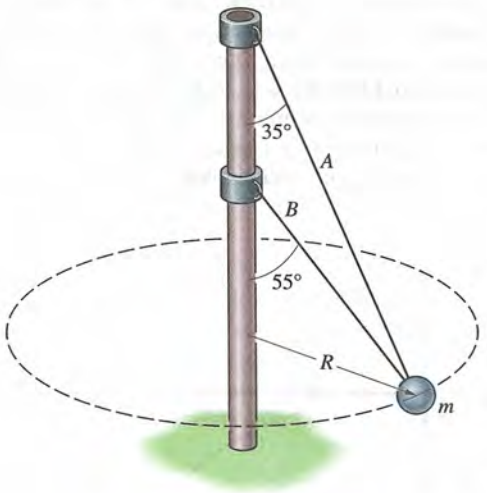
3.49 La masa m gira alrededor del poste vertical en una trayectoria horizontal circular. Determine la magnitud de su velocidad en términos de θ y L.



P3.49

3.50 En el Prob. 3.49, si $m = 1$ slug, $L = 4$ pies y la masa se está moviendo en una trayectoria circular con $v = 15$ pie/s, ¿cuál es la tensión en la cuerda?

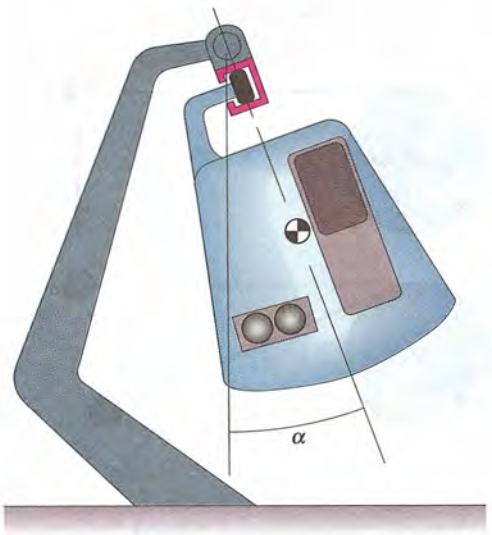
3.51 Una masa m de 10 kg gira alrededor de un poste vertical en una trayectoria circular horizontal de radio $R = 1$ m. Si la magnitud de su velocidad es $v = 3$ m/s, ¿cuáles son las tensiones en las cuerdas A y B?



P3.51

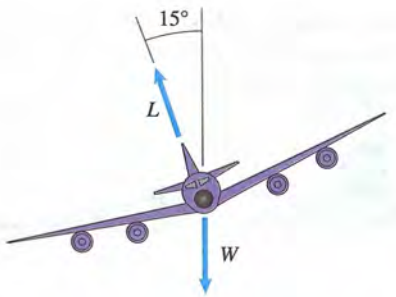
3.52 En el Prob. 3.51, ¿cuál es el intervalo de valores de v para los cuales la masa permanecerá en la trayectoria circular descrita?

3.53 Se va a diseñar un sistema de transporte por monorriel que viajará a 50 m/s. El ángulo α con que los vagones oscilarán respecto a la vertical al tomar una curva no debe ser mayor que 20°. Si las curvas son circulares con radio R, ¿cuál es el mínimo valor admisible de R?



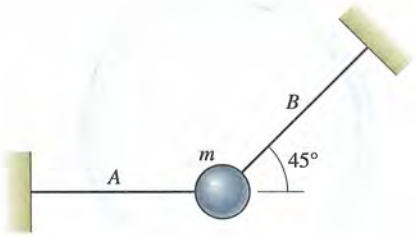
P3.53

3.54 Un avión con peso $W = 200\,000$ lb efectúa un viraje a altitud constante y a velocidad constante $v = 600$ pie/s. El ángulo de inclinación es de 15°.
(a) Determine la fuerza L de sustentación.
(b) ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria del avión?



P3.54

3.55 En Fig. P3.55, la masa m suspendida está en equilibrio.
(a) ¿Cuáles son las tensiones en las cuerdas?
(b) Si se corta la cuerda A, ¿cuál es la tensión en la cuerda B inmediatamente después?

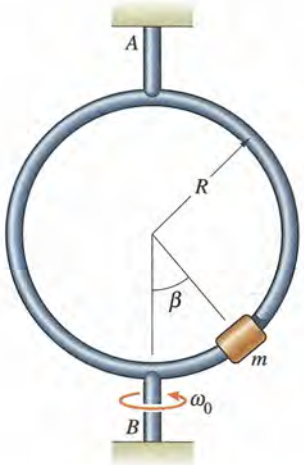


P3.55

3.56 Un avión vuela con velocidad v constante a lo largo de una trayectoria circular en un plano vertical. El radio de su trayectoria circular es de 5000 pies. El piloto pesa 150 lb.
(a) El piloto experimentará "ingravidez" en la cima de la trayectoria circular si el avión no ejerce ninguna fuerza neta sobre él en ese punto. Dibuje un diagrama de cuerpo libre del piloto y úselo para determinar la velocidad v necesaria para lograr esta condición.
(b) Determine la fuerza ejercida sobre el piloto por el avión en la cima de la trayectoria circular si el avión está viajando a una velocidad que duplica la de la parte (a).

P3.56

3.57 La barra circular lisa de la figura gira con velocidad angular constante ω_0 alrededor del eje vertical AB. Determine el ángulo β en el cual el collarín de masa m permanecerá en reposo respecto a la barra circular.

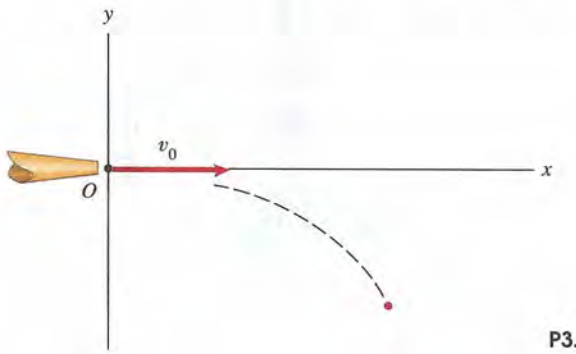


P3.57

3.58 La fuerza ejercida sobre una partícula cargada por un campo magnético es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

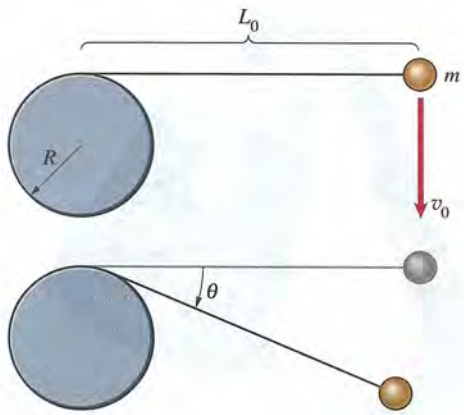
donde q y $\mathbf{v}$ son la carga y el vector de velocidad de la partícula y $\mathbf{B}$ es el vector de campo magnético. Una partícula de masa m y carga positiva q entra en O con velocidad $\mathbf{v} = v_0\mathbf{i}$ a un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$. Usando las componentes normal y tangencial, demuestre que: (a) la magnitud de la velocidad de la partícula es constante; (b) la trayectoria de la partícula es una circunferencia con radio mv_0/qB_0.



P3.58

3.59 Una masa m está unida a una cuerda enrollada alrededor de un poste fijo de radio R. En $t = 0$, se da a la masa una velocidad v_0, como se muestra en la figura. Ignore las fuerzas externas sobre m excepto la ejercida por la cuerda. Determine la tensión en la cuerda en función del ángulo θ.

Estrategia: El vector velocidad de la masa es perpendicular a la cuerda. Exprese la segunda ley de Newton en términos de las componentes normal y tangencial.



P3.59

3.60 En el Prob. 3.59 determine el ángulo θ en función del tiempo.

Los Probs. 3.61 a 3.65 están relacionados con el Ej. 3.5.

3.61 Un automóvil viaja por un camino recto a nivel cuando el conductor percibe adelante una zona de peligro. Después de un tiempo de reacción de 0.5 s, aplica los frenos trabando las ruedas. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y el camino es $\mu_k = 0.6$. Determine la distancia total que el automóvil recorre antes de detenerse, incluyendo la distancia recorrida antes del frenado, si viaja a (a) 55 mi/h; (b) 65 mi/h.

3.62 Si el automóvil del Prob. 3.61 viaja a 65 mi/h y la lluvia disminuye el valor de μ_k a 0.4, ¿qué distancia total viaja el automóvil antes de detenerse?

3.63 Un automóvil viaja a 30 m/s y está en la cima de una colina. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y el camino es $\mu_k = 0.8$ y el radio de curvatura instantánea de la trayectoria del automóvil es de 200 m. Si el conductor aplica los frenos y se traban las ruedas del vehículo, ¿cuál es la desaceleración resultante en la dirección tangente a la trayectoria?

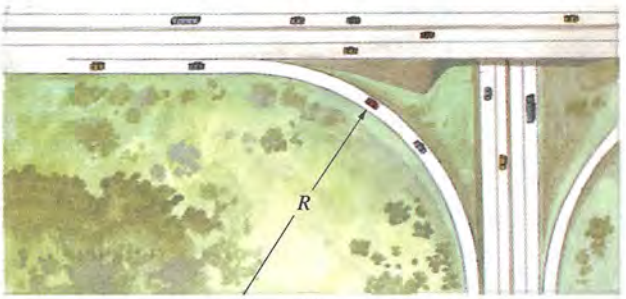
P3.63

3.64 Suponga que el automóvil del Prob. 3.63 está en el fondo de una depresión cuyo radio de curvatura es de 200 m cuando el conductor aplica los frenos. ¿Cuál es la desaceleración resultante del automóvil en la dirección tangente a su trayectoria?

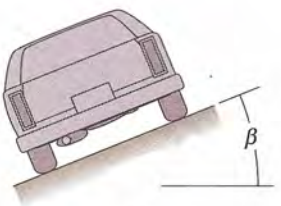
P3.64

3.65 Una rampa de acceso a una supercarretera es circular con radio R (Fig. a), y la carpeta asfáltica está inclinada un ángulo β respecto a la horizontal (Fig. b). Demuestre que la velocidad constante máxima a la que un automóvil puede viajar en la rampa sin perder tracción es

$$v = \sqrt{gR\left(\frac{\operatorname{sen}\beta + \mu_s \cos\beta}{\cos\beta - \mu_s \operatorname{sen}\beta}\right)}.$$



(a)



(b)

P3.65

Coordenadas polares

En coordenadas polares, la segunda ley de Newton para un cuerpo que se mueve en el plano x-y es

$$(\Sigma F_r\,\mathbf{e}_r + \Sigma F_\theta\,\mathbf{e}_\theta) = m(a_r\,\mathbf{e}_r + a_\theta\,\mathbf{e}_\theta), \tag{3.8}$$

donde

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2,$$

$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = r\alpha + 2\frac{dr}{dt}\omega.$$

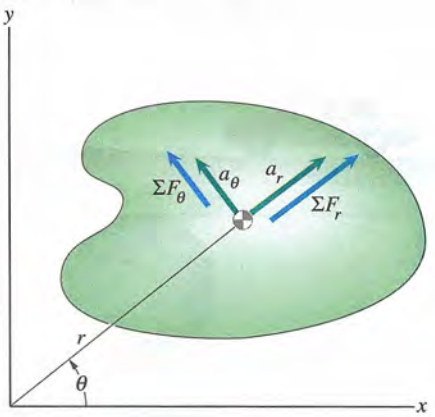
Igualando $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ en la Ec. (3.8), obtenemos las ecuaciones escalares

$$\Sigma F_r = ma_r = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right), \tag{3.9}$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta = m\left(r\alpha + 2\frac{dr}{dt}\omega\right). \tag{3.10}$$

La suma de las fuerzas en la dirección radial es igual al producto de la masa por la componente radial de la aceleración, y la suma de las fuerzas en la dirección transversal es igual al producto de la masa por la componente transversal de la aceleración (Fig. 3.10).

Figura 3.10
Componentes radial y transversal de $\Sigma\mathbf{F}$ y $\mathbf{a}$.



En el siguiente ejemplo usaremos la segunda ley de Newton expresada en coordenadas polares, o componentes radial y transversal, para analizar los movimientos de un cuerpo. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo, podemos identificar las componentes de las fuerzas que actúan sobre él y luego usar la segunda ley de Newton para determinar las componentes de su aceleración. O bien, si se conocen las componentes de la aceleración, se puede usar la segunda ley de Newton para determinar las fuerzas externas.

Ejemplo 3.6

La barra lisa de la Fig. 3.11 gira *en un plano horizontal* con velocidad angular constante ω_0. La longitud del resorte lineal no estirado es r_0. El collarín A tiene masa m y se libera en $r = r_0$ sin velocidad radial.
(a) Determine la velocidad radial del collarín en función de r.
(b) Determine la fuerza transversal ejercida sobre el collarín por la barra en función de r.

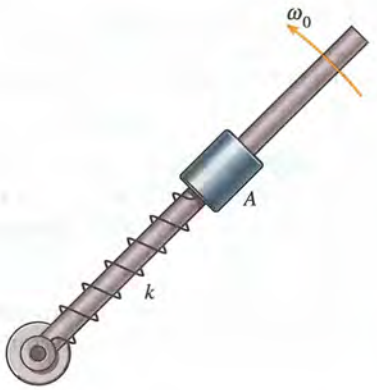


Figura 3.11

ESTRATEGIA

(a) La única fuerza sobre el collarín en la dirección radial es la fuerza del resorte, que podemos expresar en coordenadas polares en términos de r. Integrando la Ec. (3.9), podemos determinar la velocidad radial v_r en función de r.
(b) Una vez conocida $v_r = dr/dt$ en términos de r, podemos usar la Ec. (3.10) para determinar la fuerza transversal que ejerce la barra sobre el collarín.

SOLUCIÓN

(a) El resorte ejerce una fuerza radial $k(r - r_0)$ en la dirección negativa de r (Fig. a). Como la barra es lisa, no ejerce fuerza radial sobre A, pero puede ejercer una fuerza transversal F_θ. De la Ec. (3.9),

$$\Sigma F_r = -k(r - r_0) = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right) = m\left(\frac{dv_r}{dt} - r\omega_0^2\right).$$

Usando la regla de la cadena para expresar la derivada respecto al tiempo de v_r en términos de una derivada respecto a r,

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv_r}{dr}v_r,$$

obtenemos

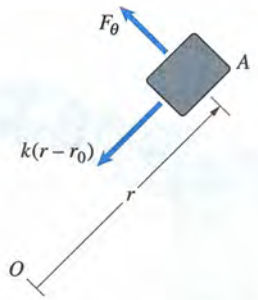
$$v_r\,dv_r = \left[\left(\omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)r + \frac{k}{m}r_0\right]dr.$$

Integrando,

$$\int_0^{v_r} v_r\,dv_r = \int_{r_0}^{r}\left[\left(\omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)r + \frac{k}{m}r_0\right]dr,$$

obtenemos la velocidad radial en función de r:

$$v_r = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)(r^2 - r_0^2) + \frac{2k}{m}r_0(r - r_0)}.$$



(a) Fuerzas radial y transversal sobre A.

(b) De la Ec. (3.10), la fuerza transversal ejercida por la barra sobre A es

$$F_\theta = m\left(r\alpha + 2\frac{dr}{dt}\omega\right) = 2m\omega_0 v_r.$$

Sustituyendo la expresión para v_r en función de r, obtenemos la fuerza horizontal ejercida por la barra en función de r:

$$F_\theta = 2m\omega_0\sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)(r^2 - r_0^2) + \frac{2k}{m}r_0(r - r_0)}.$$

Problemas

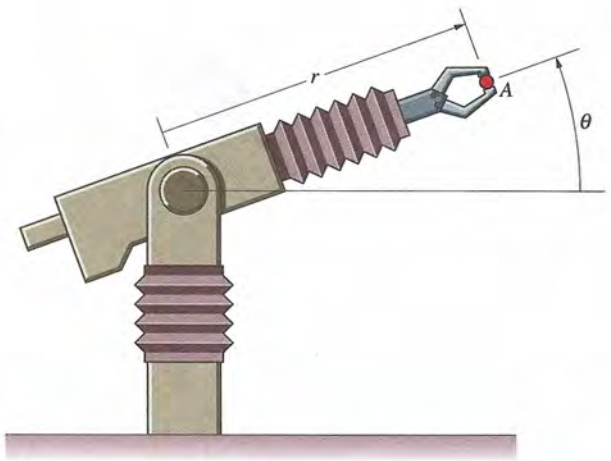
3.66 Las coordenadas polares de un cuerpo son $r = t^2 + 2$ pies, $\theta = 2t^3 - t^2$ rad, y su masa es de 3 slugs. ¿Cuáles son las componentes radial y transversal de la fuerza externa total sobre el cuerpo en $t = 1$ s?

3.67 Las coordenadas polares de un cuerpo son $r = 2t^2 + 4t$ m, $\theta = t^2 - t$ rad, y su masa es de 20 kg. ¿Cuáles son las componentes radial y transversal de la fuerza externa total sobre el cuerpo en $t = 1$ s?

3.68 El robot de la Fig. P3.68 está programado de modo que la parte A de 0.4 kg describe la trayectoria

$$r = 1 - 0.5 \cos 2\pi t \text{ m},$$
$$\theta = 0.5 - 0.2 \operatorname{sen} 2\pi t \text{ rad}.$$

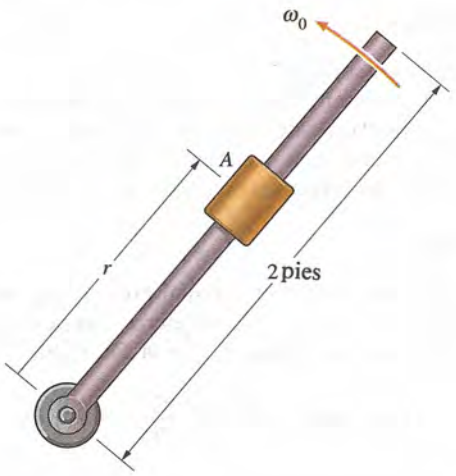
En $t = 2$ s, determine las componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre A por las tenazas del robot.



P3.68

3.69 En el Ej. 3.6, ¿cuál es la máxima distancia radial alcanzada por el collarín A?

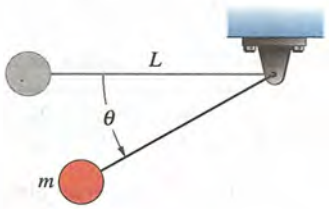
3.70 La barra lisa mostrada gira *en el plano horizontal* con velocidad angular constante $\omega_0 = 60$ rpm (revoluciones por minuto). Si el collarín A de 2 lb se suelta en $r = 1$ pie sin velocidad radial, ¿cuál es la magnitud de su velocidad cuando llega al extremo de la barra?



P3.70

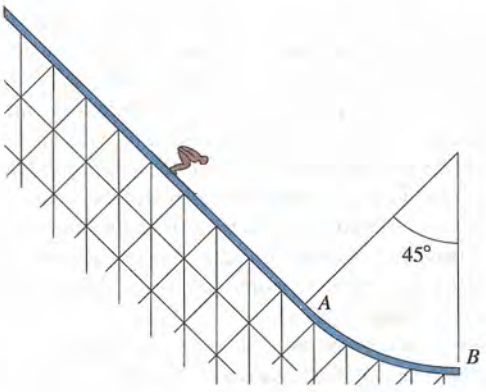
3.71 En el Prob. 3.70, ¿cuál es la máxima fuerza horizontal que ejerce la barra sobre el collarín?

3.72 En Fig. P3.72, la masa m se libera del reposo con la cuerda en posición horizontal. Usando la segunda ley de Newton expresada en coordenadas polares, determine la magnitud de la velocidad de la masa y la tensión de la cuerda en función de θ.



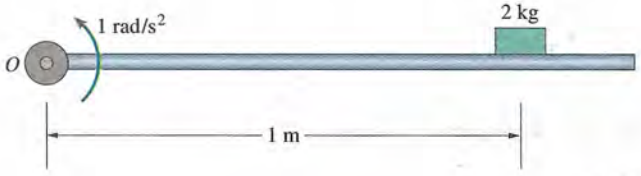
P3.72

3.73 El esquiador de la Fig. P3.73 pasa por el punto A a 17 m/s. De A a B, el radio de su trayectoria circular es de 6 m. Usando la segunda ley de Newton en coordenadas polares, determine la magnitud de su velocidad en el momento en que abandona la rampa en B. Ignore las fuerzas transversales excepto la componente de su peso.



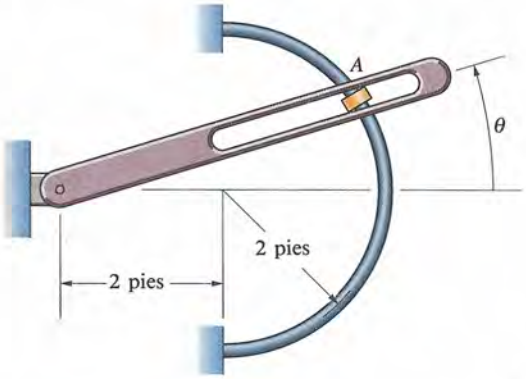
P3.73

3.74 Una masa de 2 kg descansa sobre una barra plana horizontal. La barra comienza a girar *en el plano vertical* alrededor de O con una aceleración angular constante de 1 rad/s^2. Se observa que la masa se desliza respecto a la barra cuando está 30° arriba de la horizontal. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la masa y la barra? ¿La masa se desliza acercándose o alejándose de O?



P3.74

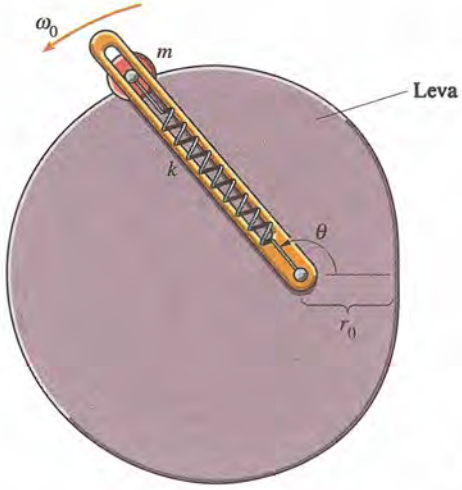
3.75 El deslizador A de 1/4 lb es empujado a lo largo de la barra circular por la barra ranurada. La barra circular está *en el plano horizontal*. La posición angular de la barra ranurada es $\theta = 10t^2$ rad. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza externa total sobre el deslizador en $t = 0.2$ s.



P3.75

3.76 En el Prob. 3.75, suponga que la barra circular se encuentra *en un plano vertical*. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza total ejercida sobre el deslizador por las barras circular y ranurada cuando $t = 0.25$ s.

3.77 La barra ranurada de la figura gira *en el plano horizontal* con velocidad angular constante ω_0. La masa m tiene un pasador que embona en la ranura. Un resorte mantiene el pasador contra la superficie de la leva fija. Esta superficie se describe con $r = r_0\,(2 - \cos\theta)$. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza externa total sobre el pasador en función de θ.



P3.77

3.78 En el Prob. 3.77, suponga que la longitud del resorte sin estirar es r_0. Determine el valor mínimo de la constante del resorte k para el cual el pasador permanecerá sobre la superfice de la leva.

Ejemplo con computador

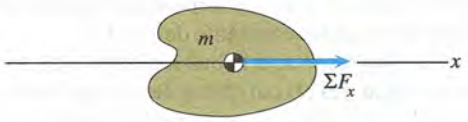
El material de esta sección está diseñado para utilizar una calculadora programable o un computador.

Hasta ahora, en este capítulo se han visto muchos casos en que el movimiento de un cuerpo se podía determinar por medio de un simple procedimiento: después de usar la segunda ley de Newton para determinar la aceleración, se integraba para obtener expresiones analíticas o **de forma cerrada** para la velocidad y posición del cuerpo. Esos ejemplos son muy valiosos; enseñan a usar diagramas de cuerpo libre y a expresar problemas en diferentes sistemas coordenados, y desarrollan la comprensión intuitiva de las fuerzas y movimientos. Sin embargo, la mayoría de los problemas que se tratan en ingeniería no pueden resolverse de esta manera. Las funciones que describen las fuerzas, y por ende las aceleraciones, suelen ser demasiado complejas para poder integrarlas y obtener soluciones cerradas. En otros casos no se conocen las fuerzas en términos de funciones sino en términos de datos, ya sea como un registro continuo de la fuerza en función del tiempo (datos analógicos) o como valores de la fuerza medida en tiempos discretos (datos digitales).

Se pueden obtener soluciones aproximadas de tales problemas usando integración numérica. Consideremos un cuerpo de masa m en movimiento en línea recta a lo largo del eje x (Fig. 3.12) y supongamos que la componente x de la fuerza total puede depender del tiempo, la posición, y la velocidad:

$$\Sigma F_x = \Sigma F_x(t, x, v_x). \tag{3.11}$$

Figura 3.12
Cuerpo que se mueve a lo largo del eje x.



Supongamos que en un tiempo particular t_0 conocemos la posición $x\,(t_0)$ y la velocidad $v_x(t_0)$. La aceleración del cuerpo en t_0 es

$$\frac{dv_x}{dt}(t_0) = \frac{1}{m}\Sigma F_x(t_0, x(t_0), v_x(t_0)), \tag{3.12}$$

La definición de la derivada respecto al tiempo de v_x en t_0 es

$$\frac{dv_x}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)}{\Delta t}.$$

Escogiendo un valor suficientemente pequeño de Δt, podemos aproximar esta derivada con

$$\frac{dv_x}{dt}(t_0) = \frac{v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)}{\Delta t},$$

y sustituirla en la Ec. (3.12) para obtener una expresión aproximada de la velocidad en $t_0 + \Delta t$:

$$v_x(t_0 + \Delta t) = v_x(t_0) + \frac{1}{m}\Sigma F_x(t_0, x(t_0), v_x(t_0))\Delta t. \tag{3.13}$$

La relación entre la velocidad y la posición en t_0 es

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = v_x(t_0).$$

Aproximando esta derivada con

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t},$$

obtenemos una expresión aproximada para la posición en $t_0 + \Delta t$:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v_x(t_0)\Delta t. \tag{3.14}$$

Así pues, si conocemos la posición y la velocidad en un tiempo t_0, podemos aproximar sus valores en $t_0 + \Delta t$ usando las Ecs. (3.13) y (3.14). Podemos repetir entonces el procedimiento, usando $x(t_0 + \Delta t)$ y $v_x(t_0 + \Delta t)$ como condiciones iniciales para determinar la posición y la velocidad aproximadas en $t_0 + 2\Delta t$. Continuando de esta manera, obtenemos soluciones aproximadas para la posición y la velocidad en función del tiempo. Este procedimiento es fácil de llevar a cabo usando una calculadora o un computador. Se llama **método de las diferencias finitas** porque determina cambios en las variables dependientes en intervalos finitos de tiempo. El método particular que describimos, debido a Leonhard Euler (1707-1783), se llama **diferencias hacia adelante**: el valor de la derivada de una función en t_0 se aproxima usando su valor en t_0 y su valor hacia adelante en el tiempo, en $t_0 + \Delta t$. Si bien hay métodos más elaborados de diferencias finitas que dan errores menores en cada incremento de tiempo, el método de Euler es adecuado para presentar las soluciones numéricas de problemas de dinámica. Observe que la Ec. (3.11) no tiene que ser una expresión funcional para llevar a cabo este proceso. Los valores de la fuerza total deben conocerse en los tiempos t_0, $t_0 + \Delta t$,..., y se pueden determinar a partir de una función o de datos analógicos o digitales.

La velocidad y la posición de un cuerpo en movimiento curvilíneo se pueden determinar con el mismo procedimiento. Supongamos que un cuerpo se mueve en el plano x-y y que las componentes de fuerza pueden depender del tiempo, la posición y la velocidad:

$$\Sigma F_x = \Sigma F_x(t, x, y, v_x, v_y), \qquad \Sigma F_y = \Sigma F_y(t, x, y, v_x, v_y).$$

Si la posición y la velocidad se conocen en un tiempo t_0, podemos usar los mismos pasos que conducen a las Ecs. (3.13) y (3.14) a fin de obtener expresiones aproximadas para las componentes de la posición y la velocidad en $t_0 + \Delta t$:

$$\begin{aligned}
x(t_0 + \Delta t) &= x(t_0) + v_x(t_0)\Delta t, \\
y(t_0 + \Delta t) &= y(t_0) + v_y(t_0)\Delta t, \\
v_x(t_0 + \Delta t) &= v_x(t_0) + \frac{1}{m}\Sigma F_x(t_0, x(t_0), y(t_0), v_x(t_0), v_y(t_0))\Delta t, \\
v_y(t_0 + \Delta t) &= v_y(t_0) + \frac{1}{m}\Sigma F_y(t_0, x(t_0), y(t_0), v_x(t_0), v_y(t_0))\Delta t.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

El material de esta sección está diseñado para utilizar una calculadora programable o un computador.

Ejemplo 3.7

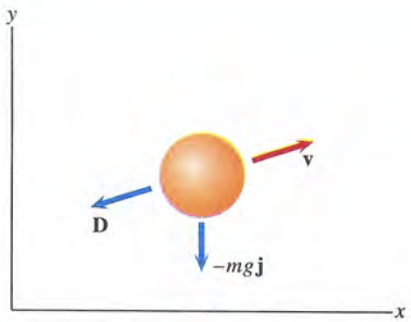


Figura 3.13

Las fuerzas sobre el proyectil son su peso y la fuerza de arrastre **D**.

Un proyectil de 100 slugs se dispara desde $x = 0$, $y = 0$ con velocidad inicial $v_x = 400$ pie/s, $v_y = 400$ pie/s (el eje y positivo está dirigido hacia arriba). La resistencia aerodinámica es de magnitud $C\,|\mathbf{v}|^2$, donde C es una constante. Determine la trayectoria para valores de C de 0.002, 0.004 y 0.006.

SOLUCIÓN

Para aplicar las Ecs. (3.15) debemos determinar las componentes x y y de la fuerza total sobre el proyectil. Sea **D** la fuerza de arrastre (Fig. 3.13). Como $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario en la dirección de **v**, podemos escribir **D** como

$$\mathbf{D} = -C|\mathbf{v}|^2\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -C|\mathbf{v}|\mathbf{v}.$$

Las fuerzas externas sobre el proyectil son su peso y la fuerza de arrastre,

$$\Sigma\mathbf{F} = -mg\,\mathbf{j} - C|\mathbf{v}|\mathbf{v},$$

por lo que las componentes de la fuerza total son

$$\Sigma F_x = -C\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,v_x, \qquad \Sigma F_y = -mg - C\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,v_y. \quad (3.16)$$

Consideremos el caso $C = 0.002$, y sea $\Delta t = 0.1$. En el tiempo inicial $t_0 = 0$, $x(t_0)$ y $y(t_0)$ son cero, $v_x(t_0) = 400$ pie/s y $v_y(t_0) = 400$ pie/s. Las componentes de la posición y la velocidad después del primer incremento de tiempo son

$$\begin{aligned} x(t_0 + \Delta t) &= x(t_0) + v_x(t_0)\Delta t: \\ x(0.1) &= x(0) + v_x(0)\Delta t \\ &= 0 + (400)(0.1) = 40 \text{ pies}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t_0 + \Delta t) &= y(t_0) + v_y(t_0)\Delta t: \\ y(0.1) &= y(0) + v_y(0)\Delta t \\ &= 0 + (400)(0.1) = 40 \text{ pies}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x(t_0 + \Delta t) &= v_x(t_0) + \frac{1}{m}\Sigma F_x(t_0, x(t_0), y(t_0), v_x(t_0), v_y(t_0))\Delta t: \\ v_x(0.1) &= v_x(0) + \left\{-\frac{C}{m}\sqrt{[v_x(0)]^2 + [v_y(0)]^2}\,v_x(0)\right\}\Delta t \\ &= 400 + \left[-\frac{0.002}{100}\sqrt{(400)^2 + (400)^2}\,(400)\right](0.1) \\ &= 399.55 \text{ pie/s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y(t_0 + \Delta t) &= v_y(t_0) + \frac{1}{m}\Sigma F_y(t_0, x(t_0), y(t_0), v_x(t_0), v_y(t_0))\Delta t: \\ v_y(0.1) &= v_y(0) + \left\{-g - \frac{C}{m}\sqrt{[v_x(0)]^2 + [v_y(0)]^2}\,v_y(0)\right\}\Delta t \\ &= 400 + \left[-32.2 - \frac{0.002}{100}\sqrt{(400)^2 + (400)^2}\,(400)\right](0.1) \\ &= 396.33 \text{ pie/s}. \end{aligned}$$

Continuando de esta manera, obtenemos los siguientes resultados para los cinco primeros incrementos de tiempo:

Tiempo, s	x, pies	y, pies	v_x, pie/s	v_y, pie/s
0.0	0.00	0.00	400.00	400.00
0.1	40.00	40.00	399.55	396.33
0.2	79.95	79.63	399.10	392.66
0.3	119.86	118.90	398.65	389.00
0.4	159.73	157.80	398.21	385.35
0.5	199.55	196.33	397.77	381.70

Cuando no hay fuerza de arrastre ($C = 0$), podemos obtener la solución en forma cerrada para la trayectoria y compararla con soluciones numéricas, como se hace en la Fig. 3.14 para $\Delta t = 3.5$ s, 1.0 s y 0.1 s. Observe que la solución numérica con $\Delta t = 0.1$ s se aproxima bastante a la solución cerrada.

La Fig. 3.15 muestra las soluciones numéricas para los diversos valores de C cuando $\Delta t = 0.1$ s. Como se esperaba, el alcance del proyectil disminuye al aumentar C. Y cuando hay fuerza de arrastre, la forma de la trayectoria cambia. El proyectil desciende con un ángulo más inclinado que con el que asciende.

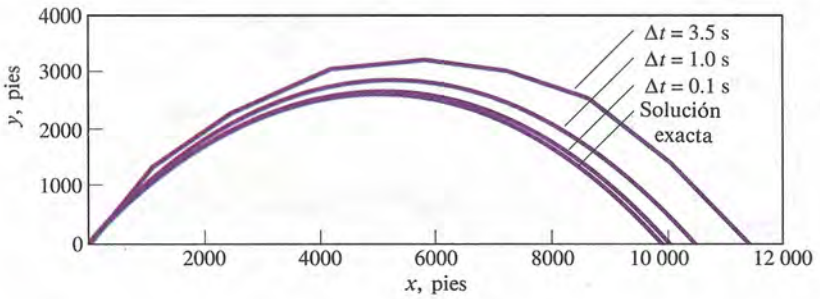


Figura 3.14
La solución cerrada para la trayectoria cuando $C = 0$ comparada con soluciones numéricas.

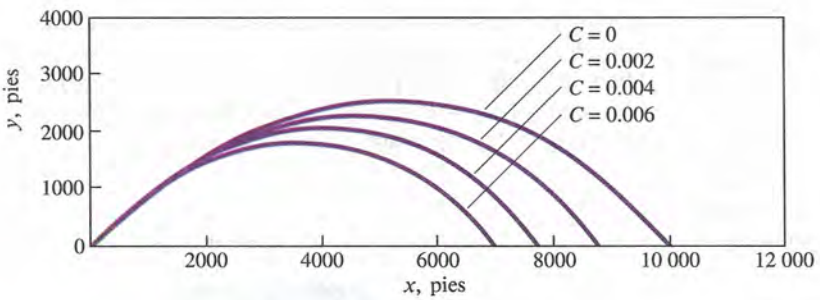


Figura 3.15
Trayectorias para diversos valores de C.

COMENTARIO

El desarrollo del primer computador digital completamente electrónico, llamado ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) y construido en la University of Pennsylvania entre 1943 y 1945, fue motivado en parte por la necesidad de calcular trayectorias de proyectiles. Este computador ocupaba toda una habitación, tenía 18 000 bulbos, 20 bytes de memoria RAM (*random-access memory*) y 450 bytes de memoria ROM (*read-only memory*).

Problemas

3.79 Un cuerpo de 1 kg se mueve a lo largo del eje x bajo la acción de la fuerza $F_x = 6t$ N. En $t = 0$, su posición y velocidad son $x = 0$ y $v_x = 10$ m/s. Usando integración numérica con $\Delta t = 0.1$ s, determine la posición y velocidad del cuerpo para los primeros cinco incrementos de tiempo.

Estrategia: Al inicio, $t_0 = 0$, $x(t_0) = 0$ y $v_x(t_0) = 10$ m/s. Con las Ecs. (3.13) y (3.14) podemos determinar la velocidad y la posición en el tiempo $t_0 + \Delta t = 0.1$ s. La posición es

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v_x(t_0)\Delta t:$$
$$x(0.1) = x(0) + v_x(0)\Delta t$$
$$= 0 + (10)(0.1) = 1 \text{ m},$$

y la velocidad es

$$v_x(t_0 + \Delta t) = v_x(t_0) + \frac{1}{m}F_x(t_0)\Delta t:$$
$$v_x(0.1) = 10 + \frac{1}{(1)}6(0)(0.1) = 10 \text{ m/s}.$$

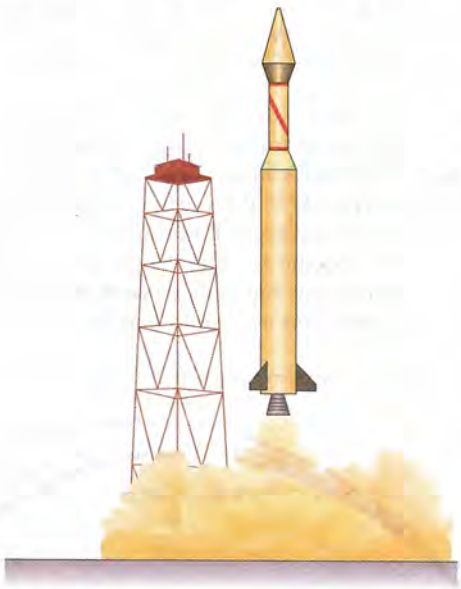
Use esos valores de la posición y la velocidad como las condiciones iniciales para el siguiente incremento de tiempo.

3.80 Para el cuerpo de 1 kg descrito en el Prob. 3.79, dibuje una gráfica comparando la solución exacta entre $t = 0$ y $t = 10$ s con las soluciones obtenidas usando integración numérica con $\Delta t = 2$ s, $\Delta t = 0.5$ s y $\Delta t = 0.1$ s.

3.81 En $t = 0$, un cuerpo se libera del reposo y cae con aceleración constante $g = 9.81$ m/s^2.
(a) Usando la forma de solución cerrada, determine la velocidad del cuerpo y la distancia que ha caído cuando $t = 2$ s.
(b) Aproxime las respuestas a la parte (a) usando integración numérica con $\Delta t = 0.2$ s.

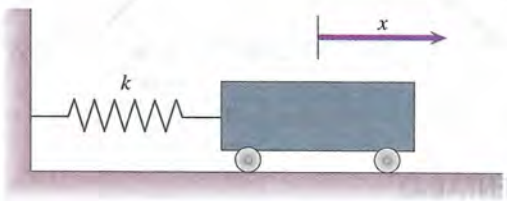
3.82 En el Prob. 3.81, dibuje una gráfica de la distancia que cae el cuerpo en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 4$ s, comparando la solución cerrada, la solución numérica usando $\Delta t = 0.5$ s y la solución numérica usando $\Delta t = 0.05$ s.

3.83 Un cohete de 1000 slugs parte del reposo y viaja verticalmente hacia arriba. La fuerza total ejercida sobre él es $F = 100\,000 + 10\,000t - v^2$ lb. Usando integración numérica con $\Delta t = 0.1$ s, determine la altura y la velocidad del cohete para los cinco primeros incrementos de tiempo (suponga que el cambio de masa del cohete es insignificante en este intervalo de tiempo).



P3.83

3.84 En la Fig. P3.84, la fuerza ejercida sobre la masa de 50 kg por el resorte lineal es $F = -kx$, donde x es el desplazamiento de la masa desde la posición en que el resorte no está estirado. La constante de resorte k es 50 N/m. La masa se libera del reposo en la posición $x = 1$ m. Use integración numérica con $\Delta t = 0.01$ s para determinar la posición y la velocidad de la masa para los primeros cinco pasos.



P3.84

3.85 En el Prob. 3.84, use integración numérica con $\Delta t = 0.01$ s para determinar la posición y la velocidad de la masa en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 10$ s. Dibuje las gráficas de sus resultados.

3.86 En $t = 0$, la velocidad de un elemento de máquina de 50 slugs que se mueve a lo largo del eje x es $v_x = 22$ pie/s. La fuerza total ΣF_x que actúa sobre el elemento a intervalos de 0.1 s desde $t = 0$ hasta $t = 0.9$ s es:

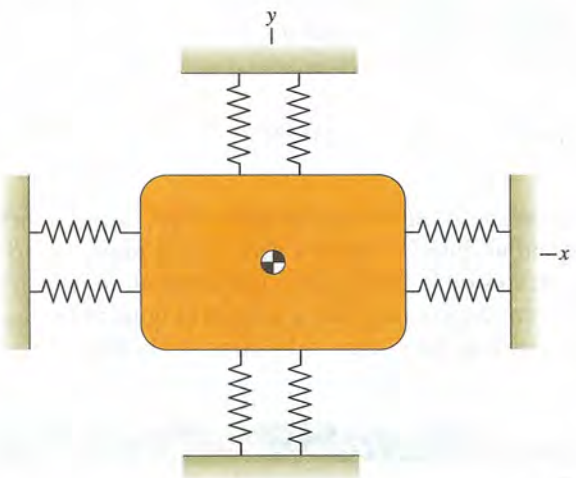
Tiempo, s	Fuerza, lb	Tiempo, s	Fuerza, lb
0.0	50.0	0.5	58.8
0.1	51.1	0.6	57.6
0.2	56.0	0.7	55.4
0.3	57.2	0.8	52.1
0.4	58.5	0.9	49.9

Determine aproximadamente la distancia que se mueve el elemento entre $t = 0$ y $t = 1$ s y su velocidad en $t = 1$ s.

3.87 Los soportes laterales de un elemento estructural de 100 kg ejercen las componentes horizontales de fuerza

$$F_x = -2000x, \qquad F_y = -2000y,$$

donde x y y son las coordenadas del centro de masa en metros. En $t = 0$, las coordenadas y los componentes de la velocidad del centro de masa son $x = 0.1$ m, $y = 0$, $v_x = 0$ y $v_y = 1$ m/s. Usando $\Delta t = 0.1$ s, determine la posición y la velocidad aproximadas del centro de masa para los primeros cinco pasos.



P3.87

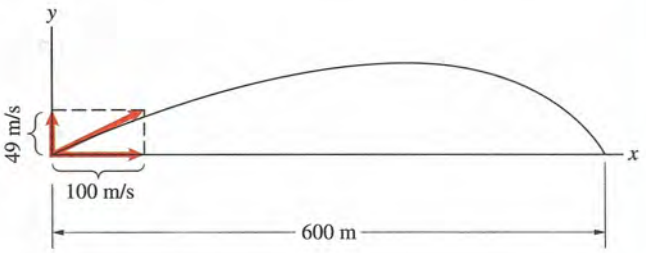
3.88 En el Prob. 3.87 use integración numérica con $\Delta t = 0.001$ s para determinar la trayectoria elíptica descrita por el centro de masa, y dibuje una gráfica de la trayectoria.

3.89 Un automóvil parte del reposo en $t = 0$. Su aceleración es

$$a = 10 + 2t - 0.0185t^3 \text{ pie/s}^2.$$

(a) Usando la forma cerrada de solución, determine la distancia que el automóvil ha recorrido y su velocidad en $t = 6$ s.
(b) Use integración numérica con $\Delta t = 0.1$ s para aproximar las respuestas obtenidas en la parte (a).
(c) Use integración numérica con $\Delta t = 0.01$ s para aproximar las respuestas obtenidas en la parte (a).

3.90 Se dispara un proyectil de 20 kg desde el suelo con componentes de velocidad $v_x = 100$ m/s y $v_y = 49$ m/s. La magnitud de la fuerza de arrastre aerodinámico es $C|\mathbf{v}|^2$, donde C es una constante. Si el alcance del proyectil es de 600 m, ¿cuál es el valor de la constante C? (Use integración numérica con $\Delta t = 0.01$ s para calcular la trayectoria.)



P3.90

Resumen del capítulo

La fuerza externa total sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración *de su centro de masa* respecto a un marco de referencia inercial:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \qquad \text{Ec. (3.4)}$$

Un marco de referencia es inercial si en él se puede aplicar la segunda ley expresada de esa forma. Un marco de referencia que se traslada con velocidad constante respecto a un marco inercial también es inercial.

Al expresar la segunda ley de Newton en un sistema coordenado se obtienen las ecuaciones escalares del movimiento:

Coordenadas cartesianas

$$\Sigma F_x = ma_x, \qquad \Sigma F_y = ma_y, \qquad \Sigma F_z = ma_z. \qquad \text{Ec. (3.5)}$$

Componentes normal y tangencial

$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt}, \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho}. \qquad \text{Ec. (3.7)}$$

Coordenadas polares

$$\Sigma F_r = m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right), \qquad \text{Ec. (3.9)}$$

$$\Sigma F_\theta = m\left(r\alpha + 2\frac{dr}{dt}\omega\right). \qquad \text{Ec. (3.10)}$$

Si el movimiento de un cuerpo se limita a un plano fijo, la componente de la fuerza total normal al plano es igual a cero. En el movimiento en línea recta, las componentes de la fuerza total perpendiculares a la línea son iguales a cero y la componente tangente a la línea es igual al producto de la masa por la aceleración del cuerpo a lo largo de la línea.

Problemas de repaso

3.91 En una misión futura, una nave espacial se aproxima a la superficie de un asteroide que pasa cerca de la Tierra. Justo antes de aterrizar, la nave desciende a velocidad constante respecto a la superficie del asteroide y su empuje hacia abajo es de 0.01 N. El computador disminuye el empuje a 0.005 N, y el interferómetro láser a bordo determina que la aceleración de la nave respecto a la superficie es ahora de 5×10^{-6} m/s^2 hacia abajo. ¿Cuál es la aceleración gravitatoria del asteroide cerca de su superficie?

P3.91

3.92 Una locamotora de "cremallera" tira de tres vagones de turistas hasta la cumbre de una montaña. La masa de cada vagón, incluidos sus pasajeros, es de 10 Mg y las fuerzas de fricción ejercidas por las ruedas de los vagones son insignificantes. Determine las fuerzas en los acoplamientos 1, 2 y 3 si (a) la locomotora se mueve a velocidad constante; (b) la locomotora acelera hacia arriba a 1.2 m/s^2.

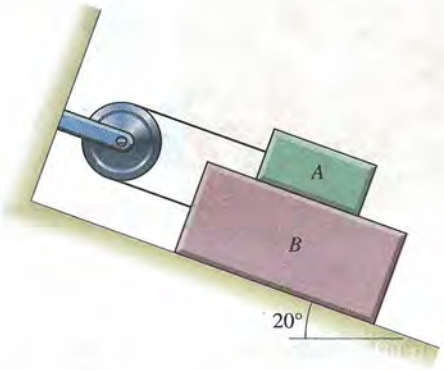
P3.92

3.93 El automóvil de la figura viaja a velocidad constante hacia arriba sobre el segmento recto de camino a la izquierda. Si los neumáticos del vehículo continúan ejerciendo la misma fuerza tangencial sobre el camino después de que el vehículo ha pasado la cresta, y viaja ahora sobre el segmento recto de camino a la derecha, ¿cuál será la aceleración del automóvil?

P3.93

3.94 El portaaviones *Nimitz* pesa 91 000 tons (una ton equivale a 2000 lb). Está viajando a su velocidad máxima de aproximadamente 30 nudos (un nudo equivale a 6076 pie/h) cuando se apagan sus motores. Si el agua ejerce una fuerza de arrastre de 20 000v lb, donde v es la velocidad del portaaviones en pie/s, ¿qué distancia recorre éste antes de detenerse?

3.95 Si $m_A = 10$ kg, $m_B = 40$ kg y el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es $\mu_k = 0.11$, ¿cuál es la aceleración de B a lo largo de la superficie inclinada?



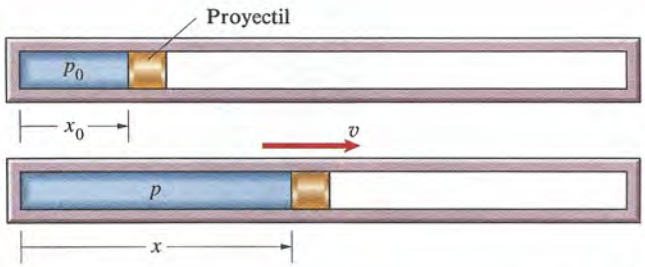
P3.95

3.96 En el Prob. 3.95, si A pesa 20 lb, B pesa 100 lb y el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es $\mu_k = 0.15$, ¿cuál es la tensión en la cuerda cuando B resbala hacia abajo sobre la superficie inclinada?

3.97 Para investigar propiedades de materiales se usa una pistola de gas que acelera proyectiles a altas velocidades. El proyectil se mantiene en su lugar mientras se bombea gas a una alta presión p_0 en la parte izquierda del tubo y simultáneamente se evacúa su parte derecha. El proyectil se libera y es acelerado por el gas en expansión. Suponga que la presión p del gas está relacionada con el volumen V que ocupa por medio de la relación pV^γ = constante, donde γ es una constante. Si se puede ignorar la fricción, demuestre que la velocidad del proyectil en esta posición x es

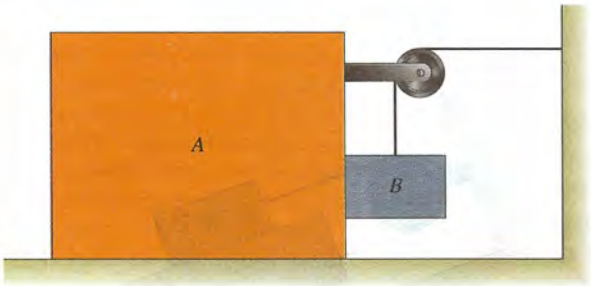
$$v = \sqrt{\frac{2p_0Ax_0^\gamma}{m(\gamma-1)}\left(\frac{1}{x_0^{\gamma-1}} - \frac{1}{x^{\gamma-1}}\right)},$$

donde m es la masa del proyectil y A es el área de la sección transversal del tubo.



P3.97

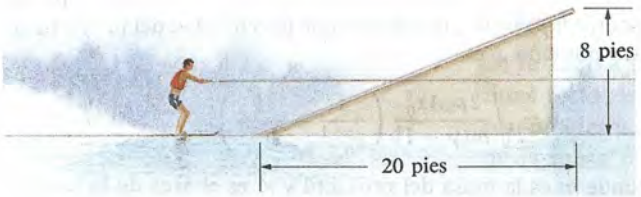
3.98 Los pesos de los bloques mostrados son $W_A = 120$ lb y $W_B = 20$ lb, y sus superficies son lisas. Determine la aceleración del bloque A y la tensión en la cuerda.



P3.98

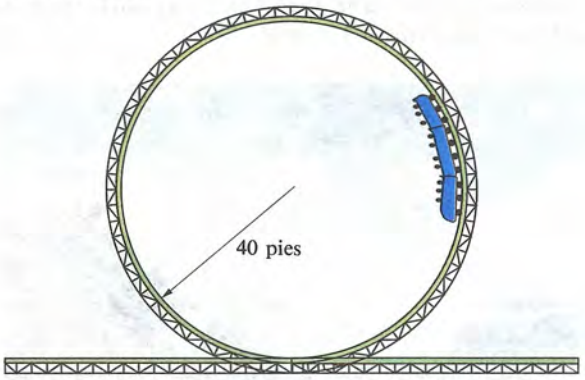
3.99 Un transbordador espacial de 100 Mg está en órbita cuando sus motores se encienden, ejerciendo un empuje $\mathbf{T} = 10\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ (kN) durante 2 s. Ignore el cambio resultante en su masa. Al final de los dos segundos, el combustible está aún agitándose en los tanques del transbordador. ¿Cuál es el cambio en la velocidad del centro de masa del transbordador (incluyendo el combustible que contiene) debido al encendido de los motores durante 2 s?

3.100 En la Fig. 3.100, el esquiador acuático entra a la rampa con una velocidad de 25 mi/h paralela a la superficie de la rampa. Ignorando la fricción y suponiendo que la cuerda de arrastre no ejerce fuerza sobre él una vez que toca la rampa, calcule la longitud horizontal de su salto desde el extremo de la rampa.



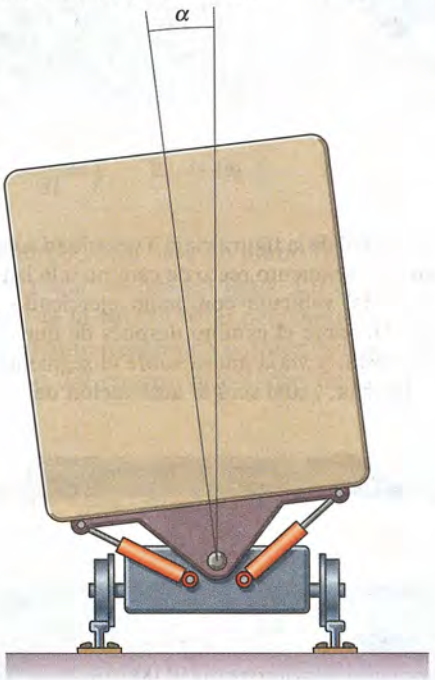
P3.100

3.101 Suponga que se va a diseñar la vía de un lazo vertical de 40 pies de radio. Si se decide que, por seguridad, la fuerza hacia abajo ejercida sobre un pasajero por su asiento en la parte superior del lazo debe ser de por lo menos la mitad de su peso, ¿cuál es la mínima velocidad segura de los carros en la parte superior del lazo?



P3.101

3.102 Si se quieren diseñar los vagones de un tren de manera que se inclinen al entrar a una curva para lograr la máxima comodidad de los pasajeros, ¿cuál es la relación entre el ángulo α de inclinación deseada, la velocidad v del tren y el radio de curvatura instantáneo ρ de la vía?

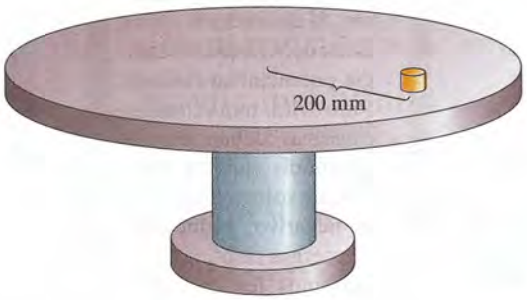


P3.102

3.103 Si un automóvil viaja a 30 mi/h por un camino recto y el coeficiente de fricción estática entre sus neumáticos y el camino es $\mu_s = 0.8$, ¿cuál es la máxima aceleración negativa que el conductor puede obtener al aplicar los frenos?

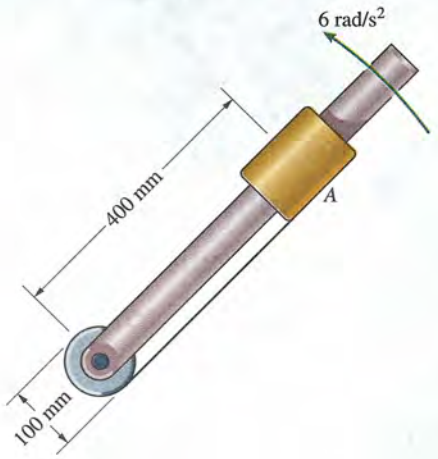
3.104 Si el automóvil del Prob. 3.103 toma una curva circular no peraltada de 100 pies de radio, ¿cuál es la desaceleración tangencial máxima que el conductor puede lograr al aplicar los frenos?

3.105 Para determinar el coeficiente de fricción estática entre dos materiales, se coloca una pequeña muestra de uno de los materiales sobre un disco horizontal con su superficie en contacto con la del otro; luego se gira el disco partiendo del reposo con una aceleración angular constante de 0.4 rad/s^2. Si se determina que la pequeña muestra resbala sobre el disco después de 9.903 s, ¿cuál es el coeficiente de fricción?



P3.105

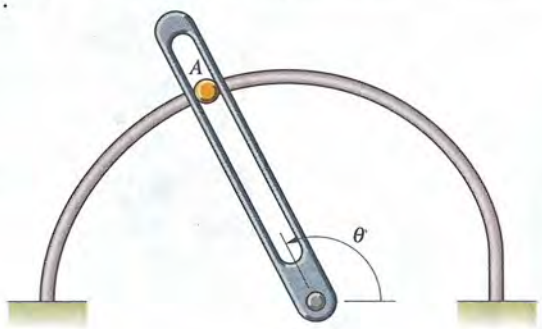
3.106 En la Fig. P3.106, al girar la barra lisa *en un plano horizontal*, la cuerda se enrolla sobre el cilindro fijo y atrae al collarín A de 1 kg. La barra parte del reposo en $t = 0$ en la posición mostrada y gira con aceleración angular constante. ¿Cuál es la tensión en la cuerda en $t = 1$ s?



P3.106

3.107 En el Prob. 3.106, suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el collarín y la barra es $\mu_k = 0.2$. ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando $t = 1$ s?

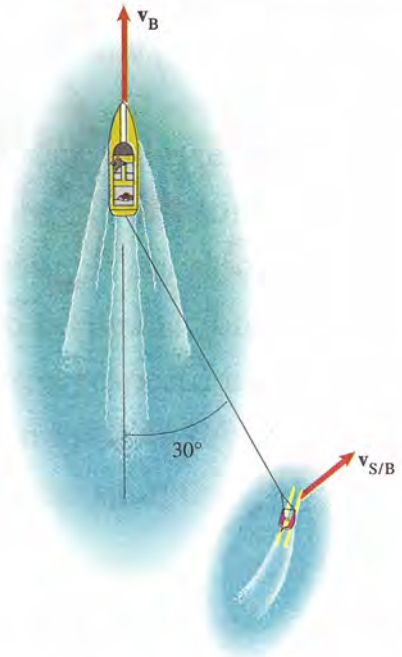
3.108 El deslizador A de 1 kg es empujado por la barra ranurada a lo largo de la barra curva. La barra curva está *en el plano horizontal*, y su perfil es descrito por $r = 2(\theta/2\pi + 1)$ m, donde θ está en radianes. La posición angular de la barra ranurada es $\theta = 2t$ rad. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza externa total ejercida sobre el deslizador cuando $\theta = 120°$.



P3.108

3.109 En el Prob. 3.108, suponga que la barra curva se encuentra *en un plano vertical*. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza total ejercida sobre A por las barras curva y ranurada cuando $t = 0.5$ s.

3.110 La lancha se mueve respecto al agua con velocidad constante de magnitud $|\mathbf{v}_B| = 30$ pie/s. La magnitud de la velocidad del esquiador (S) de 170 lb respecto a la lancha es $|\mathbf{v}_{S/B}| = 10$ pie/s. La tensión en la cuerda de 36 pies es de 40 lb, y la fuerza horizontal ejercida sobre el esquiador por el agua es perpendicular a la dirección de su movimiento respecto al agua. Si se ignoran otras fuerzas horizontales, ¿cuál es la aceleración del esquiador respecto al agua en la dirección de su movimiento?



P3.110

3.111 En el Prob. 3.110, ¿cuál es la magnitud de la fuerza horizontal ejercida por el agua sobre el esquiador?

La telesilla efectúa trabajo al aumentar la energía potencial gravitatoria de los esquiadores. Al descender la colina, éstos convierten su energía potencial en cinética. Para evitar una velocidad excesiva, deben esquiar de modo que la nieve efectúe sobre ellos trabajo negativo, reduciendo su energía cinética. Aquí usaremos los conceptos de trabajo y energía para analizar los movimientos de los cuerpos.

Capítulo 4

Métodos energéticos

LOS métodos energéticos se usan en casi todas las áreas de la ciencia y de la ingeniería. Los cambios de energía deben considerarse en el diseño de cualquier dispositivo móvil, incluyendo las telesillas para esquiadores y los esquíes. Los conceptos de energía y conservación de la energía se originaron en gran parte en el estudio de la mecánica clásica. Una simple transformación de la segunda ley de Newton da lugar a una ecuación que induce las definiciones de trabajo, energía cinética (energía debida al movimiento de un cuerpo) y energía potencial (energía debida a la posición de un cuerpo). Esta ecuación relaciona el trabajo efectuado por las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo con el cambio en la magnitud de su velocidad. Esta relación puede simplificar considerablemente la solución de problemas en los que intervienen fuerzas que dependen de la posición de un cuerpo, como las fuerzas gravitatorias o las fuerzas ejercidas por resortes. Además, al estudiar en este capítulo las deducciones y aplicaciones se desarrollará su intuición respecto a la energía y sus transformaciones, y obtendrá una mejor visión de la aplicación de esas ideas a otros campos.

Trabajo y energía cinética

4.1 *Principio del trabajo y la energía*

Hemos usado la segunda ley de Newton para relacionar la aceleración del centro de masa de un cuerpo con su masa y las fuerzas externas sobre él. Mostraremos ahora cómo esta ecuación vectorial puede transformarse matemáticamente en una forma escalar que es muy útil en ciertas circunstancias. Comenzamos con la segunda ley de Newton en la forma

$$\Sigma \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{4.1}$$

y tomamos el producto punto de ambos miembros con la velocidad:

$$\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}. \tag{4.2}$$

Expresando la velocidad en el miembro izquierdo de esta ecuación como $d\mathbf{r}/dt$ y observando que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v},$$

podemos escribir la Ec. (4.2) como

$$\Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m\, d(v^2), \tag{4.3}$$

donde $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ es el cuadrado de la magnitud de $\mathbf{v}$. El término de la izquierda es el **trabajo** expresado en términos de la fuerza externa total sobre el cuerpo y del desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$. Integrando,

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{v_1^2}^{v_2^2} \frac{1}{2} m\, d(v^2), \tag{4.4}$$

donde v_1 y v_2 son las magnitudes de la velocidad en las posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Evaluando la integral de la derecha, obtenemos

$$\boxed{U = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2,} \tag{4.5}$$

donde

$$\boxed{U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}} \tag{4.6}$$

es el trabajo hecho cuando el centro de masa del cuerpo se mueve de la posición $\mathbf{r}_1$ a la posición $\mathbf{r}_2$. El término $\frac{1}{2}mv^2$ se llama **energía cinética**. Las dimensiones del trabajo, y por consiguiente las de la energía cinética, son (fuerza) × (longitud). En unidades inglesas, el trabajo se expresa en lb-pie. En unidades SI, el trabajo se expresa en newton-metro, o joule (J).

La Ec. (4.5) establece que el trabajo sobre un cuerpo que se mueve de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ es igual al cambio en su energía cinética. Esto recibe el nombre de **principio del trabajo y la energía**. Si se puede evaluar el trabajo, este principio nos permite determinar el cambio en la magnitud de la velocidad de un cuerpo cuando éste se mueve de una posición a otra. También se puede igualar el trabajo total realizado por fuerzas externas sobre un conjunto de cuerpos con el cambio en la energía cinética total del sistema *si las fuerzas internas no efectúan trabajo neto*. Las fuerzas de fricción internas pueden efectuar trabajo neto sobre un sistema (véase el Ej. 4.3).

Si bien el principio del trabajo y la energía relaciona los cambios de posición con los de velocidad, no sirve para obtener otra información acerca del movimiento, como el tiempo requerido para moverse de una posición a otra. Además, como el trabajo es una integral respecto a la posición, sólo puede evaluarse cuando las fuerzas que lo efectúan se conocen como funciones de la posición. A pesar de esto, el principio es muy útil en ciertos problemas porque el trabajo puede determinarse con facilidad.

4.2 Trabajo y potencia

En esta sección analizamos cómo determinar el trabajo hecho sobre un cuerpo, tanto en general como en varios casos especiales comunes e importantes. También definimos la potencia hecha por las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y mostramos cómo se calcula.

Evaluación del trabajo

Consideremos un cuerpo en movimiento curvilíneo (Fig. 4.1a) y especifiquemos su posición por la coordenada s medida a lo largo de su trayectoria desde O. En términos del vector unitario tangencial $\mathbf{e}_t$, su velocidad es

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\,\mathbf{e}_t.$$

Como $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, podemos multiplicar la velocidad por dt a fin de obtener una expresión para el vector $d\mathbf{r}$ que describe un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria (Fig. 4.1b):

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt = ds\,\mathbf{e}_t.$$

El trabajo hecho por las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo a consecuencia del desplazamiento $d\mathbf{r}$ es

$$\Sigma\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = (\Sigma\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_t)ds = \Sigma F_t\,ds,$$

donde ΣF_t es la componente tangencial de la fuerza total. Por tanto, al

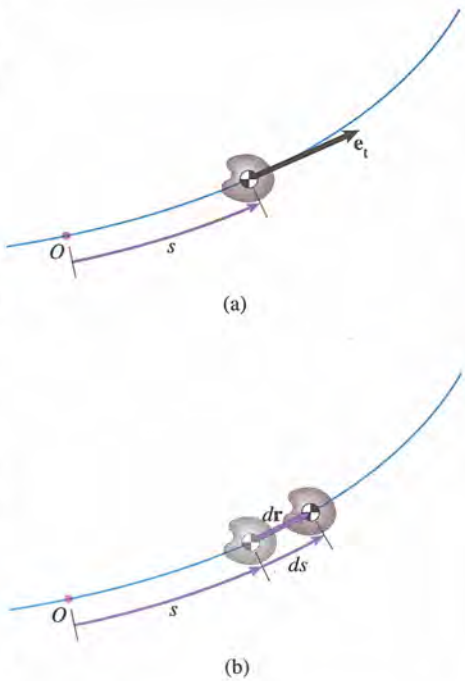
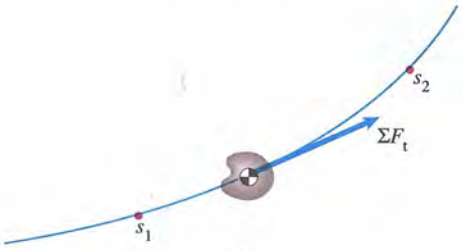


Figura 4.1
(a) Coordenada s y vector unitario tangente.
(b) Desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$.



(c)

Figura 4.1

(c) El trabajo realizado de s_1 a s_2 está determinado por la componente tangencial de las fuerzas externas.

moverse el cuerpo de s_1 a s_2 (Fig. 4.1c), el trabajo realizado es

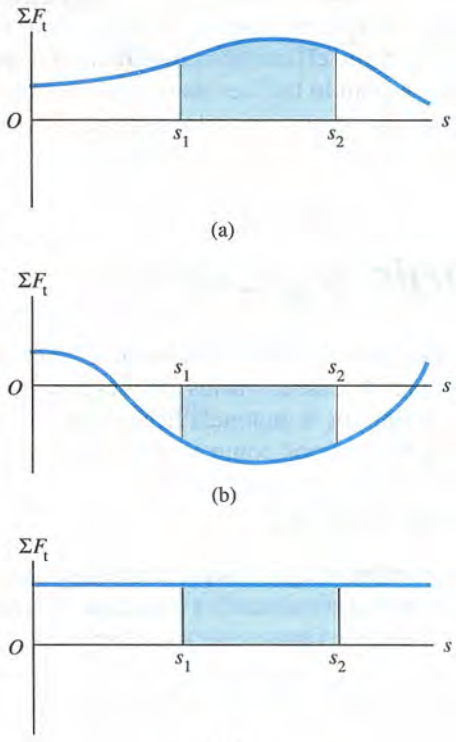
$$U = \int_{s_1}^{s_2} \Sigma F_t \, ds. \tag{4.7}$$

El trabajo es la integral de la componente tangencial de la fuerza total respecto a la distancia a lo largo de la trayectoria. Así, el trabajo efectuado es el área definida por la gráfica de la fuerza tangencial de s_1 a s_2 (Fig. 4.2a). *Las componentes de fuerza perpendiculares a la trayectoria no trabajan*. Observe que si ΣF_t es opuesta a la dirección del movimiento en alguna parte de la trayectoria (frenado), el trabajo es negativo (Fig. 4.2b). Si ΣF_t es constante entre s_1 y s_2, el trabajo es sólo el producto de la fuerza total tangencial por el desplazamiento (Fig. 4.2c):

$$U = \Sigma F_t(s_2 - s_1). \quad \textbf{Fuerza tangencial constante} \tag{4.8}$$

Figura 4.2

(a) El trabajo es igual al área definida por la gráfica de la fuerza tangencial en función de la distancia a lo largo de la trayectoria.
(b) Si la fuerza tangencial es opuesta a la dirección del movimiento se efectúa trabajo negativo.
(c) El trabajo realizado por una fuerza tangencial constante es igual al producto de la fuerza por la distancia.



En los siguientes ejemplos aplicamos el principio del trabajo y la energía y usamos las Ecs. (4.7) y (4.8) para evaluar el trabajo. Se debe considerar el uso de este principio para relacionar el cambio de velocidad de un cuerpo con el cambio de su posición. Esto suele implicar dos pasos:

1. Identifique las fuerzas que efectúan trabajo. *En un diagrama de cuerpo libre determine las fuerzas externas que efectúan trabajo sobre el cuerpo.*
2. Aplique el principio del trabajo y la energía. *Iguale el trabajo total hecho en un cambio de posición con el cambio en la energía cinética.*

Ejemplo 4.1

El recipiente A de 400 lb de la Fig. 4.3 parte del reposo en la posición $s = 0$ y está sometido a una fuerza horizontal $F = 160 - 10s$ lb por el cilindro hidráulico. El coeficiente de fricción cinética entre el recipiente y el piso es $\mu_k = 0.26$. ¿Cuál es la velocidad del recipiente cuando éste ha alcanzado la posición $s = 4$ pies?

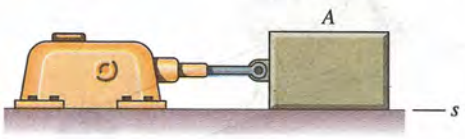
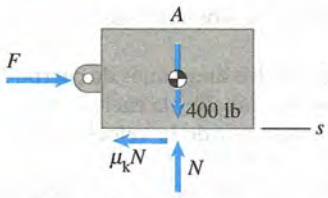


Figura 4.3

SOLUCIÓN

Identifique las fuerzas que efectúan trabajo En la Fig. (a) aparece el diagrama de cuerpo libre del recipiente. Las fuerzas tangentes a su trayectoria son la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico y la fuerza de fricción. La aceleración del recipiente en la dirección vertical es cero, por lo que $N = 400$ lb.



(a) Diagrama de cuerpo libre del recipiente.

Aplique el principio del trabajo y la energía Sea v la magnitud de la velocidad del recipiente en $s = 4$ pies. Usando la Ec. (4.7) para evaluar el trabajo obtenemos

$$\int_{s_1}^{s_2} \Sigma F_t \, ds = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 :$$

$$\int_0^4 (F - \mu_k N) ds = \frac{1}{2}mv^2 - 0,$$

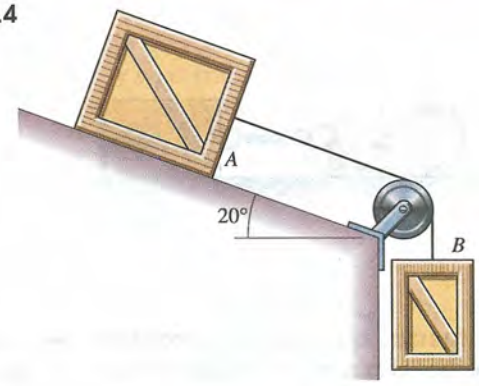
$$\int_0^4 [(160 - 10s) - (0.26)(400)] ds = \frac{1}{2}\left(\frac{400}{32.2}\right)v^2.$$

Evaluando la integral y despejando v obtenemos $v = 4.81$ pie/s.

Ejemplo 4.2

Las dos cajas de la Fig. 4.4 se liberan del reposo. Sus masas son $m_A = 40$ kg y $m_B = 30$ kg, y el coeficiente de fricción cinética entre la caja A y la superficie inclinada es $\mu_k = 0.15$. Halle su velocidad cuando se han desplazado 400 mm.

Figura 4.4



ESTRATEGIA

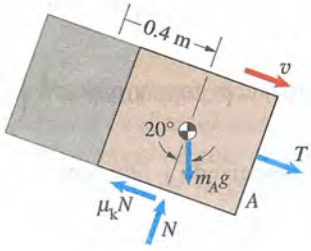
Determinaremos la velocidad de dos maneras.

Primer método Dibujando los diagramas de cuerpo libre de las cajas aisladas y aplicando el principio del trabajo y la energía, podemos obtener dos ecuaciones en términos de la magnitud de la velocidad y la tensión en el cable.

Segundo método Podemos dibujar un solo diagrama de cuerpo libre de las dos cajas, el cable y la polea, y aplicar el principio del trabajo y la energía al sistema completo.

SOLUCIÓN

Primer método La Fig. (a) es el diagrama de cuerpo libre de la caja A. Las fuerzas que efectúan trabajo cuando la caja se mueve hacia abajo son las tangenciales a su trayectoria: la tensión T, la componente tangencial del peso $m_A g$ sen 20° y la fricción $\mu_k N$. Como la aceleración de la caja normal a la superficie es cero, $N = m_A g \cos 20°$. Sea v la magnitud de la velocidad de la caja cuando



(a) Diagrama de cuerpo libre de A.

ésta se ha movido 400 mm. Usando la Ec. (4.7) para determinar el trabajo, igualamos el trabajo hecho sobre A con el cambio en su energía cinética:

$$\int_{s_1}^{s_2} \Sigma F_t \, ds = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 :$$

$$\int_0^{0.4} [T + m_A g \operatorname{sen} 20° - \mu_k (m_A g \cos 20°)] \, ds = \frac{1}{2}m_A v^2 - 0. \quad (4.9)$$

Las fuerzas que efectúan trabajo sobre la caja B son su peso $m_B g$ y la tensión T (Fig. b). La magnitud de su velocidad es igual que la de la caja A. El trabajo hecho sobre B es igual al cambio en su energía cinética:

$$\int_{s_1}^{s_2} \Sigma F_t \, ds = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 :$$

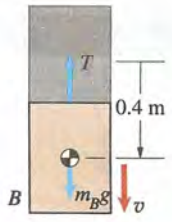
$$\int_0^{0.4} (m_B g - T) \, ds = \frac{1}{2}m_B v^2 - 0. \quad (4.10)$$

Sumando las Ecs. (4.9) y (4.10) eliminamos T y obtenemos

$$\int_0^{0.4} (m_A g \operatorname{sen} 20° - \mu_k m_A g \cos 20° + m_B g) \, ds = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 :$$

$$[40 \operatorname{sen} 20° - (0.15)(40) \cos 20° + 30](9.81)(0.4) = \frac{1}{2}(40 + 30)v^2.$$

Despejando v, la velocidad de las cajas es $v = 2.07$ m/s.



(b) Diagrama de cuerpo libre de B.

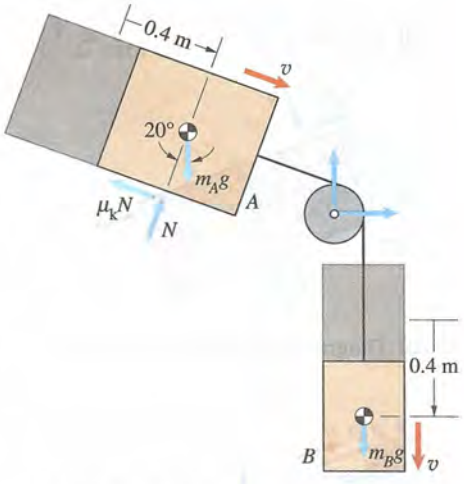
Segundo método Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del sistema que consiste en las cajas, el cable y la polea de la Fig. (c). Observe que la tensión del cable no aparece en este diagrama de cuerpo libre. Las reacciones en el soporte de pasador de la polea no efectúan trabajo porque el soporte no se mueve. El trabajo total realizado por las fuerzas externas sobre el sistema cuando las cajas se mueven 400 mm es igual al cambio en la energía cinética total del sistema:

$$\int_0^{0.4} [m_A g \operatorname{sen} 20° - \mu_k (m_A g \cos 20°)] \, ds + \int_0^{0.4} m_B g \, ds$$

$$= \left(\frac{1}{2}m_A v^2 + \frac{1}{2}m_B v^2\right) - 0 :$$

$$[40 \operatorname{sen} 20° - (0.15)(40) \cos 20° + 30](9.81)(0.4) = \frac{1}{2}(40 + 30)v^2.$$

Esta ecuación es idéntica a la obtenida aplicando el principio del trabajo y la energía a las cajas aisladas.



(c) Diagrama de cuerpo libre del conjunto.

COMENTARIO

A menudo se encontrará que es más fácil aplicar el principio del trabajo y la energía a un sistema completo que a sus partes por separado. Sin embargo, como veremos en el siguiente ejemplo, las fuerzas internas en un sistema pueden efectuar un trabajo neto.

Ejemplo 4.3

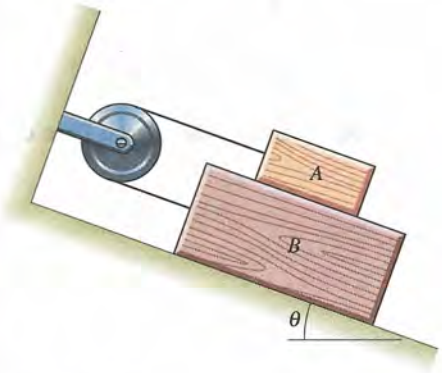


Figura 4.5

Las cajas A y B de la Fig. 4.5 se liberan del reposo. El coeficiente de fricción cinética entre A y B es μ_k, y la fricción entre B y el plano inclinado puede ignorarse. ¿Cuál es su velocidad cuando las cajas se han movido una distancia b?

ESTRATEGIA

Aplicando el principio del trabajo y la energía a cada caja, podemos obtener dos ecuaciones en términos de la tensión en el cable y la velocidad.

SOLUCIÓN

Dibujamos los diagramas de cuerpo libre de las cajas en las Figs. (a) y (b). La aceleración de A normal a la superficie inclinada es cero, por lo que $N = m_A g \cos\theta$. Sea v la magnitud de la velocidad cuando las cajas se han movido una distancia b. El trabajo hecho sobre A es igual al cambio en su energía cinética,

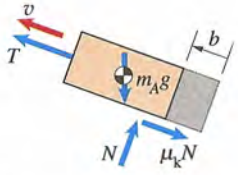
$$\int_0^b (T - m_A g \operatorname{sen}\theta - \mu_k m_A g \cos\theta)\, ds = \frac{1}{2} m_A v^2, \tag{4.11}$$

y el trabajo hecho sobre B es igual al cambio en su energía cinética,

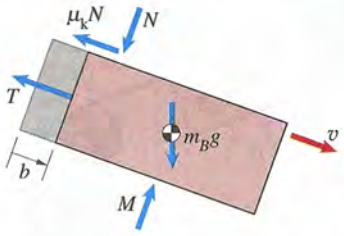
$$\int_0^b (-T + m_B g \operatorname{sen}\theta - \mu_k m_A g \cos\theta)\, ds = \frac{1}{2} m_B v^2. \tag{4.12}$$

Sumando estas ecuaciones para eliminar T y despejando v obtenemos

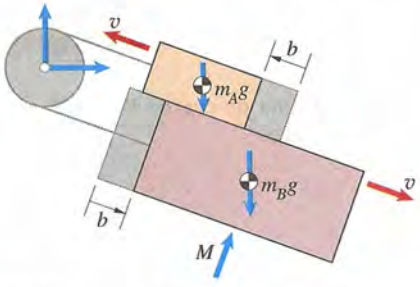
$$v = \sqrt{2gb[(m_B - m_A)\operatorname{sen}\theta - 2\mu_k m_A \cos\theta]/(m_A + m_B)}.$$



(a) Diagrama de cuerpo libre de A.



(b) Diagrama de cuerpo libre de B.



(c) Diagrama de cuerpo libre del conjunto.

COMENTARIO

Si intentamos resolver este ejemplo aplicando el principio del trabajo y la energía al sistema consistente en las cajas, el cable y la polea (Fig. c), obtenemos un resultado incorrecto. Igualando el trabajo hecho por las fuerzas externas al cambio en la energía cinética total del sistema, obtenemos

$$\int_0^b m_B g \operatorname{sen}\theta\, ds - \int_0^b m_A g \operatorname{sen}\theta\, ds = \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2 :$$

$$(m_B g \operatorname{sen}\theta) b - (m_A g \operatorname{sen}\theta) b = \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2.$$

Pero si sumamos las ecuaciones de trabajo y energía para las cajas aisladas —Ecs. (4.11) y (4.12)— obtenemos la ecuación correcta:

$$\underbrace{[(m_B g \operatorname{sen}\theta) b - (m_A g \operatorname{sen}\theta) b]}_{\text{Trabajo efectuado por las fuerzas externas}} + \underbrace{[-(2\mu_k m_A g \cos\theta) b]}_{\text{Trabajo efectuado por las fuerzas internas}} = \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2.$$

Las fuerzas de fricción interna que las cajas ejercen entre sí efectúan trabajo neto sobre el sistema. No tomamos en cuenta este trabajo al aplicar el principio del trabajo y la energía al diagrama de cuerpo libre del sistema.

Trabajo realizado por varias fuerzas

Hemos visto que si la componente tangencial de la fuerza externa total sobre un cuerpo se conoce en función de la distancia a lo largo de su trayectoria, el principio del trabajo y la energía permite relacionar un cambio de posición con el cambio de velocidad del cuerpo. Sin embargo, para ciertos tipos de fuerzas no sólo se puede determinar el trabajo sin conocer la componente tangencial de la fuerza en función de la distancia sobre la trayectoria, sino que incluso no es necesario conocer la trayectoria. Dos ejemplos importantes son el peso y la fuerza ejercida por un resorte.

Peso Para evaluar el trabajo hecho por el peso de un cuerpo, orientamos un sistema coordenado cartesiano con el eje y hacia arriba y suponemos que el cuerpo se mueve de la posición 1 con coordenadas (x_1, y_1, z_1) a la posición 2 con coordenadas (x_2, y_2, z_2) (Fig. 4.6a). La fuerza ejercida por su peso es $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$ (otras fuerzas pueden actuar sobre el cuerpo, pero nos interesa sólo el trabajo hecho por su peso). Como $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, podemos multiplicar la velocidad, expresada en coordenadas cartesianas, por dt a fin de obtener una expresión para el vector $d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{r} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) dt = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}.$$

Formando el producto de $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (-mg\,\mathbf{j}) \cdot (dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = -mg\,dy,$$

el trabajo realizado al moverse el cuerpo de la posición 1 a la posición 2 se reduce a una integral con respecto a y:

$$U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{y_1}^{y_2} -mg\,dy.$$

Evaluando la integral, obtenemos el trabajo efectuado por el peso de un cuerpo al moverse entre dos posiciones:

$$\boxed{U = -mg(y_2 - y_1).} \qquad (4.13)$$

El trabajo es simplemente el producto del peso por el cambio en la altura del cuerpo. Es negativo si la altura aumenta y positivo si disminuye. Observe que *el trabajo efectuado es el mismo independientemente de la trayectoria que siga el cuerpo entre las posiciones 1 y 2* (Fig. 4.6b). No es necesario conocer la trayectoria para determinar el trabajo hecho por el peso de un cuerpo, basta conocer las alturas relativas de las dos posiciones.

¿Qué trabajo realiza el peso de un cuerpo si se toma en cuenta su variación con la distancia desde el centro de la Tierra? En coordenadas polares, podemos escribir el peso de un cuerpo a una distancia r desde el centro de la Tierra como (Fig. 4.7)

$$\mathbf{F} = -\frac{mgR_E^2}{r^2}\mathbf{e}_r.$$

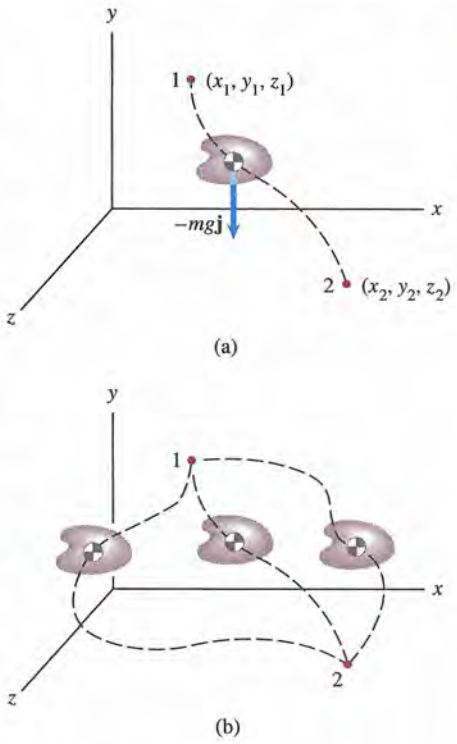


Figura 4.6

(a) Cuerpo en movimiento entre dos posiciones.
(b) El trabajo efectuado por el peso es igual para cualquier trayectoria.

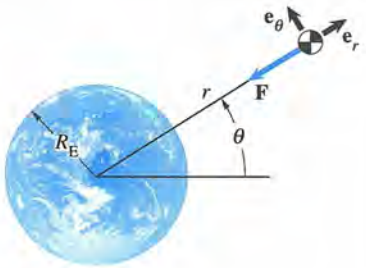


Figura 4.7

Peso de un cuerpo expresado en coordenadas polares.

Usando la expresión para la velocidad en coordenadas polares, el vector $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$ es

$$d\mathbf{r} = \left(\frac{dr}{dt}\,\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}_\theta\right)dt = dr\,\mathbf{e}_r + r\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta. \tag{4.14}$$

El producto escalar de $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \left(-\frac{mgR_E^2}{r^2}\mathbf{e}_r\right)\cdot(dr\,\mathbf{e}_r + r\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta) = -\frac{mgR_E^2}{r^2}\,dr,$$

por lo que el trabajo se reduce a una integral con respecto a r:

$$U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{mgR_E^2}{r^2}dr.$$

Evaluando la integral obtenemos el trabajo efectuado por el peso de un cuerpo, considerando la variación del peso con la altura:

$$\boxed{U = mgR_E^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).} \tag{4.15}$$

De nuevo, el trabajo es independiente de la trayectoria entre las posiciones 1 y 2. Para evaluarlo, sólo se necesita conocer la distancia radial del cuerpo desde el centro de la Tierra en las dos posiciones.

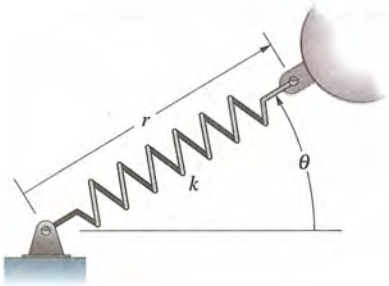


Figura 4.8
Fuerza ejercida por un resorte lineal expresada en coordenadas polares.

Resortes Supongamos que un resorte lineal conecta un cuerpo a un soporte fijo. En coordenadas polares (Fig. 4.8), la fuerza sobre el cuerpo es

$$\mathbf{F} = -k(r - r_0)\,\mathbf{e}_r,$$

donde k es la constante del resorte y r_0 es la longitud del resorte sin estirar. Usando la Ec. (4.14), el producto escalar de $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = [-k(r - r_0)\,\mathbf{e}_r]\cdot(dr\,\mathbf{e}_r + r\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta) = -k(r - r_0)\,dr.$$

Conviene expresar el trabajo de un resorte en términos de su **alargamiento**, definido por $S = r - r_0$. (Aunque esta palabra suele implicar un incremento de longitud, la usamos aquí para denotar cualquier cambio de longitud del resorte. Un alargamiento negativo reduce la longitud.) En términos de esta variable, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -kS\,dS$, y el trabajo efectuado es

$$U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{S_1}^{S_2} -kS\,dS.$$

El trabajo realizado por un resorte unido a un soporte fijo es

$$\boxed{U = -\frac{1}{2}k(S_2^2 - S_1^2),} \tag{4.16}$$

donde S_1 y S_2 son el alargamiento en las posiciones inicial y final.

No se necesita conocer la trayectoria del cuerpo para determinar el trabajo realizado por el resorte. Recuerde que la Ec. (4.16) se aplica sólo a un resorte *lineal*. En Fig. 4.9 determinamos el trabajo hecho al estirar un resorte lineal calculando el área definida por la gráfica de kS en función de S.

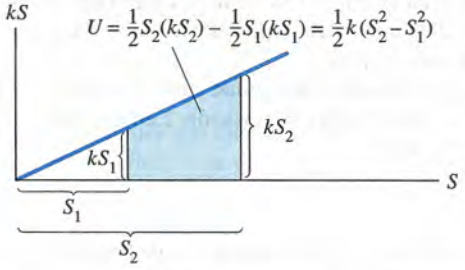


Figura 4.9
Trabajo efectuado al estirar un resorte lineal de S_1 a S_2. (Si $S_2 > S_1$, el trabajo realizado *sobre* el resorte es positivo, por lo que el trabajo realizado *por* el resorte es negativo.)

Potencia

La **potencia** es la razón con que se efectúa trabajo. El trabajo hecho por las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo durante un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$ es

$$\Sigma\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Obtenemos la potencia P dividiendo esta expresión entre el intervalo de tiempo dt durante el cual tiene lugar el desplazamiento:

$$P = \Sigma\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \tag{4.17}$$

Ésta es la potencia transmitida a o desde el cuerpo, dependiendo de si P es positiva o negativa. En unidades SI, la potencia se expresa en newton-metro entre segundo, que es un joule entre segundo (J/s) o watts (W). En unidades inglesas se expresa en libra-pie entre segundo o bien en caballos de potencia (hp), que es igual a 746 W o unos 550 lb-pie/s.

Observe en la Ec. (4.3) que la potencia es igual a la razón de cambio de la energía cinética del cuerpo:

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

La transmisión de potencia hacia o desde un cuerpo hace que su energía cinética aumente o disminuya. Esta relación permite escribir el promedio de la potencia respecto al tiempo durante un intervalo de t_1 a t_2 como

$$P_{\text{media}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{v_1^2}^{v_2^2} \frac{1}{2}m\,d(v^2).$$

Este resultado establece que la potencia media transmitida a o desde un cuerpo durante un intervalo de tiempo es igual al cambio en su energía cinética, o al trabajo efectuado, dividido entre el intervalo de tiempo:

$$P_{\text{media}} = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{U}{t_2 - t_1}. \tag{4.18}$$

Ejemplo 4.4

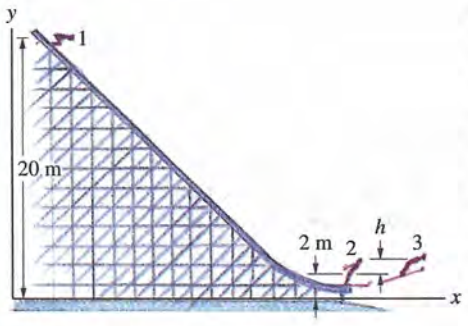


Figura 4.10

El esquiador de la Fig. 4.10 viaja a 15 m/s en la posición 1. Cuando alcanza el extremo a nivel de la rampa en la posición 2, salta y alcanza una componente vertical de velocidad de 3 m/s (no tome en cuenta el cambio en la posición vertical de su centro de masa debido al salto). Ignore la resistencia aerodinámica y la fricción en sus esquíes.
(a) ¿Cuál es la magnitud de su velocidad cuando deja la rampa en la posición 2?
(b) ¿Cuál es su altura h sobre la posición 2 en el punto más alto de su salto, o sea en la posición 3?

ESTRATEGIA

(a) Si ignoramos las fuerzas aerodinámicas y de fricción, sólo el peso del esquiador efectúa trabajo entre las posiciones 1 y 2, y el principio del trabajo y la energía permite calcular su velocidad justo antes de saltar.
(b) Entre el tiempo que deja la rampa en la posición 2 y cuando llega a la posición 3, la única fuerza es su peso, por lo que $a_x = 0$ y la componente horizontal de su velocidad es constante. Esto significa que conocemos la magnitud de su velocidad en la posición 3, porque se está moviendo horizontalmente en ese punto. Por consiguiente, podemos aplicar el principio del trabajo y la energía a su movimiento entre la posición 2 y la posición 3 para determinar h.

SOLUCIÓN

(a) Usando la Ec. (4.13) para evaluar el trabajo realizado por su peso entre la posición 1 y la posición 2, el principio del trabajo y la energía es

$$-mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 :$$

$$-m(9.81)(2 - 20) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}m(15)^2.$$

Despejando v_2, la magnitud de su velocidad en el punto 2 antes de que salte es de 24.04 m/s. Después de que salta, la magnitud de su velocidad en la posición 2 es $v_2' = \sqrt{(24.04)^2 + (3)^2} = 24.23$ m/s.
(b) La magnitud de su velocidad en la posición 3 es igual a la componente horizontal de su velocidad en la posición 2: $v_3 = 24.04$ m/s. Aplicando el trabajo y la energía a su movimiento entre la posición 2 y la 3,

$$-mg(y_3 - y_2) = \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}m(v_2')^2 :$$

$$-m(9.81)h = \frac{1}{2}m(24.04)^2 - \frac{1}{2}m(24.23)^2,$$

obtenemos $h = 0.459$ m.

COMENTARIO

Aunque ignoramos los efectos aerodinámicos, un esquiador está realmente sometido a considerables fuerzas aerodinámicas, tanto paralelas a su trayectoria (arrastre) como perpendiculares a ella (levantamiento).

Ejemplo 4.5

En el dispositivo de forja de la Fig. 4.11, el martillo de 40 kg se levanta a la posición 1 y se libera del reposo. Cae y golpea una pieza de trabajo cuando está en la posición 2. La constante del resorte $k = 1500$ N/m, y la tensión en cada resorte es de 150 N cuando el martillo está en la posición 2. Ignore la fricción.
(a) ¿Cuál es la velocidad del martillo justamente antes de que golpee la pieza de trabajo?
(b) Si toda la energía cinética del martillo se transfiere a la pieza de trabajo, ¿qué potencia media se transfiere si la duración del impacto es de 0.02 s?

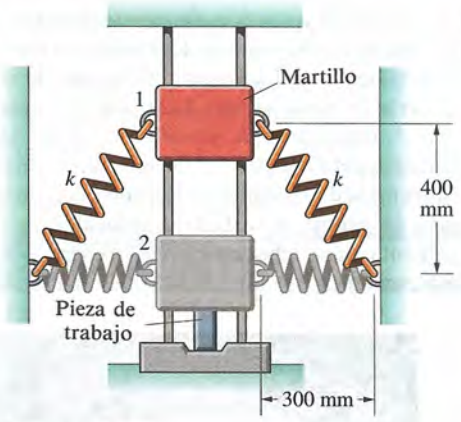


Figura 4.11

ESTRATEGIA

El peso del martillo y los dos resortes efectúan trabajo sobre él. Podemos aplicar el principio del trabajo y la energía al movimiento del martillo de la posición 1 a la posición 2 para determinar su velocidad en la posición 2.

SOLUCIÓN

(a) Sea r_0 la longitud de uno de los resortes sin estirar. En la posición 2, la tensión en el resorte es de 150 N y su longitud es de 0.3 m. De la relación entre la tensión en un resorte lineal y su alargamiento,

$$150 = k(0.3 - r_0) = (1500)(0.3 - r_0),$$

obtenemos $r_0 = 0.2$ m. Los valores de los alargamientos de cada resorte en las posiciones 1 y 2 son $S_1 = \sqrt{(0.4)^2 + (0.3)^2} - 0.2 = 0.3$ m y $S_2 = 0.3 - 0.2 = 0.1$ m. De la Ec. (4.16), el trabajo total realizado sobre el martillo por los dos resortes de la posición 1 a la posición 2 es

$$U_{\text{resortes}} = 2\left[-\frac{1}{2}k(S_2^2 - S_1^2)\right] = -(1500)[(0.1)^2 - (0.3)^2] = 120 \text{ N-m}.$$

El trabajo realizado por el peso de la posición 1 a la posición 2 es positivo e igual al producto del peso y el cambio de altura:

$$U_{\text{peso}} = mg(0.4 \text{ m}) = (40)(9.81)(0.4) = 156.96 \text{ N-m}.$$

Del principio del trabajo y la energía,

$$U_{\text{resortes}} + U_{\text{peso}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2:$$

$$120 + 156.96 = \frac{1}{2}(40)v_2^2 - 0,$$

obtenemos $v_2 = 3.72$ m/s.
(b) Toda la energía cinética del martillo se transfiere a la pieza de trabajo, y la Ec. (4.18) indica que la potencia media es igual a la energía cinética del martillo dividida entre la duración del impacto:

$$P_{\text{media}} = \frac{(1/2)(40 \text{ kg})(3.72 \text{ m/s})^2}{0.02 \text{ s}} = 13.8 \text{ kW (kilowatts)}.$$

Problemas

4.1 La nave estelar ficticia *Enterprise* obtiene su energía combinando materia y antimateria, logrando una conversión completa de masa en energía. La energía contenida en una cantidad de materia de masa m está dada por la ecuación de Einstein $E = mc^2$, donde c es la velocidad de la luz (3×10^8 m/s).
(a) La masa del *Enterprise* es de aproximadamente 5×10^9 kg. ¿Cuánta masa debe convertirse en energía cinética para acelerar la nave del reposo a 1/10 de la velocidad de la luz?
(b) ¿Cuánta masa debe convertirse en energía cinética para acelerar un avión comercial de 200 000 lb del reposo a 600 mi/h?

P4.1

4.2 Un cráter de meteorito en Winslow, Arizona, tiene 4000 pies de diámetro. Una explosión de energía E al nivel del terreno abre un cráter cuyo diámetro es proporcional a $E^{1/3}$. Una explosión de 1 ton de TNT, con una energía de 3.1×10^9 lb-pie, abre un cráter de aproximadamente 30 pies de diámetro.
(a) ¿Cuántas toneladas de TNT serían equivalentes a la energía liberada por el impacto del meteorito?
(b) Si el meteorito tenía una velocidad de 25 000 pie/s al chocar con el suelo y se supone como primera aproximación que toda su energía cinética dio como resultado la formación del cráter, ¿cuál era la masa del meteorito?

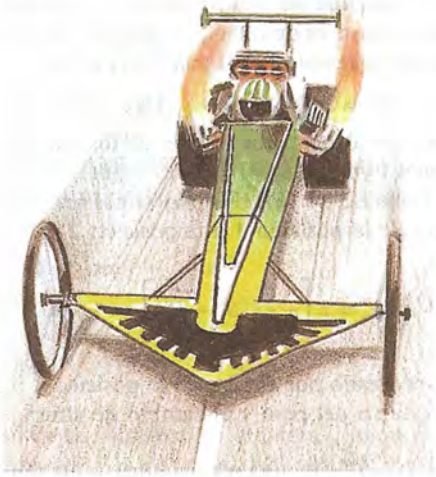
P4.2

4.3 La fuerza ejercida sobre una partícula cargada por un campo magnético es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

donde q y $\mathbf{v}$ son la carga y la velocidad de la partícula y $\mathbf{B}$ es el vector de campo magnético. Si las otras fuerzas sobre la partícula son insignificantes, use el principio del trabajo y la energía para demostrar que la magnitud de la velocidad es constante.

4.4 Un vehículo de carreras de 2000 lb puede acelerar del reposo a 300 mi/h en un cuarto de milla.
(a) ¿Cuánto trabajo se efectúa sobre el vehículo?
(b) Si se supone como una primera aproximación que la fuerza tangencial ejercida sobre el vehículo es constante, ¿cuál es la magnitud de la fuerza?



P4.4

4.5 Suponga que todo el peso del vehículo del Prob. 4.4 actúa sobre sus ruedas traseras (motrices) y que los coeficientes de fricción entre las ruedas y el camino son $\mu_s = \mu_k = 0.9$. Use el principio del trabajo y la energía para determinar la velocidad máxima en mi/h que en teoría puede alcanzar el carro en un cuarto de milla. ¿Cuál puede ser la causa de la discrepancia entre su respuesta y la velocidad real de 300 mi/h?

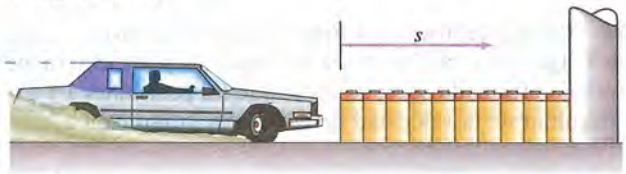
4.6 Suponiendo como primera aproximación que la fuerza tangencial ejercida sobre el vehículo del Prob. 4.4 es constante, ¿cuál es la potencia máxima transmitida al vehículo cuando éste acelera del reposo a 300 mi/h?

4.7 Un avión de 10 Mg (megagramo) debe alcanzar una velocidad de 60 m/s para despegar. Si la fuerza horizontal ejercida por su motor es de 60 kN y se ignoran las otras fuerzas horizontales, ¿qué longitud de pista se requiere?

4.8 Se quiere diseñar un cohete auxiliar que permita que el avión del Prob. 4.7 alcance su velocidad de despegue usando sólo 100 m de pista. Para los cálculos preliminares, se puede suponer que la masa combinada del cohete y del avión es constante e igual a 10.5 Mg. ¿Qué componente horizontal de empuje debe proporcionar el cohete?

P4.8

4.9 La fuerza ejercida sobre un automóvil por una barrera contrachoques al golpear el automóvil contra ésta es $F = -(1000 + 10\,000s)$ lb, donde s es la distancia en pies medida desde el punto de contacto inicial. Si se quiere diseñar la barrera de manera que pueda detener un auto de 5000 lb que viaje a 80 mi/h, ¿cuál es la longitud efectiva necesaria de la barrera? Es decir, ¿cuál es la distancia necesaria de la barrera para que detenga al auto?



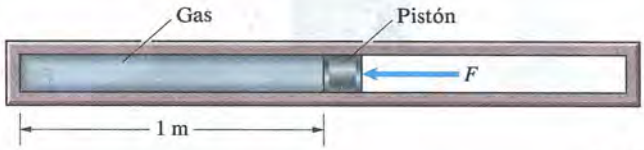
P4.9

4.10 La componente de la fuerza externa total tangente a la trayectoria de un cuerpo de 2 lb es $\Sigma F_t = 4s - s^2$ lb, donde s es su posición medida a lo largo de la trayectoria en pies. En $s = 0$, la velocidad del cuerpo es $v = 10$ pie/s.
(a) ¿Qué trabajo se efectúa sobre el cuerpo cuando éste se mueve de $s = 0$ a $s = 4$ pies?
(b) ¿Cuál es su velocidad cuando $s = 4$ pies?

4.11 La componente de la fuerza externa total tangente a la trayectoria de un cuerpo de 10 kg es $\Sigma F_t = 100 - 20t$ N, donde t está en segundos. Cuando $t = 0$, su velocidad es $v = 4$ m/s. ¿Qué trabajo se efectúa sobre el cuerpo de $t = 2$ a $t = 4$ s?

4.12 La componente de la fuerza externa total tangente a la trayectoria de un cuerpo de masa m es $\Sigma F_t = -cv$, donde v es la magnitud de la velocidad del cuerpo y c es una constante. Cuando la posición es $s = 0$, su velocidad es $v = v_0$. ¿Qué trabajo se efectúa cuando el cuerpo se mueve de $s = 0$ a $s = s_f$?

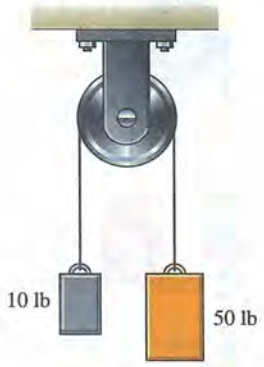
4.13 El tubo de 200 mm de diámetro de la Fig. P4.13 está evacuado a la derecha del pistón de 8 kg. A la izquierda, el tubo contiene gas a una presión $p_0 = 1 \times 10^5$ Pa (N/m^2). La fuerza F aumenta con lentitud, moviendo el pistón 0.5 m hacia la izquierda. Después se elimina la fuerza y el pistón se acelera hacia la derecha: Si se ignora la fricción y se supone que para el gas se cumple que $pV =$ constante, ¿cuál es la velocidad del pistón cuando ha regresado a su posición original?



P4.13

4.14 En el Prob. 4.13, si se supone que la presión del gas está relacionada con su volumen por la expresión $pV =$ constante mientras el gas es comprimido (proceso isotérmico) y por la expresión $pV^{1.4} =$ constante mientras se está expandiendo (proceso isentrópico), ¿cuál es la velocidad del pistón cuando regresa a su posición original?

4.15 El sistema mostrado se libera del reposo. Aplicando el principio del trabajo y la energía a cada peso, determine la magnitud de la velocidad de los pesos cuando se han movido 1 pie.

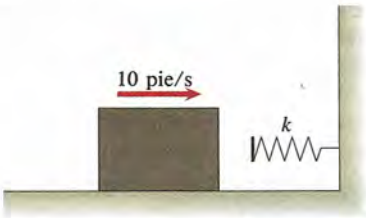


P4.15

4.16 En el Prob. 4.15, ¿cuál es la tensión en el cable durante el movimiento del sistema?

4.17 Resuelva el Prob. 4.15 aplicando el principio del trabajo y la energía al sistema formado por los dos pesos, el cable y la polea.

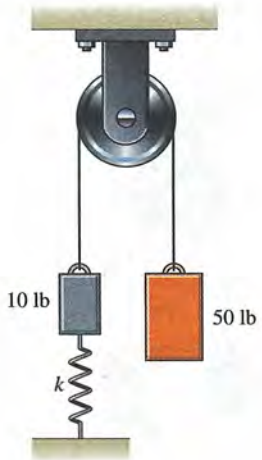
4.18 Se quiere diseñar un "parachoques" que detenga un paquete de 50 lb que se mueve a 10 pie/s a 6 pulg del punto de contacto. Si la fricción es insignificante, ¿cuál es la constante de resorte k necesaria?



P4.18

4.19 En el Prob. 4.18, ¿qué constante de resorte se requiere si el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el piso es $\mu_k = 0.3$ y el paquete entra en contacto con el resorte moviéndose a 10 pie/s?

4.20 El sistema mostrado se libera del reposo con el resorte sin estirar. Si la constante del resorte es $k = 30$ lb/pie, ¿qué velocidad máxima alcanzan los pesos?

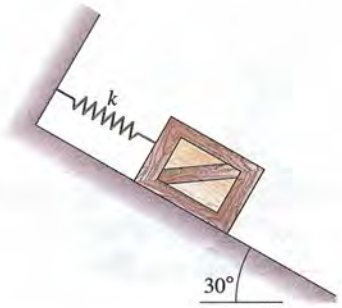


P4.20

4.21 Suponga que no se conoce la constante de resorte k del sistema del Prob. 4.20. Si el sistema se libera del reposo con el resorte sin estirar y se observa que el peso de 50 lb cae 2 pies antes de rebotar, ¿qué valor tiene k?

4.22 En el Ej. 4.5, suponga que la longitud sin estirar de cada resorte es de 200 mm y que el dispositivo se quiere diseñar de manera que el martillo golpee la pieza de trabajo a 5 m/s. Determine la constante k de resorte necesaria.

4.23 La caja de 20 kg mostrada se libera del reposo con el resorte sin estirar. La constante del resorte es $k = 100$ N/m. Ignore la fricción.
(a) ¿Qué distancia recorre la caja a lo largo de la superficie inclinada antes de detenerse?
(b) ¿Qué velocidad máxima alcanza en su recorrido?

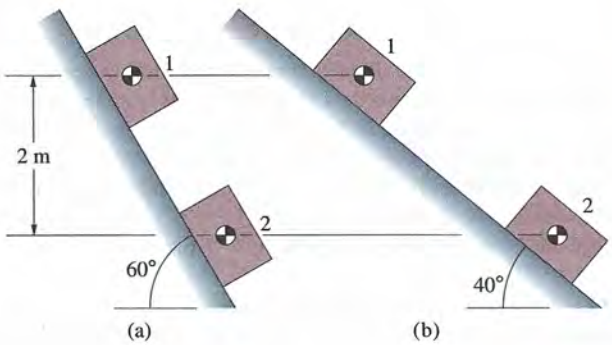


P4.23

4.24 Resuelva el Prob. 4.23 si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es $\mu_k = 0.12$.

4.25 Resuelva el Prob. 4.23 si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es $\mu_k = 0.16$ y la tensión en el resorte es de 20 N cuando la caja se libera.

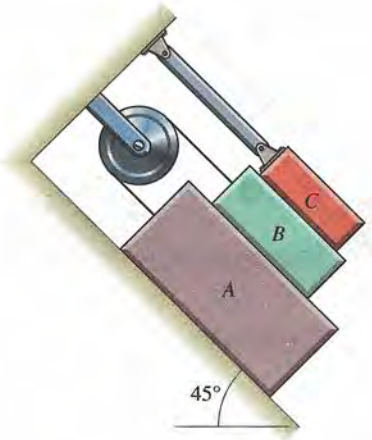
4.26 La caja de 30 kg de la figura parte del reposo en la posición 1. Ignore la fricción. Para los casos (a) y (b), determine el trabajo efectuado sobre la caja entre las posiciones 1 y 2 y la magnitud de la velocidad de la caja en la posición 2.



P4.26

4.27 Resuelva el Prob. 4.26 si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie inclinada es $\mu_k = 0.2$.

4.28 Las masas de los tres bloques son $m_A = 40$ kg, $m_B = 16$ kg y $m_C = 12$ kg. Ignore la masa de la barra que mantiene a C en reposo. La fricción es insignificante. Aplicando el principio del trabajo y la energía a A y B por separado, determine la magnitud de sus velocidades cuando se hayan movido 500 mm.



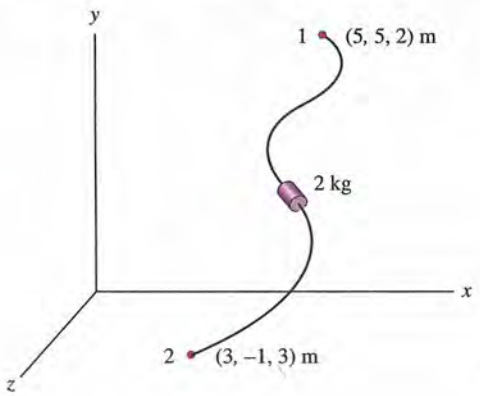
P4.28

4.29 Resuelva el Prob. 4.28 aplicando el principio del trabajo y la energía al sistema formado por A, B, el cable que los conecta y la polea.

4.30 En el Prob. 4.28 determine la magnitud de la velocidad de A y B cuando se han movido 500 mm si el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es $\mu_k = 0.1$.

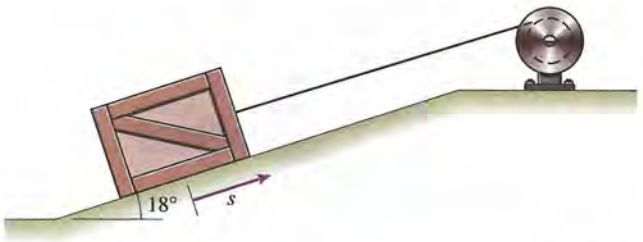
Estrategia: El procedimiento más sencillo es aplicar el principio del trabajo y la energía a A y B por separado. Si se tratan como un solo sistema, se debe tomar en cuenta el trabajo efectuado por las fuerzas internas de fricción. Véase el Ej. 4.3.

4.31 El collarín de 2 kg mostrado parte del reposo en la posición 1 y se desliza hacia abajo por el alambre rígido liso. El eje y apunta hacia arriba. ¿Cuál es la velocidad del collarín cuando alcanza la posición 2?



P4.31

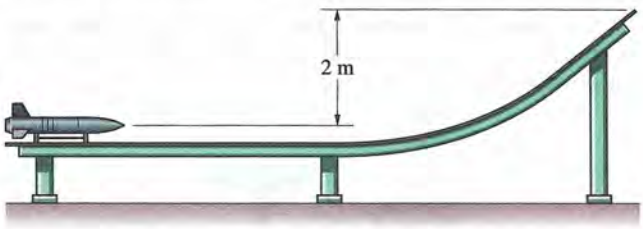
4.32 En la Fig. P4.32 los coeficientes de fricción entre la caja de 160 kg y la rampa son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.28$.
(a) ¿Qué tensión T_0 debe ejercer el malacate para que la caja empiece a moverse hacia arriba a lo largo de la rampa?
(b) Si la tensión permanece con el valor T_0 después de que la caja comienza a deslizarse, ¿qué trabajo total se efectúa sobre la caja al desplazarse ésta una distancia $s = 3$ m hacia arriba, y cuál es la velocidad resultante de la caja?



P4.32

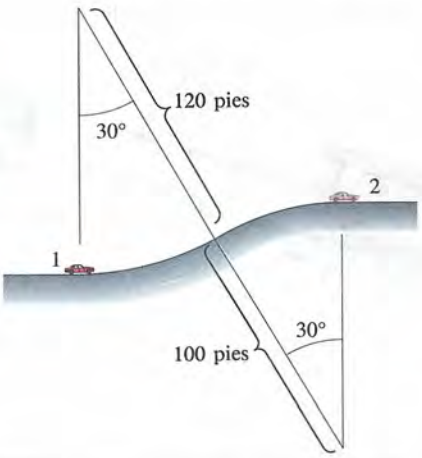
4.33 En el Prob. 4.32, si el malacate ejerce una tensión $T = T_0(1 + 0.1s)$ después de que la caja empieza a deslizarse, ¿qué trabajo total se efectúa sobre la caja cuando ésta se desplaza una distancia $s = 3$ m hacia arriba a lo largo de la rampa, y cuál es la velocidad resultante de la caja?

4.34 La masa del cohete de la Fig. P4.34 es de 250 kg y su empuje constante es de 6000 N. La longitud total de la rampa de lanzamiento es de 10 m. Ignorando la fricción, la fuerza de arrastre y el cambio de masa del cohete, determine la magnitud de su velocidad cuando llega al final de la rampa.



P4.34

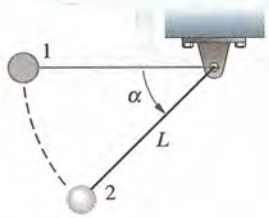
4.35 El automóvil de 2400 lb mostrado viaja a 40 mi/h en la posición 1. Si el efecto combinado de la resistencia aerodinámica sobre el automóvil y la fuerza tangencial ejercida sobre el camino por sus neumáticos es una fuerza tangencial neta nula sobre el vehículo, ¿cuál es su velocidad en la posición 2?



P4.35

4.36 En el Prob. 4.35, si el efecto combinado de la resistencia aerodinámica sobre el automóvil y la fuerza tangencial ejercida sobre el camino por sus neumáticos es una fuerza tangencial constante de 400 lb sobre el vehículo en la dirección de su movimiento, ¿cuál es su velocidad en la posición 2?

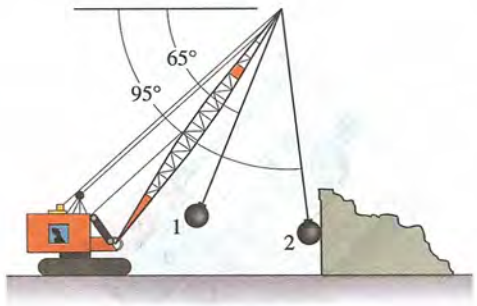
4.37 En la Fig. P4.37 la bola de masa m se libera del reposo en la posición 1. Determine el trabajo efectuado sobre la bola al llegar a la posición 2 (a) por su peso; (b) por la fuerza ejercida sobre ella por la cuerda. (c) ¿Cuál es la magnitud de su velocidad en la posición 2?



P4.37

4.38 En el Prob. 4.37, ¿cuál es la tensión en la cuerda en la posición 2?

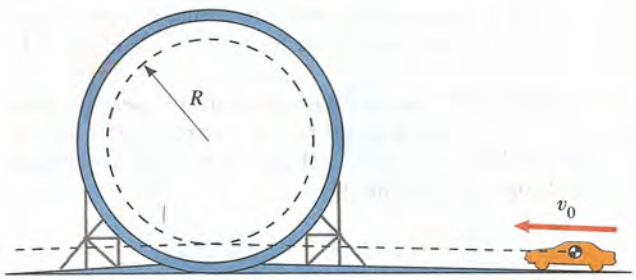
4.39 La bola de demolición de 200 kg mostrada cuelga de un cable de 6 m. Si está en reposo en la posición 1, ¿cuál es la magnitud de su velocidad justo antes de golpear la pared en la posición 2?



P4.39

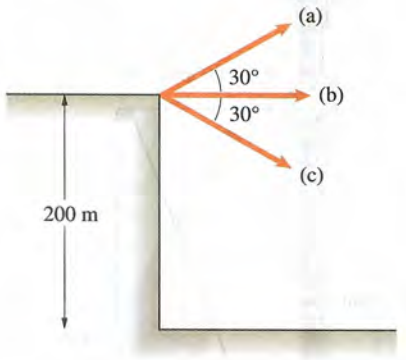
4.40 En el Prob. 4.39, ¿cuál es la tensión máxima en el cable durante el movimiento de la bola de la posición 1 a la 2?

4.41 Un conductor quiere guiar un automóvil a través de un lazo circular de radio R y necesita saber qué velocidad v_0 se necesita en la entrada del lazo para recorrer éste por pura inercia sin perder contacto con el carril.
(a) ¿Qué valor debe tener v_0 si se ignora la fricción y la resistencia aerodinámica?
(b) ¿Cuál es la velocidad resultante del automóvil en la parte superior del lazo?



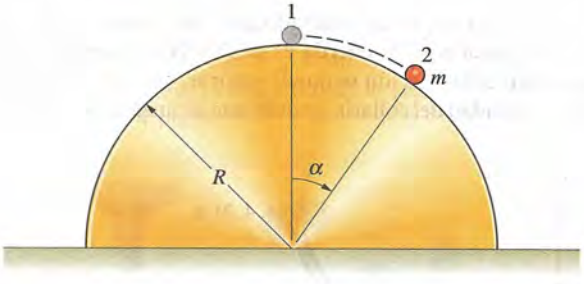
P4.41

4.42 Suponga que se lanzan piedras desde la parte superior de un acantilado de 200 m de altura a una velocidad de 10 m/s en las tres direcciones mostradas. Ignorando la resistencia aerodinámica, use el principio del trabajo y la energía para determinar la magnitud de la velocidad de la piedra justo antes de llegar al suelo en cada caso.



P4.42

4.43 Una canica de masa m se desliza desde la posición de reposo en 1 a lo largo de la superficie lisa del cilindro mostrado.
(a) ¿Qué trabajo se efectúa sobre la canica al resbalar ésta de la posición 1 a la 2?
(b) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de la canica en la posición 2?

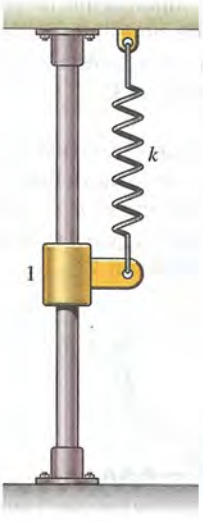


P4.43

4.44 En el Prob. 4.43, ¿cuál es el valor del ángulo α en que la canica abandona la superficie del cilindro?

4.45 En el Prob. 4.43, ¿a qué distancia del centro del cilindro golpea la canica el piso?

4.46 El collarín de 20 lb mostrado parte del reposo en la posición 1 con el resorte sin estirar. La constante de resorte es k = 40 lb/pie. Ignore la fricción. ¿Qué distancia cae el collarín?

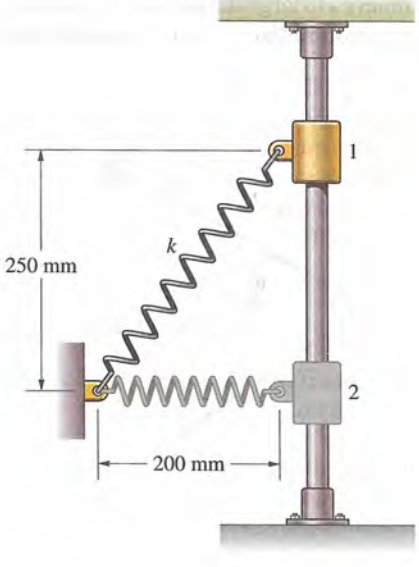


P4.46

4.47 En el Prob. 4.46, ¿qué velocidad máxima alcanza el collarín?

4.48 ¿Cuál es la solución del Prob. 4.46 si la tensión en el resorte en la posición 1 es de 4 lb?

4.49 El collarín de 4 kg mostrado se suelta del reposo en la posición 1. Ignore la fricción. Si la constante de resorte es k = 6 kN/m y el resorte no está estirado en la posición 2, ¿cuál es la velocidad del collarín cuando éste ha caído a la posición 2?

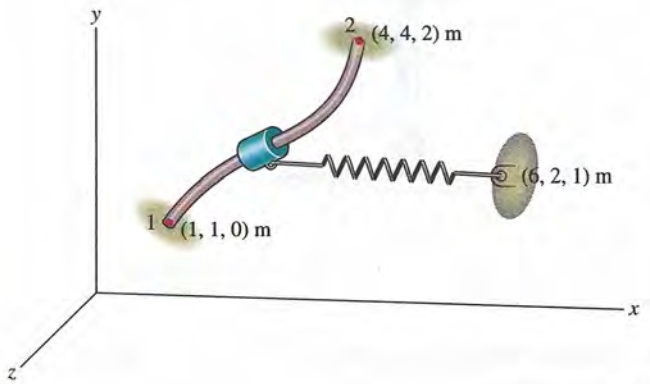


P4.49

4.50 En el Prob. 4.49, si la constante de resorte es $k = 4$ kN/m y la tensión en el resorte en la posición 2 es de 500 N, ¿cuál es la velocidad del collarín cuando ha caído a la posición 2?

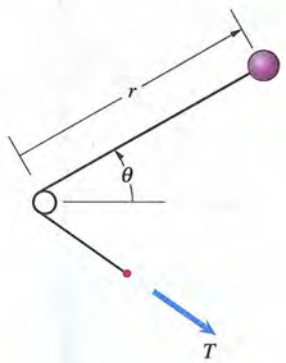
4.51 En el Prob. 4.49, suponga que no se conoce la constante de resorte k. Si el resorte no está estirado en la posición 2 y la velocidad del collarín cuando éste ha caído a la posición 2 es de 4 m/s, ¿qué valor tiene k?

4.52 El collarín de 10 kg mostrado parte del reposo en la posición 1 y resbala a lo largo de la barra lisa. El eje y apunta hacia arriba. La constante de resorte es $k = 100$ N/m y la longitud del resorte sin estirar es de 2 m. ¿Cuál es la velocidad del collarín cuando éste alcanza la posición 2?



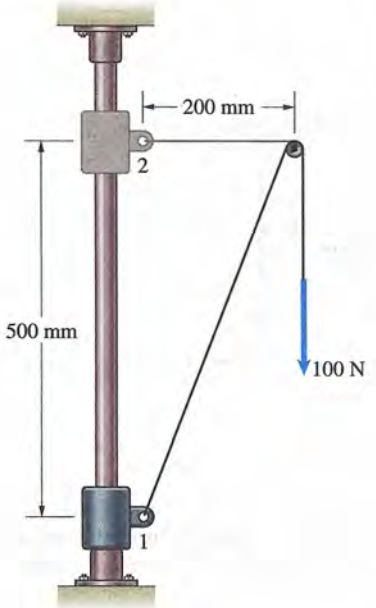
P4.52

4.53 Suponga que un cuerpo está unido a una cuerda con tensión *constante* T como se muestra. La fuerza ejercida sobre el cuerpo se puede expresar en coordenadas polares como $\mathbf{F} = -T\,\mathbf{e}_r$. Demuestre que el trabajo realizado sobre el cuerpo cuando éste se mueve a lo largo de una trayectoria plana *arbitraria* desde una posición radial r_1 a otra posición radial r_2 es $U = -T(r_2 - r_1)$.



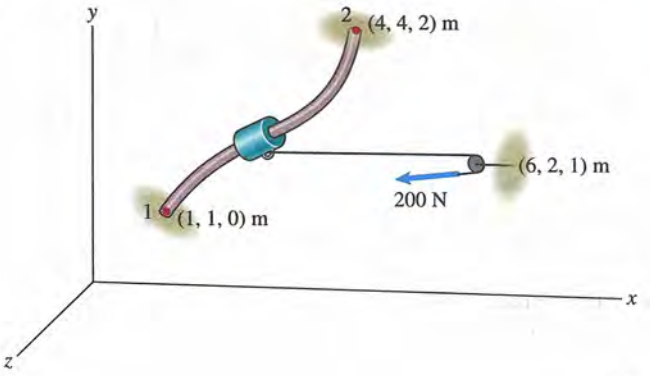
P4.53

4.54 El collarín de 2 kg mostrado está inicialmente en reposo en la posición 1. Una fuerza constante de 100 N se aplica a la cuerda, ocasionando que el collarín se deslice hacia arriba sobre la barra lisa vertical. ¿Cuál es la velocidad del collarín cuando alcanza la posición 2?



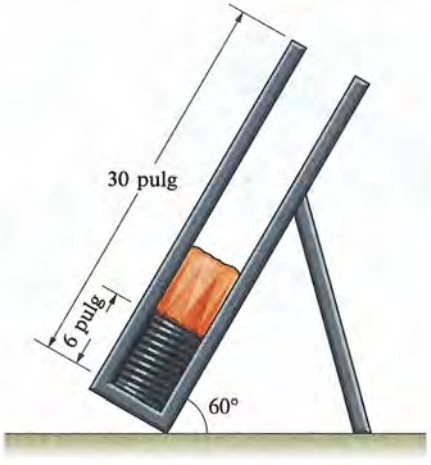
P4.54

4.55 El collarín de 10 kg mostrado parte del reposo en la posición 1. La tensión en la cuerda es de 200 N y el eje y señala hacia arriba. Si la fricción se puede ignorar, ¿cuál es la magnitud de la velocidad del collarín cuando éste alcanza la posición 2?



P4.55

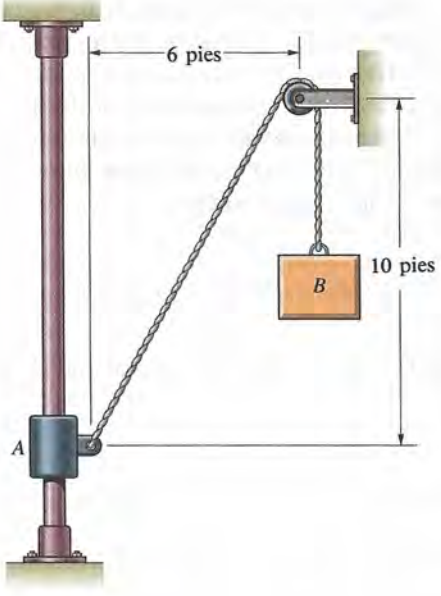
4.56 Un mortero accionado por un resorte se usa para lanzar al aire paquetes de fuegos artificiales de 10 lb. El paquete parte del reposo con el resorte comprimido a una longitud de 6 pulgadas; la longitud no estirada del resorte es de 30 pulgadas. Si la constante de resorte es $k = 1300$ lb/pie, ¿cuál es la magnitud de la velocidad del paquete cuando sale del mortero?



P4.56

4.57 Suponga que el mortero del Prob. 4.56 se quiere diseñar para lanzar el paquete a una altura de 150 pies sobre su posición inicial. Ignorando la fricción y la fuerza de arrastre, determine la constante de resorte necesaria.

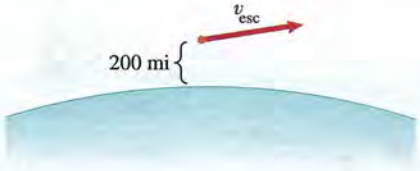
4.58 El sistema de la figura se libera del reposo en la posición mostrada. Los pesos son $W_A = 40$ lb y $W_B = 300$ lb. Ignore la fricción. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de A cuando se ha elevado 4 pies?



P4.58

4.59 En el Prob. 4.58, suponga que el sistema se libera del reposo con el peso A a nivel con la polea. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de A cuando ha caído 1 pie?

4.60 Una nave espacial a 200 mi sobre la superficie de la Tierra tiene una velocidad de escape $v_{esc} = \sqrt{2gR_E^2/r}$, donde r es su distancia desde el centro de la Tierra y $R_E = 3960$ mi es el radio de la Tierra. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de la nave cuando alcanza la órbita de la Luna, a 238 000 millas del centro de la Tierra?



P4.60

4.61 Un pedazo de material desprendido por el choque de un meteoro contra la Luna tiene una velocidad de 200 m/s respecto al centro de la Luna cuando está a 1000 km de la superficie. ¿Cuál es la magnitud de su velocidad justo antes de chocar con la superficie lunar? (La aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Luna es de 1.62 m/s^2 y el radio de la Luna es de 1738 km.)

P4.61

4.62 Un satélite en una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra tiene una velocidad $v = \sqrt{gR_E^2/r}$, donde R_E es el radio de la Tierra. Suponga que se usa un cohete para transferir un satélite de 900 kg desde una órbita de espera de 6700 km de radio a una órbita geosincrónica de 42 222 km de radio. ¿Cuánto trabajo debe efectuar el cohete sobre el satélite?

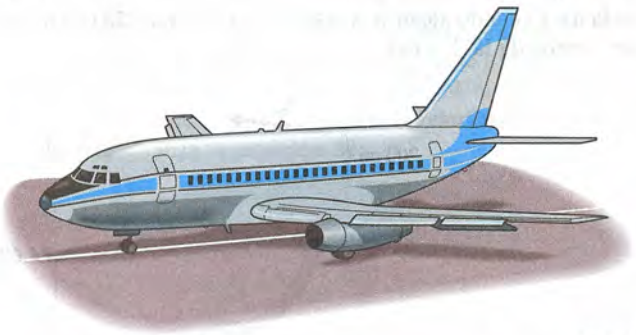
4.63 Un vehículo de 2000 lb puede acelerar de cero a 300 mi/h en 6 s. ¿Qué potencia media se transmite al vehículo?

4.64 En el Prob. 4.9, ¿a qué razón se transfiere potencia desde el auto cuando éste entra en contacto con la barrera?

4.65 En el Prob. 4.32, ¿cuál es la máxima potencia que el malacate debe suministrar al jalar la caja hacia arriba sobre la rampa?

4.66 En el Prob. 4.39, si la bola demoledora alcanza el reposo en 0.1 s después de golpear la pared, ¿qué potencia media transmite a la pared?

4.67 Un avión Boeing 737 con peso de 124 500 lb puede acelerar a una velocidad de despegue de 180 pie/s en 30 s.
(a) ¿Qué potencia media se transmite al avión?
(b) Si se supone que la fuerza tangencial ejercida sobre el avión es constante, ¿cuál es la máxima potencia transmitida al avión durante su carrera de despegue?



P4.67

4.68 En Winter Park, en Colorado, hay una caída vertical de 2200 pies. Cuatro esquiadores llegan a la cumbre en telesillas cada 8 s; éstas se mueven a 4 pie/s y el viaje a la cumbre dura 18 minutos. Si el esquiador medio con equipo pesa 160 lb, ¿qué potencia aproximada se requiere para operar las telesillas?

P4.68

Energía potencial

4.3 *Conservación de la energía*

El trabajo realizado sobre un cuerpo por algunas fuerzas se puede expresar como el cambio de una función de la posición del cuerpo, llamada *energía potencial*. Si todas las fuerzas que efectúan trabajo sobre un sistema tienen esta propiedad, el principio del trabajo y la energía es una ley de conservación: la suma de las energías cinética y potencial es constante.

Cuando dedujimos el principio del trabajo y la energía integrando la segunda ley de Newton, pudimos evaluar la integral a un lado de la ecuación y obtuvimos el cambio en la energía cinética:

$$U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{4.19}$$

Si podemos determinar una función escalar de la posición V tal que

$$dV = -\Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{4.20}$$

Entonces también podemos evaluar la integral que define el trabajo:

$$U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{V_1}^{V_2} -dV = V_1 - V_2, \tag{4.21}$$

donde V_1 y V_2 son los valores de V en las posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. El principio del trabajo y la energía tendría entonces la siguiente forma sencilla

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_2, \tag{4.22}$$

que significa que la suma de la energía y la función V es constante:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + V = \text{constante.}} \tag{4.23}$$

Si la energía cinética aumenta, V debe disminuir, y viceversa, como si V fuese un depósito de energía cinética "potencial". Por esta razón, V se llama **energía potencial.**

Si existe una energía potencial para una fuerza **F** dada, lo cual significa que existe una función de posición V tal que $dV = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, entonces se dice que **F** es **conservativa.** Si todas las fuerzas que efectúan trabajo sobre un sistema son conservativas, la energía total (suma de las energías cinética y potencial de las fuerzas) es constante, o se conserva. Entonces, se dice que el sistema es conservativo y se puede usar la conservación de la energía en vez del principio del trabajo y la energía para relacionar un cambio en su posición con el cambio en su energía cinética. Los dos enfoques son equivalentes y se obtiene con ellos la misma información cuantitativa. Sin embargo, esto es más claro al usar la conservación de la energía, pues el movimiento del cuerpo o del sistema se puede interpretar en términos de transformaciones entre las energías cinética y potencial.

4.4 Fuerzas conservativas

La conservación de la energía se puede aplicar sólo si las fuerzas que efectúan trabajo sobre un cuerpo o sistema son conservativas y se conocen sus energías potenciales. En esta sección determinamos las energías potenciales de algunas fuerzas conservativas y presentamos aplicaciones de la conservación de la energía. Antes de analizar fuerzas conservativas, demostramos con un sencillo ejemplo que las fuerzas de fricción no lo son.

El trabajo de una fuerza conservativa cuando un cuerpo se mueve de una posición 1 a una posición 2, es independiente de la trayectoria. Esto se infiere de la Ec. (4.21), que establece que el trabajo depende sólo de la energía potencial en 1 y 2. También implica que si el cuerpo se mueve en una trayectoria cerrada, que lo hace volver a 1, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es cero. Supongamos que un libro de masa m descansa sobre una mesa y es empujado horizontalmente deslizándose en una trayectoria de longitud L. La magnitud de la fricción es $\mu_k mg$, y apunta en dirección opuesta a la del movimiento (Fig. 4.12). El trabajo es

$$U = \int_0^L -\mu_k mg\, ds = -\mu_k mgL.$$

El trabajo es proporcional a la longitud de la trayectoria y por tanto no es independiente de ésta. Las fuerzas de fricción no son conservativas.

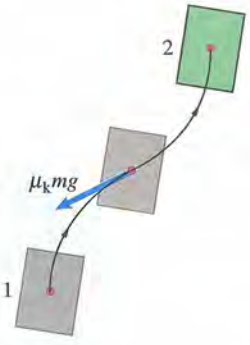


Figura 4.12
Trayectoria del libro de la posición 1 a la 2. La fuerza de fricción apunta en dirección opuesta a la del movimiento.

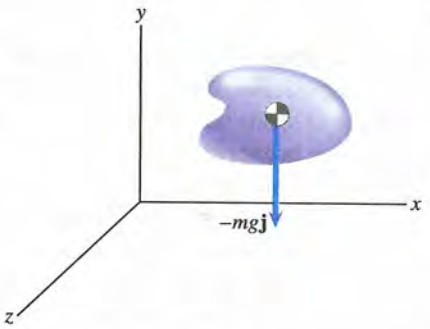
Energías potenciales de varias fuerzas

El peso de un cuerpo y la fuerza ejercida por un resorte unido a un soporte fijo son fuerzas conservativas. Con ellas como ejemplos, determinaremos las energías potenciales de otras fuerzas conservativas. Dichas energías servirán como ejemplos del uso de la conservación de la energía para analizar los movimientos de sistemas conservativos.

Peso Para determinar la energía potencial asociada con el peso de un cuerpo, usamos un sistema cartesiano con su eje y dirigido hacia arriba (Fig. 4.13). El peso es $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$ y su producto escalar con el vector $d\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (-mg\,\mathbf{j}) \cdot (dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = -mg\,dy.$$

Figura 4.13
Peso de un cuerpo expresado en un sistema coordenado con el eje y dirigido hacia arriba.



De la Ec. (4.20), la energía potencial V debe satisfacer la relación

$$dV = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = mg\,dy, \tag{4.24}$$

que se puede escribir como

$$\frac{dV}{dy} = mg.$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$V = mgy + C,$$

donde C es una constante de integración. La constante C es arbitraria, porque esta expresión satisface la Ec. (4.24) para cualquier valor de C. Otra manera de entender por qué C es arbitraria es observar en la Ec. (4.22) que la *diferencia* en la energía potencial entre dos posiciones es la que determina el cambio en la energía cinética. Hacemos $C = 0$ y entonces escribimos la energía potencial del peso de un cuerpo como

$$\boxed{V = mgy.} \tag{4.25}$$

La energía potencial es el producto del peso del cuerpo por la altura. La altura se puede medir desde cualquier nivel de referencia conveniente, o **plano de referencia** (o *datum*). Como la diferencia de energía potencial determina el cambio en la energía cinética, es la diferencia de altura lo que importa, no el nivel desde el cual se mide ésta.

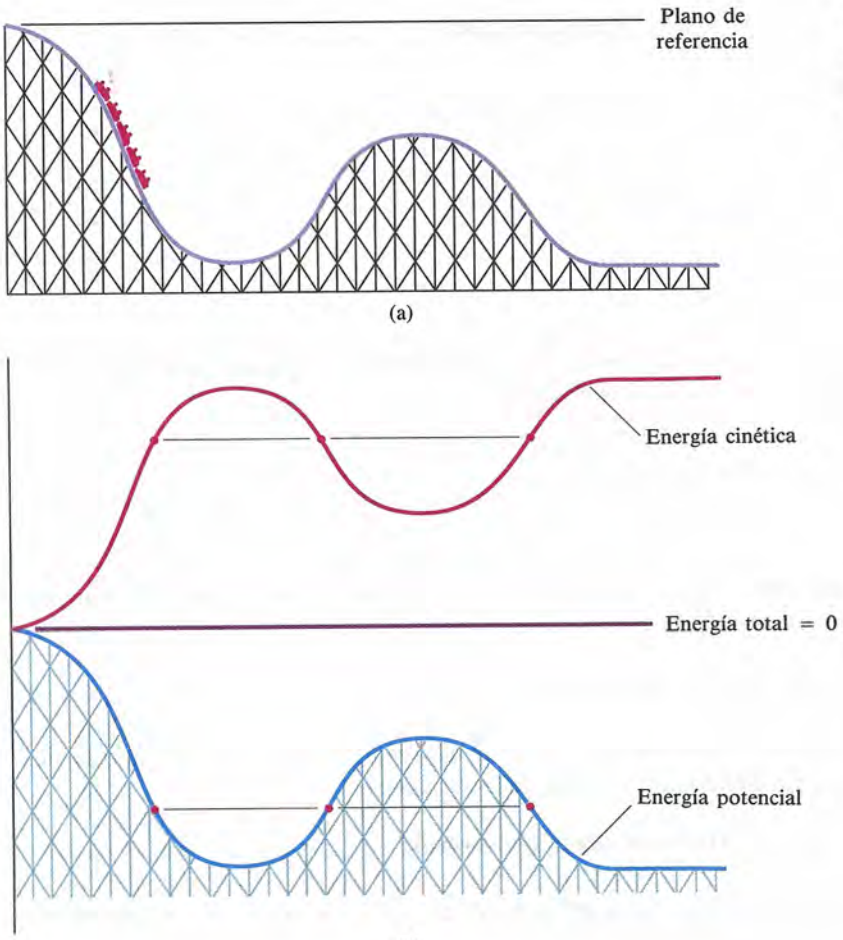


Figura 4.14
(a) Montaña rusa y plano de referencia. (b) La suma de las energías cinética y potencial es constante.

El vagón de una montaña rusa (Fig. 4.14a) es un ejemplo clásico de la conservación de la energía. Si se ignoran las fuerzas aerodinámicas y de fricción, el peso es la única fuerza que efectúa trabajo y el sistema es conservativo. La energía potencial del vagón de la montaña rusa es proporcional a la altura de la vía respecto a un plano de referencia. En la Fig. 4.14(b), suponemos que el vagón parte del reposo en el nivel de referencia. La suma de las energías cinética y potencial es constante, por lo que la energía cinética "refleja" la energía potencial. En puntos de la vía que tienen igual altura, las magnitudes de las velocidades son iguales.

Para tomar en cuenta la variación del peso con la distancia desde el centro de la Tierra, expresamos el peso en coordenadas polares como

$$\mathbf{F} = -\frac{mgR_{\mathrm{E}}^2}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

donde r es la distancia desde el centro de la Tierra (Fig. 4.15). De la Ec. (4.14), el vector $d\mathbf{r}$ en coordenadas polares es

$$d\mathbf{r} = dr\,\mathbf{e}_r + r\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta. \tag{4.26}$$

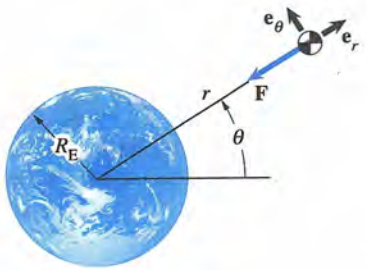


Figura 4.15
Peso expresado en coordenadas polares.

La energía potencial debe satisfacer

$$dV = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{mgR_E^2}{r^2}\, dr,$$

o

$$\frac{dV}{dr} = \frac{mgR_E^2}{r^2}.$$

Integramos esta ecuación y hacemos igual a cero a la constante de integración, obteniendo la energía potencial

$$\boxed{V = -\frac{mgR_E^2}{r}.} \tag{4.27}$$

Resortes En coordenadas polares, la fuerza ejercida sobre un cuerpo por un resorte lineal es

$$\mathbf{F} = -k(r - r_0)\, \mathbf{e}_r,$$

donde r_0 es la longitud sin estirar del resorte (Fig. 4.16). Usando la Ec. (4.26), la energía potencial debe satisfacer

$$dV = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = k(r - r_0)\, dr.$$

Expresada en términos del alargamiento del resorte $S = r - r_0$, esta ecuación es $dV = kSdS$, o

$$\frac{dV}{dS} = kS.$$

Integrando esta ecuación, obtenemos la energía potencial de un resorte lineal:

$$\boxed{V = \frac{1}{2}kS^2.} \tag{4.28}$$

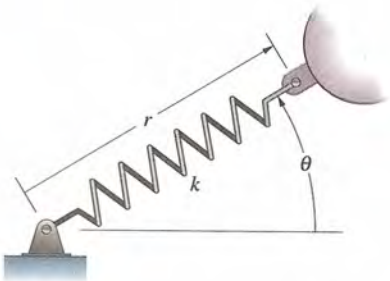


Figura 4.16
Fuerza ejercida por un resorte lineal en coordenadas polares.

En los siguientes ejemplos usamos la conservación de la energía para relacionar cambios en las posiciones de sistemas conservativos con cambios en sus energías cinéticas. Por lo general, esto implica dos pasos:

1. Determinar la energía potencial. *Se deben identificar las fuerzas conservativas que efectúan trabajo y evaluar sus energías potenciales en términos de la posición del sistema.*
2. Aplicar la conservación de la energía. *Igualando la suma de las energías cinética y potencial del sistema en dos posiciones, se obtiene una expresión para el cambio en la energía cinética.*

Ejemplo 4.6

En el Ej. 4.5, el martillo de 40 kg se levanta a la posición 1 y se libera del reposo. Su peso y los dos resortes ($k = 1500$ N/m) aceleran el martillo hacia abajo hasta la posición 2, donde golpea una pieza de trabajo. Use la conservación de la energía para determinar la velocidad del martillo cuando llega a la posición 2.

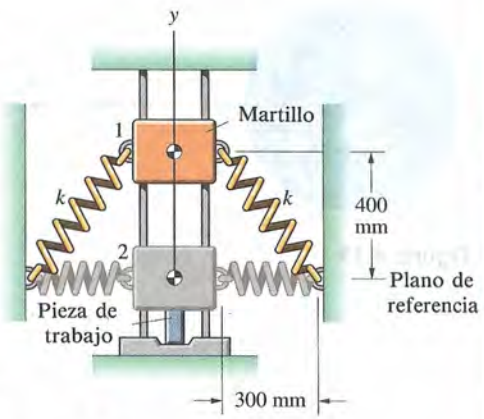


Figura 4.17
(a) Medición de la altura del martillo respecto a la posición 2.

ESTRATEGIA

Se efectúa trabajo sobre el martillo por parte de su peso y los dos resortes, de manera que el sistema es conservativo. Igualando las sumas de las energías cinética y potencial en las posiciones 1 y 2, podemos obtener una ecuación para la velocidad del martillo en la posición 2.

SOLUCIÓN

Determinación de la energía potencial La energía potencial de cada resorte es $\frac{1}{2}kS^2$, donde S es el alargamiento, por lo que la energía potencial de los dos resortes es

$$V_{\text{resortes}} = 2\left(\frac{1}{2}kS^2\right).$$

En el Ej. 4.5 los alargamientos en las posiciones 1 y 2 fueron $S_1 = 0.3$ m y $S_2 = 0.1$ m. La energía potencial asociada con el peso es

$$V_{\text{peso}} = mgy,$$

donde y es la altura respecto a un plano conveniente de referencia (Fig. a).

Aplicación de la conservación de la energía Las sumas de las energías potencial y cinética en las posiciones 1 y 2 deben ser iguales:

$$2\left(\frac{1}{2}kS_1^2\right) + mgy_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = 2\left(\frac{1}{2}kS_2^2\right) + mgy_2 + \frac{1}{2}mv_2^2:$$

$$(1500)(0.3)^2 + (40)(9.81)(0.4) + 0 = (1500)(0.1)^2 + 0 + \frac{1}{2}(40)v_2^2.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $v_2 = 3.72$ m/s.

COMENTARIO

De las gráficas de la energía potencial total asociada con los resortes y el peso y la energía cinética del martillo como funciones de y (Fig. 4.18), se puede ver la transformación de la energía potencial en energía cinética conforme va cayendo el martillo. Observe que la energía total del sistema conservativo permanece constante.

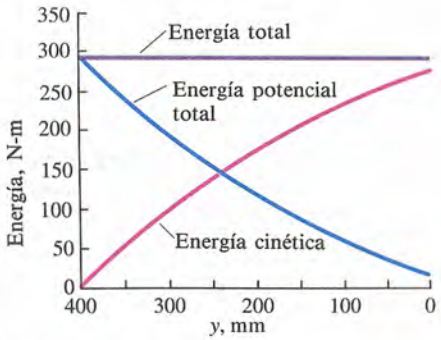


Figura 4.18
Las energías potencial y cinética en función de las coordenadas y del martillo.

Ejemplo 4.7

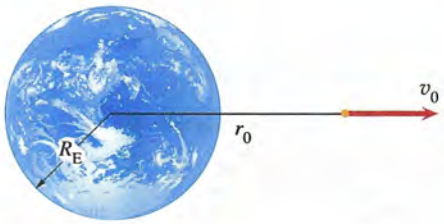


Figura 4.19

Una nave espacial a una distancia $r_0 = 2R_E$ del centro de la Tierra se mueve hacia el exterior con una velocidad inicial $v_0 = \sqrt{2gR_E/3}$ (Fig. 4.19). Determine su velocidad en función de su distancia al centro de la Tierra.

SOLUCIÓN

Determinación de la energía potencial La energía potencial asociada con el peso de la nave está dada en términos de su distancia r desde el centro de la Tierra por la Ec. (4.27):

$$V = -\frac{mgR_E^2}{r}.$$

Aplicación de la conservación de la energía Sea v la magnitud de la velocidad de la nave a una distancia arbitraria r. Las sumas de las energías potencial y cinética en r_0 y r deben ser iguales:

$$-\frac{mgR_E^2}{r_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{mgR_E^2}{r} + \frac{1}{2}mv^2:$$

$$-\frac{mgR_E^2}{2R_E} + \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}gR_E\right) = -\frac{mgR_E^2}{r} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Despejando v, la velocidad de la nave en función de r es

$$v = \sqrt{gR_E\left(\frac{2R_E}{r} - \frac{1}{3}\right)}.$$

COMENTARIO

En la Fig. 4.20 mostramos gráficas de la energía cinética, la energía potencial y la energía total como funciones de r/R_E. La energía cinética disminuye y la energía potencial aumenta conforme la nave se mueve hacia el exterior hasta que su velocidad disminuye a cero en $r = 6R_E$.

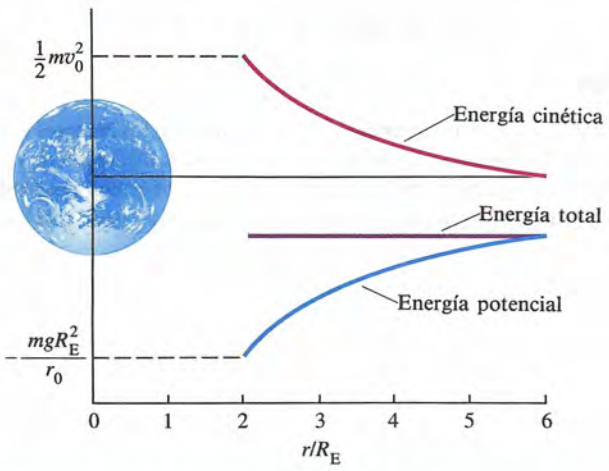


Figura 4.20
Energías en función de la coordenada radial.

Relaciones entre la fuerza y la energía potencial

Aquí consideraremos dos asuntos: (1) Dada una energía potencial, ¿cómo se puede determinar la fuerza correspondiente? (2) Dada una fuerza, ¿cómo se puede determinar si es conservativa? Es decir, ¿cómo se puede determinar si existe una energía potencial asociada?

La energía potencial V de una fuerza $\mathbf{F}$ es una función de la posición que satisface la relación

$$dV = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{4.29}$$

Si expresamos V en un sistema coordenado cartesiano,

$$V = V(x, y, z),$$

su diferencial dV es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz. \tag{4.30}$$

Expresando $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$ en componentes cartesianas, su producto escalar es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= (F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}) \cdot (dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) \\ &= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.\end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión y la Ec. (4.30) en la Ec. (4.29), obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

lo cual implica que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{4.31}$$

Dada una energía potencial V expresada en coordenadas cartesianas, esas relaciones se pueden usar para determinar la fuerza correspondiente. La fuerza $\mathbf{F}$ es

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) = -\nabla V, \tag{4.32}$$

donde ∇V es el **gradiente** de V. Usando expresiones para el gradiente en otros sistemas coordenados, se puede determinar la fuerza $\mathbf{F}$ cuando se conoce la energía potencial en esos sistemas coordenados. Por ejemplo, en coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathbf{e}_z\right). \tag{4.33}$$

Si una fuerza **F** es conservativa, su **rotacional** $\nabla \times \mathbf{F}$ es cero. La expresión para el rotacional de **F** en coordenadas cartesianas es

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \tag{4.34}$$

Sustituyendo las Ecs. (4.31) en esta expresión, se confirma que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ cuando **F** es conservativa. *El enunciado inverso también es cierto*: Una fuerza **F** es conservativa si su rotacional es cero. Esta condición se puede usar para determinar si una fuerza dada es conservativa. En coordenadas cilíndricas, el rotacional de **F** es

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}. \tag{4.35}$$

Ejemplo 4.8

Según la Ec. (4.27), la energía potencial asociada con el peso de un cuerpo de masa m a una distancia r del centro de la Tierra es (en coordenadas polares)

$$V = -\frac{mgR_E^2}{r},$$

donde R_E es el radio de la Tierra. Use esta expresión para determinar la fuerza ejercida sobre el cuerpo por su peso.

ESTRATEGIA

La fuerza $\mathbf{F} = -\nabla V$. La energía potencial está expresada en coordenadas polares, por lo que usamos la Ec. (4.33) para determinar la fuerza.

SOLUCIÓN

Las derivadas parciales de V con respecto a r, θ y z son

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{mgR_E^2}{r^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Según la Ec. (4.33), la fuerza es

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{mgR_E^2}{r^2}\mathbf{e}_r.$$

COMENTARIO

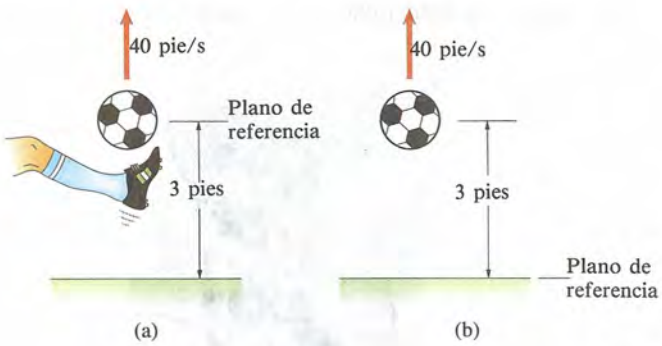
Ya sabemos que la fuerza es conservativa porque conocemos su energía potencial, pero podemos usar la Ec. (4.35) para confirmar que su rotacional es cero:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\dfrac{mgR_E^2}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Aunque usamos coordenadas cilíndricas para determinar **F** y para evaluar el producto vectorial, la expresión para V y la expresión resultante para **F** son válidas sólo si el cuerpo permanece en el plano $z = 0$.

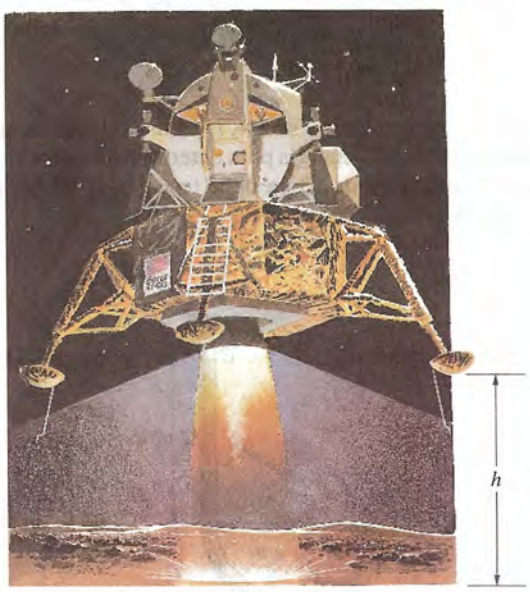
Problemas

4.69 Suponga que usted patea un balón directamente hacia arriba. Cuando abandona su pie, el balón está a 3 pies sobre el suelo y se mueve a 40 pie/s. Ignorando la resistencia del aire, use la conservación de la energía para determinar la altura que alcanza el balón y la rapidez con la cual se estará moviendo justo antes de tocar el suelo. Obtenga las respuestas expresando la energía potencial en términos de un plano de referencia (a) al nivel de la posición inicial del balón; (b) al nivel del suelo.



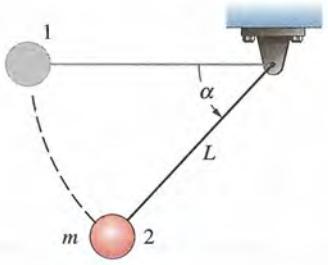
P4.69

4.70 El módulo lunar podría efectuar un aterrizaje seguro si su velocidad vertical durante el impacto fuese de 5 m/s o menor. Suponga que se quiere determinar la altura máxima h a la que el piloto podría apagar el motor si la velocidad del tren de aterrizaje respecto a la superficie fuese (a) cero; (b) 2 m/s hacia abajo; (c) 2 m/s hacia arriba. Use el principio de la conservación de la energía para determinar h. La aceleración debida a la gravedad en la superficie lunar es de 1.62 m/s^2.



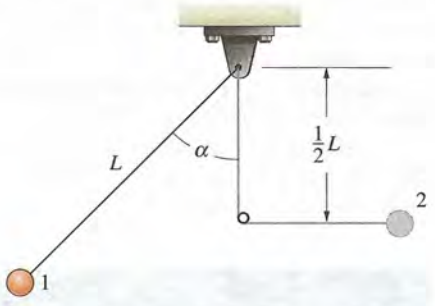
P4.70

4.71 La bola de la Fig. P4.71 se libera del reposo en la posición 1.
(a) Use el principio de la conservación de la energía para determinar la magnitud de su velocidad en la posición 2.
(b) Dibuje gráficas de la energía cinética, la energía potencial y la energía total para valores de α desde 0 hasta 180°.



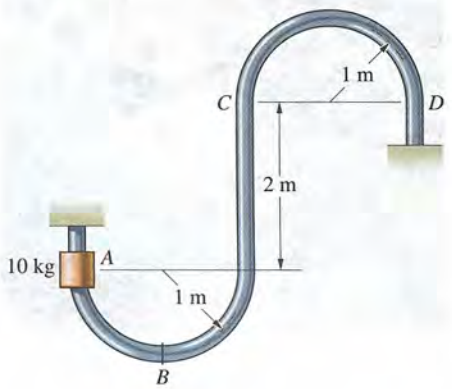
P4.71

4.72 Si la bola mostrada se libera del reposo en la posición 1, use el principio de la conservación de la energía para determinar el ángulo inicial α necesario para que oscile hasta la posición 2.



P4.72

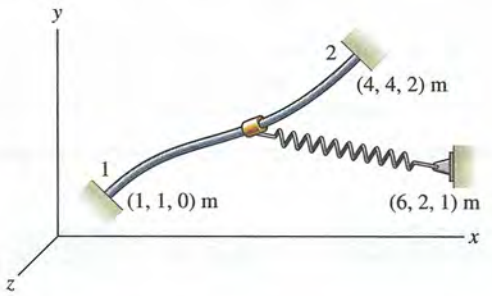
4.73 La barra de la Fig. P4.73 es lisa. Use el principio de la conservación de la energía para determinar la velocidad mínima que el deslizador de 10 kg debe tener en A (a) para alcanzar C; (b) para alcanzar D.



P4.73

4.74 En el Prob. 4.73, ¿qué fuerza normal ejerce la barra sobre el deslizador en B en los casos (a) y (b)?

4.75 El collarín de 10 kg mostrado parte del reposo en la posición 1 y resbala a lo largo de la barra. El eje señala hacia arriba. La constante de resorte es $k = 100$ N/m y la longitud del resorte sin estirar es de 2 m. Use el principio de la conservación de la energía para determinar la velocidad del collarín cuando éste alcanza la posición 2.

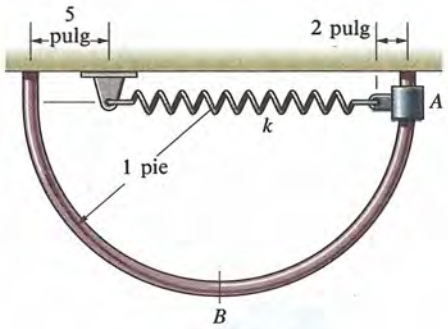


P4.75

4.76 Un alpinista de peso W está unido, por seguridad, a una cuerda amarrada a una distancia h debajo de él. Suponga que el alpinista se cae y que la cuerda se comporta como un resorte lineal con longitud sin estirar h y constante de resorte $k = C/h$, donde C es una constante. Use la conservación de la energía para determinar la máxima fuerza ejercida por la cuerda sobre él. (Observe que la fuerza máxima es independiente de h, lo que tranquiliza a los alpinistas; la fuerza máxima que resulta de una caída larga es la misma que en una caída corta.)

P4.76

4.77 El collarín de 5 lb mostrado parte del reposo en A y resbala a lo largo de la barra semicircular. La constante de resorte es $k = 100$ lb/pie y la longitud del resorte sin estirar es de 1 pie. Use el principio de la conservación de la energía para determinar la velocidad del collarín en B.

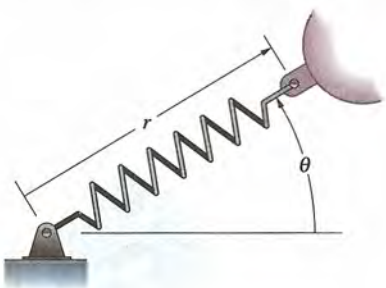


P4.77

4.78 La fuerza ejercida sobre un cuerpo por un resorte *no lineal* es

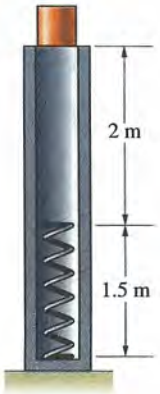
$$\mathbf{F} = -[k(r - r_0) + q(r - r_0)^3]\mathbf{e}_r,$$

donde k y q son constantes y r_0 es la longitud del resorte sin estirar. Determine la energía potencial del resorte en términos de su alargamiento $S = r - r_0$.



P4.78

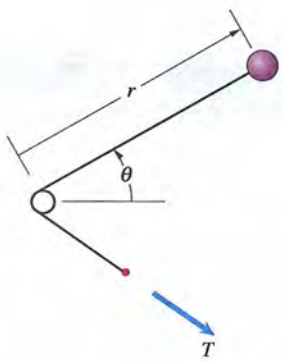
4.79 El cilindro de 20 kg mostrado se libera desde la posición mostrada y cae sobre el resorte lineal ($k = 3000$ N/m). Use el principio de la conservación de la energía para determinar la distancia que el cilindro se desplaza hacia abajo después de golpear el resorte.



P4.79

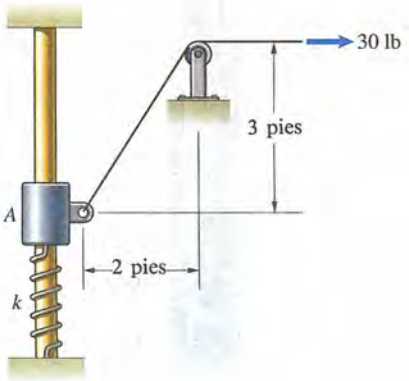
4.80 Suponga que el resorte del Prob. 4.79 es *no lineal* con energía potencial $V = \frac{1}{2}kS^2 + \frac{1}{4}qS^4$, donde $k = 3000$ N/m y $q = 4000$ N/m^3. ¿Cuál es la velocidad del cilindro cuando el resorte se ha comprimido 0.5 m?

4.81 La cuerda mostrada ejerce una fuerza de magnitud constante T sobre el cuerpo. Determine la energía potencial asociada con esta fuerza en coordenadas polares.



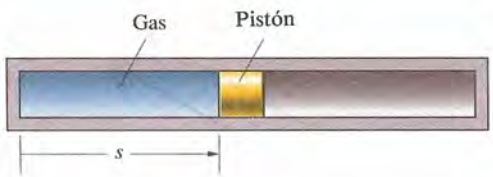
P4.81

4.82 El sistema está en reposo en la posición mostrada, con el collarín A de 12 lb descansando sobre el resorte (k = 20 lb/pie), cuando una fuerza constante de 30 lb se aplica al cable. ¿Cuál es la velocidad del collarín cuando se ha desplazado 1 pie?



P4.82

4.83 En la Fig. P4.83, el tubo (área de su sección transversal = A) es evacuado a la derecha del pistón de masa m, mientras que a la izquierda contiene gas a presión p. Sea p_0 el valor de la presión cuando $s = s_0$ y suponga que la presión del gas está relacionada con su volumen V por la ecuación pV = constante.
(a) Determine la energía potencial asociada con la fuerza ejercida sobre el pistón en función de s.
(b) Si el pistón parte del reposo en $s = s_0$ y la fricción es insignificante, ¿cuál es su velocidad en función de s?



P4.83

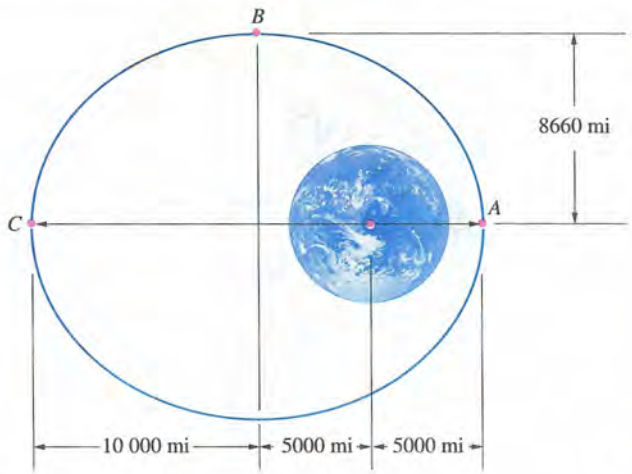
4.84 Resuelva el Prob. 4.83, suponiendo que la presión del gas está relacionada con su volumen por la expresión pV^{γ} = constante, donde γ es una constante.

4.85 Un satélite a una distancia r_0 del centro de la Tierra tiene una velocidad de magnitud v_0. Use el principio de la conservación de la energía para determinar la magnitud de su velocidad v cuando está a una distancia r del centro de la Tierra.

P4.85

4.86 Unos astrónomos detectan, a 100 000 km de la Tierra, un asteroide que se mueve a 2 km/s respecto al centro de ésta. En caso de que chocara con la Tierra, use el principio de la conservación de la energía para determinar la magnitud de su velocidad al entrar a la atmósfera (ignore el espesor de la atmósfera en comparación con el radio de la Tierra de 6370 km).

4.87 Un satélite está en órbita elíptica alrededor de la Tierra. Su velocidad en el perigeo A es de 28 280 pie/s. Use el principio de la conservación de la energía para determinar su velocidad en B. El radio de la Tierra es de 3960 millas.

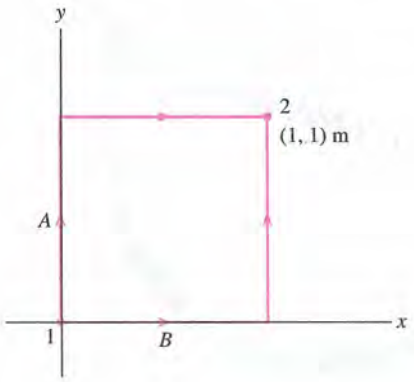


P4.87

4.88 En el Prob. 4.87, use el principio de la conservación de la energía para determinar la velocidad del satélite en el apogeo C. Usando su resultado, confirme numéricamente que las velocidades en el perigeo y en el apogeo satisfacen la relación $r_A v_A = r_C v_C$.

4.89 La componente de la fuerza externa total tangente a la trayectoria de un cuerpo de 10 kg que se mueve a lo largo del eje x es $\Sigma F_x = 3x^2\mathbf{i}$ N, donde x está en metros. En $x = 2$ m, la velocidad del cuerpo es $v_x = 4$ m/s.
(a) Use el principio del trabajo y la energía para determinar su velocidad en $x = 6$ m.
(b) Determine la energía potencial asociada con la fuerza ΣF_x y use el principio de la conservación de la energía para determinar su velocidad en $x = 6$ m.

4.90 La energía potencial asociada a una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo es $V = 2x^2 - y$ N-m (x y y en metros).
(a) Determine $\mathbf{F}$.
(b) Si el cuerpo se mueve de 1 a 2 a lo largo de las sendas A y B, determine el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ en cada una.



P4.90

4.91 Un cuerpo está sometido a la fuerza $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ N, donde x y y están en metros.
(a) Demuestre que $\mathbf{F}$ *no* es conservativa.
(b) Si el cuerpo se mueve del punto 1 al 2 a lo largo de las sendas A y B mostradas en el Prob. 4.90, determine el trabajo efectuado por $\mathbf{F}$ a lo largo de cada senda.

4.92 En coordenadas polares, la energía potencial asociada con la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida sobre un cuerpo por un resorte *no lineal* es

$$V = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 + \frac{1}{4}q(r - r_0)^4,$$

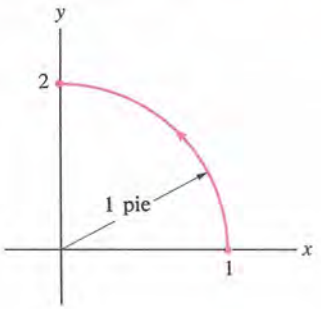
donde k y q son constantes y r_0 es la longitud del resorte sin estirar. Determine $\mathbf{F}$ en coordenadas polares.

4.93 En coordenadas polares, la fuerza ejercida sobre un cuerpo por un resorte *no lineal* es

$$\mathbf{F} = -[k(r - r_0) + q(r - r_0)^3]\,\mathbf{e}_r,$$

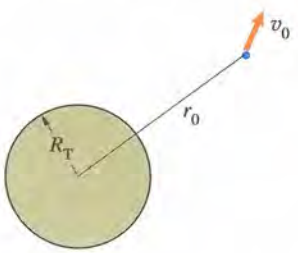
donde k y q son constantes y r_0 es la longitud del resorte sin estirar. Use la Ec. (4.35) para demostrar que $\mathbf{F}$ es conservativa.

4.94 La energía potencial asociada con una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo es $V = -r \operatorname{sen}\theta + r^2 \cos^2\theta$ lb-pie, donde r está en pies.
(a) Determine $\mathbf{F}$.
(b) Si el cuerpo se mueve del punto 1 al 2 a lo largo de la senda circular, ¿qué trabajo efectúa $\mathbf{F}$?



P4.94

4.95 En coordenadas polares, la fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa m por la gravedad de un planeta hipotético bidimensional es $\mathbf{F} = -(mg_T R_T/r)\mathbf{e}_r$, donde g_T es la aceleración debida a la gravedad en la superficie, R_T es el radio del planeta y r es la distancia desde el centro del planeta.
(a) Determine la energía potencial asociada con esta fuerza gravitatoria.
(b) Si el cuerpo tiene una velocidad v_0 a una distancia r_0, ¿cuál es su velocidad v en función de r?



P4.95

4.96 Sustituyendo las Ecs. (4.31) en la Ec. (4.34), confirme que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ si $\mathbf{F}$ es conservativa.

4.97 Determine cuáles de las siguientes fuerzas son conservativas:
(a) $\mathbf{F} = (3x^2 - 2xy)\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$;
(b) $\mathbf{F} = (x - xy^2)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$;
(c) $\mathbf{F} = (2xy^2 + y^3)\mathbf{i} + (2x^2y - 3xy^2)\mathbf{j}$.

4.98 Determine cuáles de las siguientes fuerzas son conservativas:
(a) $\mathbf{F} = 3r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\mathbf{e}_r + 2r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta$;
(b) $\mathbf{F} = (2r \operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\mathbf{e}_r + (r\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_\theta$;
(c) $\mathbf{F} = (\operatorname{sen}\theta + r\cos^2\theta)\mathbf{e}_r + (\cos\theta - r \operatorname{sen}\theta \cos\theta)\mathbf{e}_\theta$.

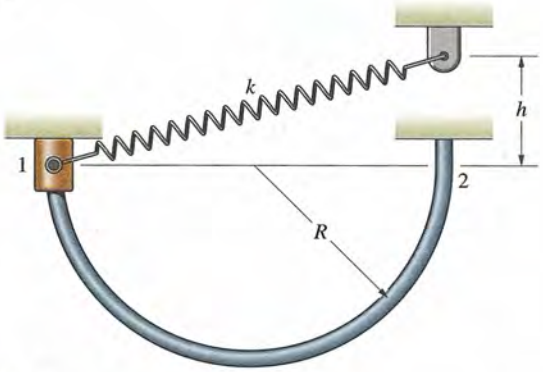
Ejemplo con computador

El ejemplo y los problemas siguientes están diseñados para resolverse usando una calculadora programable o un computador.

Ejemplo 4.9

En el interruptor mecánico de acción retardada de la Fig. 4.21, un electroimán libera el deslizador de 1 kg en la posición 1. Bajo la acción de la gravedad y del resorte lineal, el deslizador se mueve a lo largo de la barra lisa de la posición 1 a la posición 2, cerrando el interruptor. La constante del resorte es $k = 40$ N/m y su longitud sin estirar es $r_0 = 50$ mm. Las dimensiones son $R = 200$ mm y $h = 100$ mm. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad máxima del deslizador, y en qué posición ocurre?

Figura 4.21

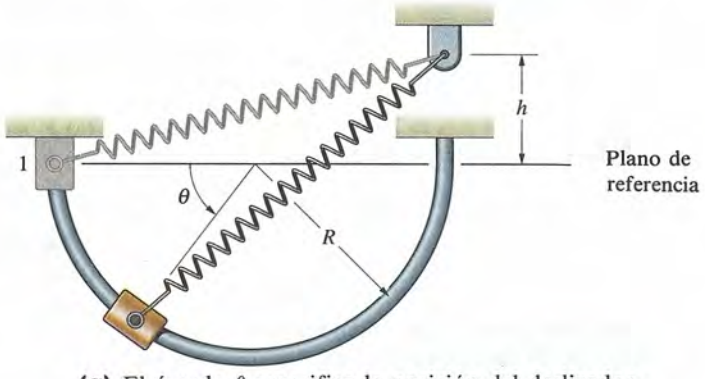


ESTRATEGIA

Podemos usar la conservación de la energía para obtener una ecuación que relacione la velocidad del deslizador con su posición. Dibujando una gráfica de la velocidad en función de la posición, podemos calcular la velocidad máxima y la posición en que ocurre.

SOLUCIÓN

Podemos especificar la posición del deslizador con el ángulo θ a través del cual se ha movido respecto a la posición 1 (Fig. a). En la posición 1, el alargamiento



(a) El ángulo θ especifica la posición del deslizador.

del resorte es igual a su longitud en la posición 1 menos su longitud sin estirar:

$$S_1 = \sqrt{(2R)^2 + h^2} - r_0.$$

Cuando el deslizador ha descrito el ángulo θ, el alargamiento del resorte es

$$S = \sqrt{(R + R\cos\theta)^2 + (h + R\,\text{sen}\,\theta)^2} - r_0.$$

Expresamos la energía potencial del peso del deslizador usando el plano de referencia de la Fig. (a). La suma de las energías cinética y potencial en la posición 1 debe ser igual a la suma de las energías cinética y potencial cuando el deslizador ha descrito el ángulo θ:

$$\frac{1}{2}kS_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kS^2 + mgy + \frac{1}{2}mv^2:$$

$$\frac{1}{2}k\left[\sqrt{(2R)^2 + h^2} - r_0\right]^2 + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{2}k\left[\sqrt{(R + R\cos\theta)^2 + (h + R\,\text{sen}\,\theta)^2} - r_0\right]^2$$

$$-mgR\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}mv^2.$$

Despejando v obtenemos

$$v = \left\{(k/m)\left[\sqrt{(2R)^2 + h^2} - r_0\right]^2 - (k/m)\left[\sqrt{(R + R\cos\theta)^2 + (h + R\,\text{sen}\,\theta)^2} - r_0\right]^2 + 2gR\,\text{sen}\,\theta\right\}^{1/2}.$$

Calculando los valores de esta expresión en función de θ obtenemos la gráfica mostrada en la Fig. 4.22. La velocidad es máxima aproximadamente en θ = 135°. Examinando los resultados calculados cerca de 135°,

θ	m/s
132°	2.5393
133°	2.5397
134°	2.5399
135°	2.5398
136°	2.5394
137°	2.5389
138°	2.5380

calculamos que una velocidad máxima de 2.54 m/s ocurre en θ = 134°.

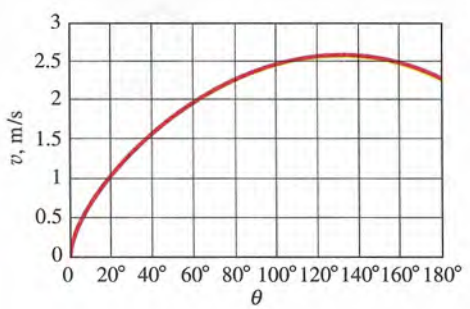
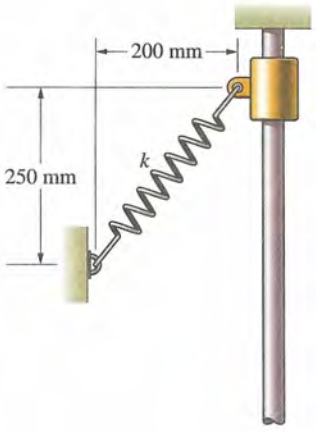


Figura 4.22
Magnitud de la velocidad en función de θ.

Problemas

4.99 La componente de la fuerza externa total tangente a la trayectoria de un cuerpo de 4 kg es $\Sigma F_t = 200 + 2s^2 - 0.2s^3$ N, donde s es su posición medida en metros a lo largo de la trayectoria. En $s = 0$, la velocidad del cuerpo es $v = 10$ m/s. ¿Qué distancia a lo largo de su trayectoria ha viajado el cuerpo cuando su velocidad es de 30 m/s?

4.100 El collarín de 6 kg se libera del reposo en la posición mostrada. Si la constante de resorte es $k = 4$ kN/m y la longitud del resorte sin estirar es de 150 mm, ¿qué distancia cae el collarín desde su posición inicial antes de rebotar?

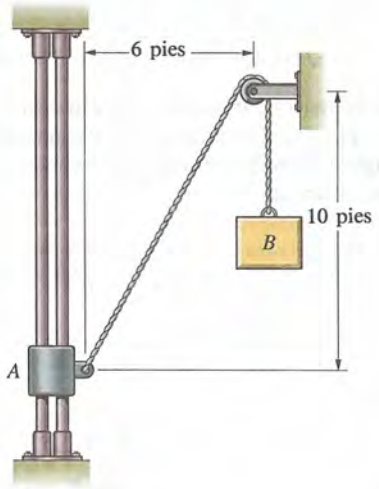


P4.100

4.101 ¿A qué distancia de su posición inicial alcanza el collarín del Prob. 4.100 su velocidad máxima, y qué valor tiene esta velocidad?

4.102 ¿A qué distancia de su posición inicial alcanza su máximo la potencia transferida al collarín del Prob. 4.100, y qué valor tiene esta potencia máxima?

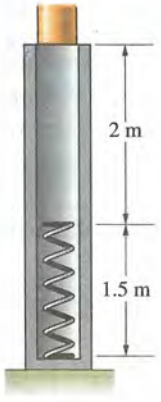
4.103 El sistema se libera del reposo en la posición mostrada. Los pesos son $W_A = 200$ lb y $W_B = 300$ lb. Ignore la fricción. Determine la velocidad máxima que alcanza A al ser izado.



P4.103

4.104 En el Prob. 4.103, ¿qué altura máxima alcanza A respecto a su posición inicial?

4.105 El cilindro de 16 kg se libera en la posición mostrada y cae sobre un resorte no lineal con energía potencial $V = \frac{1}{2}kS^2 + \frac{1}{4}qS^4$, donde $k = 2400$ N/m y $q = 3000$ N/m^3. Determine la distancia hacia abajo que recorre el cilindro después de entrar en contacto con el resorte.



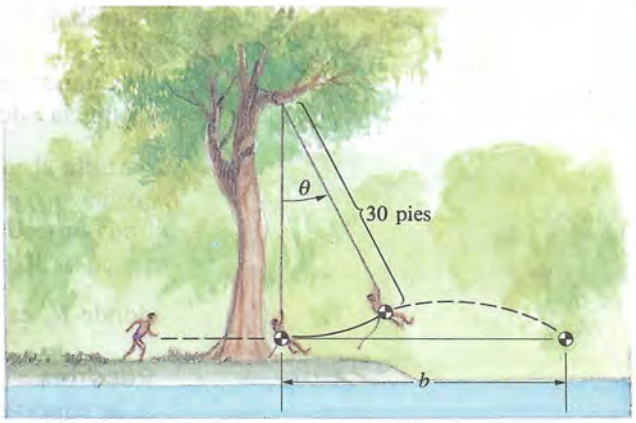
P4.105

4.106 En el Prob. 4.105, ¿cuál es la velocidad máxima alcanzada por el cilindro?

4.107 En el Prob. 4.82, ¿cuánto se eleva el collarín A respecto a su posición inicial?

4.108 En el Prob. 4.9, ¿cuál es la máxima potencia transferida del auto a la barrera, y qué distancia ha recorrido el auto desde el momento en que ocurre el contacto?

4.109 Un estudiante corre a 15 pie/s, sujeta una cuerda y se columpia sobre un lago. Determine el ángulo θ en que debe soltar la cuerda para maximizar la distancia horizontal b. ¿Cuál es el valor resultante de b?



P4.109

Resumen del capítulo

Principio del trabajo y la energía

El **principio del trabajo y la energía** establece que el trabajo U efectuado sobre un cuerpo que se mueve de una posición $\mathbf{r}_1$ a una posición $\mathbf{r}_2$ es igual al cambio en su energía cinética,

$$U = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \qquad \text{Ec. (4.5)}$$

donde

$$U = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{Ec. (4.6)}$$

El trabajo total desarrollado por fuerzas externas sobre un conjunto de cuerpos es igual al cambio en la energía cinética total del sistema si las fuerzas internas no efectúan trabajo neto.

Evaluación del trabajo

Sea s la posición del centro de masa de un cuerpo a lo largo de su trayectoria. El trabajo realizado sobre el cuerpo al pasar de s_1 a s_2 es

$$U = \int_{s_1}^{s_2} \Sigma F_t \, ds, \qquad \text{Ec. (4.7)}$$

donde ΣF_t es la componente tangencial de la fuerza externa total sobre el cuerpo. *Las componentes perpendiculares a la trayectoria no trabajan.*

Peso En un sistema coordenado con el eje y positivo dirigido hacia arriba, el trabajo efectuado por el peso de un cuerpo cuando su centro de masa se mueve de la posición 1 a la 2 es

$$U = -mg(y_2 - y_1). \qquad \text{Ec. (4.13)}$$

El trabajo es el producto del peso por el cambio de altura de su centro de masa. El trabajo es negativo si la altura aumenta y positivo si ésta disminuye.

Cuando se toma en cuenta la variación del peso de un cuerpo con la distancia r desde el centro de la Tierra, el trabajo realizado por su peso es

$$U = mgR_E^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right), \qquad \text{Ec. (4.15)}$$

donde R_E es el radio de la Tierra.

Resortes El trabajo efectuado sobre un cuerpo por un resorte unido a un soporte fijo es

$$U = -\frac{1}{2}k(S_2^2 - S_1^2), \qquad \text{Ec. (4.16)}$$

donde S_1 y S_2 son los valores del alargamiento del resorte en las posiciones inicial y final.

Potencia

La **potencia** es la razón a la que se efectúa trabajo. La potencia transmitida a un cuerpo por las fuerzas externas que actúan sobre él es

$$P = \Sigma\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \qquad \text{Ec. (4.17)}$$

La potencia es igual a la razón de cambio de la energía cinética del cuerpo. El promedio respecto al tiempo de la potencia durante un intervalo de tiempo de t_1 a t_2 es igual al cambio en su energía cinética, o el trabajo realizado dividido entre el intervalo de tiempo:

$$P_{\text{media}} = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{U}{t_2 - t_1}. \qquad \text{Ec. (4.18)}$$

Energía potencial

Para una fuerza dada $\mathbf{F}$ que actúe sobre un cuerpo, si existe una función V de la posición del cuerpo tal que

$$dV = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

se dice entonces que $\mathbf{F}$ es **conservativa** y que V es la **energía potencial** asociada con $\mathbf{F}$. El trabajo efectuado por $\mathbf{F}$ entre la posición 1 y la posición 2 es

$$U = V_1 - V_2. \qquad \text{Ec. (4.21)}$$

Si todas las fuerzas que efectúan trabajo sobre un sistema son conservativas, la energía total, es decir, la suma de las energías cinética y potencial de las fuerzas, se conserva:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = \text{constante}. \qquad \text{Ec. (4.23)}$$

Peso En un sistema coordenado cartesiano con su eje y dirigido hacia arriba, la energía potencial del peso de un cuerpo es

$$V = mgy. \qquad \text{Ec. (4.25)}$$

La energía potencial es el producto del peso del cuerpo por la altura de su centro de masa medida desde cualquier **nivel de referencia** conveniente.

Cuando se toma en cuenta la variación del peso de un cuerpo con la distancia r desde el centro de la Tierra, la energía potencial de su peso es

$$V = -\frac{mgR_E^2}{r}, \qquad \text{Ec. (4.27)}$$

donde R_E es el radio de la Tierra.

Resortes La energía potencial de la fuerza ejercida sobre un cuerpo por un resorte lineal es

$$V = \frac{1}{2}kS^2, \qquad \text{Ec. (4.28)}$$

donde S es el alargamiento del resorte.

Relaciones entre fuerza y energía potencial

Una fuerza $\mathbf{F}$ está relacionada con su energía potencial asociada por

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right) = -\nabla V. \qquad \text{Ec. (4.32)}$$

Una fuerza $\mathbf{F}$ es conservativa si su **rotacional** es cero:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0.$$

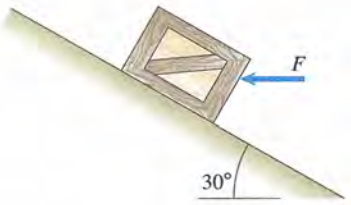
Problemas de repaso

4.110 El conductor de un auto de 3000 lb que circula a 40 mi/h aplica una fuerza creciente sobre el pedal del freno. La magnitud de la fricción ejercida sobre el vehículo por el camino es $f = 250 + 6s$ lb, donde s es la posición horizontal del auto relativa a la que tenía cuando se aplicaron los frenos. Suponiendo que los neumáticos no resbalan, determine la distancia necesaria para que el auto se detenga (a) usando la segunda ley de Newton; (b) usando el principio del trabajo y la energía.

4.111 Suponga que el auto del Prob. 4.110 viaja sobre un pavimento húmedo y que los coeficientes de fricción entre los neumáticos y el camino son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.35$. Determine la distancia necesaria para que el auto se detenga.

4.112 El tripulante de una pequeña nave espacial (masa combinada = 450 kg) en vuelo estacionario a 100 m sobre la superficie de la Luna, descubre que el combustible casi se ha agotado y puede ejercer el empuje necesario sólo durante 5 segundos más. Rápidamente considera dos estrategias para llegar a la superficie: (a) Descender 20 m, ejercer el empuje durante 5 s y caer el resto del trayecto; (b) descender 40 m, ejercer el empuje durante 5 s y caer el resto del trayecto. ¿Qué estrategia le da mayor probabilidad de sobrevivir? ¿Qué trabajo es realizado por el empuje del motor en cada caso? ($g_{\text{Luna}} = 1.62$ m/s^2.)

4.113 En la Fig. P4.113, los coeficientes de fricción entre la caja de 20 kg y la superficie son $\mu_s = 0.24$ y $\mu_k = 0.22$. Si la caja parte del reposo y la fuerza horizontal es $F = 200$ N, ¿cuál es la magnitud de su velocidad cuando se ha desplazado 2 m?



P4.113

4.114 En el Prob. 4.113, ¿cuál es la magnitud de la velocidad de la caja cuando ésta se ha desplazado 2 m si la fuerza horizontal es $F = 40$ N?

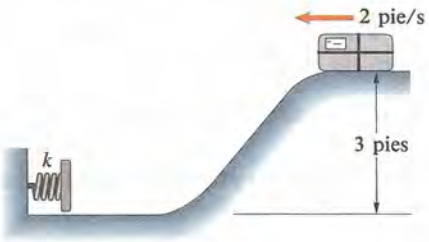
4.115 Una locomotora pesa 1.19 millones de libras y la fuerza de tracción tangencial de sus ruedas motrices es de 135 000 lb. Si se ignoran las otras fuerzas tangenciales, ¿qué distancia requiere para acelerar de cero a 60 mi/h?

P4.115

4.116 En el Prob. 4.115, suponga que la fuerza tangencial total sobre la locomotora al acelerar de cero a 60 mi/h es $(F_0/m)(1 - v/88)$, donde $F_0 = 135\,000$ lb, m es su masa y v es su velocidad en pie/s.
(a) ¿Qué trabajo efectúa al acelerar hasta 60 mi/h?
(b) Determine su velocidad en función del tiempo.

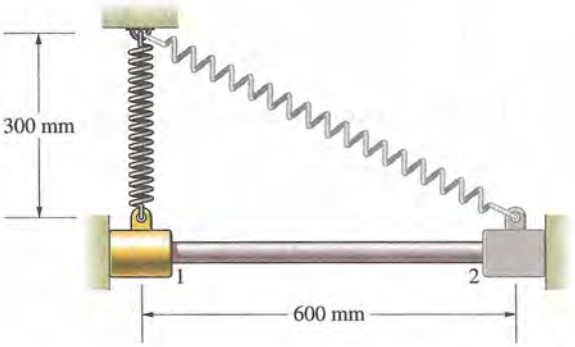
4.117 Si un auto que circula a 65 mi/h choca contra la barrera del Prob. 4.9, determine la desaceleración máxima que experimentan los pasajeros si el auto pesa (a) 2500 lb; (b) 5000 lb.

4.118 En el diseño preliminar de una máquina clasificadora del correo, los paquetes que se mueven hacia abajo por una rampa lisa a 2 pie/s son detenidos por un resorte lineal. ¿Cuál debe ser la constante del resorte si no se quiere que un paquete de 10 lb quede sometido a una desaceleración máxima superior a 10 g?



P4.118

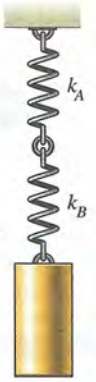
4.119 Cuando el collarín de 1 kg mostrado está en la posición 1, la tensión en el resorte es de 50 N y la longitud del resorte sin estirar es de 260 mm. Si el collarín se jala hacia la posición 2 y se libera del reposo, ¿cuál es su velocidad cuando regresa a 1?



P4.119

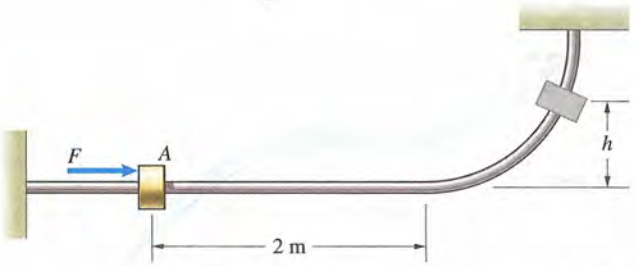
4.120 En el Prob. 4.119, suponga que las tensiones en el resorte en las posiciones 1 y 2 son 100 N y 400 N respectivamente.
(a) ¿Cuál es la constante de resorte k?
(b) Si el collarín tiene una velocidad de 15 m/s en 1, ¿cuál es su velocidad cuando alcanza la posición 2?

4.121 El peso de 30 lb mostrado se libera del reposo con los dos resortes (k_A = 30 lb/pie, k_B = 15 lb/pie) sin estirar.
(a) ¿Qué distancia cae el peso antes de rebotar?
(b) ¿Qué velocidad máxima alcanza?



P4.121

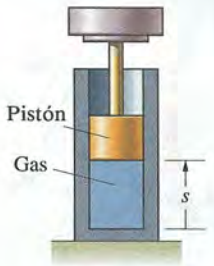
4.122 El collarín A de 12 kg está en reposo en la posición mostrada en $t = 0$ y se encuentra sometido a la fuerza tangencial $F = 24 - 12t^2$ N durante 1.5 s. Ignorando la fricción, ¿qué altura máxima h alcanza?



P4.122

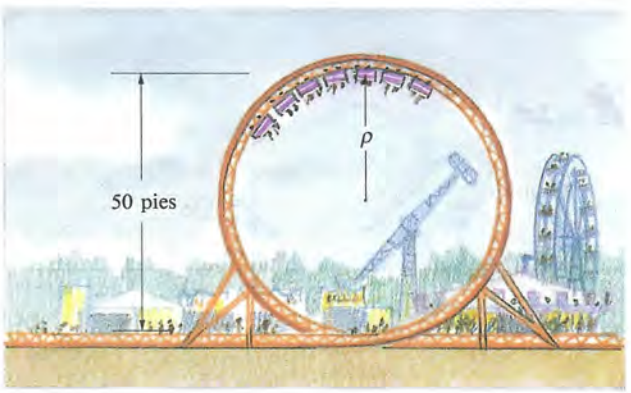
4.123 Cuando el motor de un cohete de 22 Mg se apaga a una altura de 2 km, su velocidad es de 3 km/s y viaja con un ángulo de 60° respecto a la horizontal. Ignore la variación de la fuerza gravitatoria con la altura.
(a) Si se ignoran las fuerzas aerodinámicas, ¿cuál es la magnitud de la velocidad del cohete cuando éste alcanza una altura de 6 km?
(b) Si la velocidad real del cohete cuando éste alcanza una altura de 6 km es de 2.8 km/s, ¿qué trabajo efectúan las fuerzas aerodinámicas cuando el cohete se desplaza de 2 km a 6 km de altura?

4.124 En la Fig. P4.124, el pistón y la carga que soporta son acelerados hacia arriba por el gas en el cilindro. El peso total del pistón y la carga es 1000 lb. El cilindro ejerce una fuerza de fricción constante de 50 lb sobre el pistón cuando éste se levanta. La fuerza neta ejercida sobre el pistón por la presión es $(p - p_{\text{atm}})A$, donde p es la presión del gas, p_{atm} = 2117 lb/pie^2 es la presión atmosférica, y A = 1 pie^2 es el área transversal del pistón. Suponga que el producto de p y el volumen del cilindro es constante. Cuando s = 1 pie, el pistón está en reposo y p = 5000 lb/pie^2. ¿Cuál es la velocidad del pistón cuando s = 2 pies?



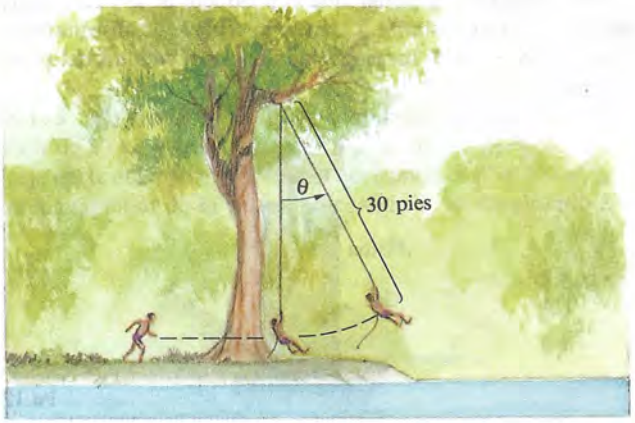
P4.124

4.125 Suponga que para diseñar un lazo para un parque de diversiones se ha establecido como criterio de seguridad que en la parte superior del lazo la fuerza normal ejercida sobre un pasajero sea igual al 10% del peso de éste (es decir, el "peso efectivo" que comprime al pasajero en su asiento es el 10% de su peso). El vagón se mueve a 62 pie/s cuando entra al lazo. ¿Cuál es el radio de curvatura instantáneo necesario ρ de la vía en la parte superior del lazo?



P4.125

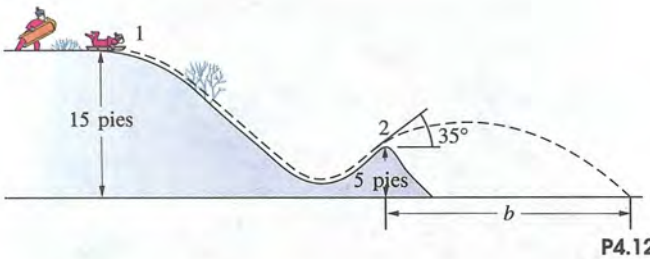
4.126 Un joven de 180 lb corre a 15 pie/s, sujeta una cuerda y se columpia sobre un lago. Suelta la cuerda cuando su velocidad es cero.
(a) ¿Cuál es el ángulo θ cuando el joven suelta la cuerda?
(b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda justo antes de que la suelte?
(c) ¿Cuál es la tensión máxima en la cuerda?



P4.126

4.127 Si el joven del Prob. 4.126 suelta la cuerda cuando $\theta = 25°$, ¿qué altura máxima alcanza respecto a su posición cuando sujeta la cuerda?

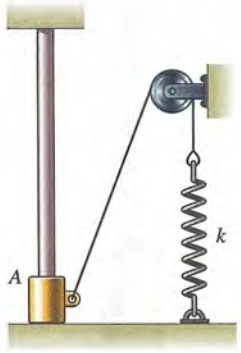
4.128 Un niño sale corriendo y salta sobre su trineo en la posición 1 de la figura. Abandona el terreno en la posición 2 y aterriza en la nieve a una distancia $b = 25$ pies. ¿Qué velocidad tenía en la posición 1?



P4.128

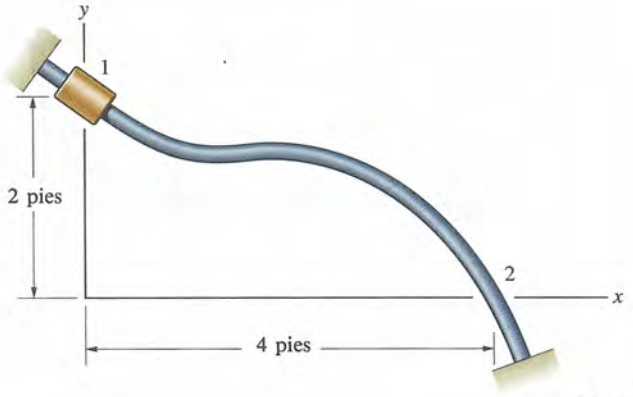
4.129 En el Prob. 4.128, si el niño tiene en la posición 1 una velocidad de 15 pie/s, ¿a qué distancia b aterriza en la nieve?

4.130 Un collarín de 1 kg está unido con una cuerda a un resorte lineal ($k = 500$ N/m). El collarín parte del reposo en la posición mostrada, y la tensión inicial en la cuerda es de 100 N. ¿Qué distancia recorre el collarín sobre la barra lisa?



P4.130

4.131 En la Fig. P4.131, el eje y es vertical y la barra curva es lisa. Si la magnitud de la velocidad del deslizador de 4 lb es de 6 pie/s en la posición 1, ¿cuál es la magnitud de su velocidad cuando llega a la posición 2?

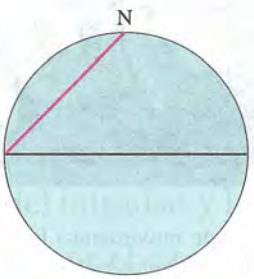


P4.131

4.132 En el Prob. 4.131, determine la magnitud de la velocidad del deslizador cuando alcanza la posición 2 si durante su movimiento está sometido a una fuerza adicional $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (lb).

4.133 Suponga que un cuerpo de masa m está bajo la superficie de la Tierra. En un sistema polar de coordenadas con su origen en el centro de la Tierra, la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo es $-(mgr/R_E)\mathbf{e}_r$, donde R_E es el radio de la Tierra. Demuestre que la energía potencial asociada con la fuerza gravitatoria es $V = mgr^2/2R_E$.

4.134 Se afirma que si se pudieran perforar túneles rectos a través de la Tierra entre puntos sobre su superficie, los trenes podrían viajar entre esos puntos usando la fuerza gravitatoria para acelerar y desacelerar (los efectos de la fricción y de la fuerza de arrastre aerodinámica se podrían minimizar evacuando los túneles y usando trenes con levitación magnética). Suponga que un tren así viaja del Polo Norte a un punto sobre el ecuador. Determine la magnitud de la velocidad del tren (a) cuando llega al ecuador; (b) cuando se encuentra a la mitad del camino. El radio de la Tierra es $R_E = 3960$ millas.



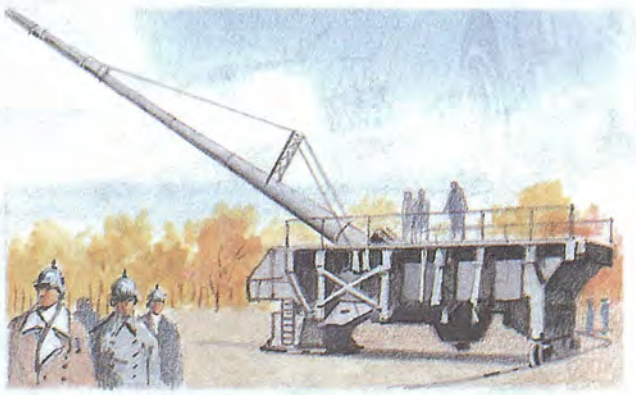
P4.134

4.135 En el Prob. 4.115, ¿cuál es la máxima potencia transferida a la locomotora durante su aceleración?

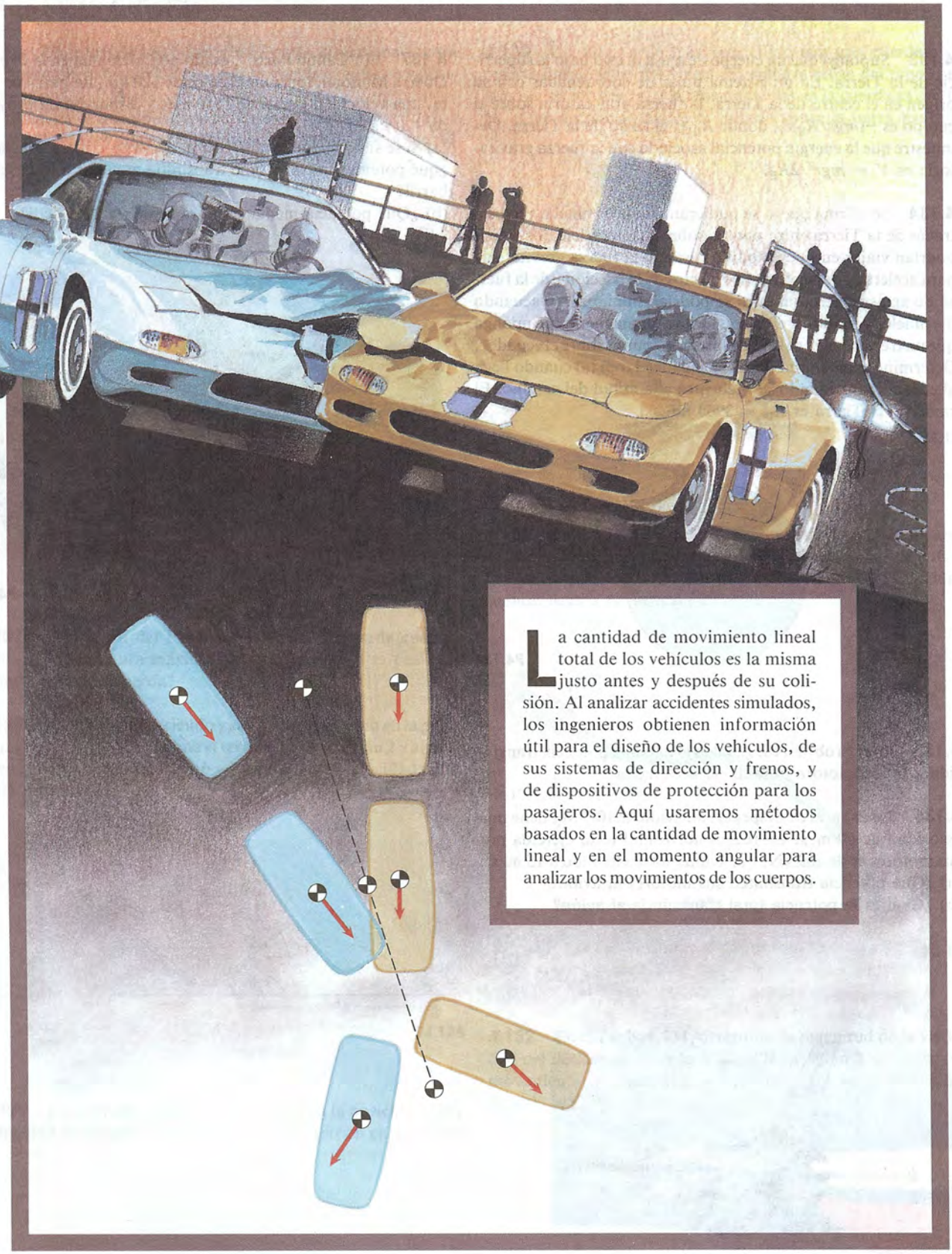
4.136 Justo antes de despegar, un avión de 10.5 Mg tiene una velocidad de 60 m/s. La fuerza horizontal total ejercida por sus motores es de 189 kN, y el avión está acelerando a 15 m/s^2.
(a) ¿Qué potencia transmiten sus motores al avión?
(b) ¿Cuál es la potencia total transmitida al avión?

P4.136

4.137 El "Cañón París", usado por Alemania en la Primera Guerra Mundial, tenía un alcance de 120 km, un barril de 37.5 m, una velocidad inicial de 1550 m/s y disparaba un proyectil de 120 kg.
(a) Si se supone que la aceleración del proyectil era constante, ¿qué potencia máxima se le transmitía al viajar a lo largo del barril?
(b) ¿Qué potencia media se le transmitía al proyectil?



P4.137



La cantidad de movimiento lineal total de los vehículos es la misma justo antes y después de su colisión. Al analizar accidentes simulados, los ingenieros obtienen información útil para el diseño de los vehículos, de sus sistemas de dirección y frenos, y de dispositivos de protección para los pasajeros. Aquí usaremos métodos basados en la cantidad de movimiento lineal y en el momento angular para analizar los movimientos de los cuerpos.

Capítulo 5

Métodos de la cantidad de movimiento

EN el Cap. 4 transformamos la segunda ley de Newton para obtener el principio del trabajo y la energía. En este capítulo integramos esa ley con respecto al tiempo y obtenemos una relación entre la integral respecto al tiempo de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el cambio en su cantidad de movimiento. Con este principio del impulso y la cantidad de movimiento podemos determinar el cambio en la velocidad de un cuerpo cuando se conocen las fuerzas externas en función del tiempo.

Aplicando el principio a dos o más cuerpos, obtenemos la ley de la conservación de la cantidad de movimiento lineal, que nos permite analizar impactos entre cuerpos y evaluar las fuerzas ejercidas por flujos continuos de masa, como ocurre en los motores de retroimpulso de aviones y cohetes.

Otra transformación de la segunda ley de Newton nos da una relación entre la integral respecto al tiempo de los momentos ejercidos sobre un cuerpo y el cambio en una cantidad llamada momento angular. También mostramos que en la situación llamada movimiento bajo fuerza central, el momento angular de un cuerpo se conserva.

5.1 *Principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal*

El principio del trabajo y la energía es muy útil en mecánica. Podemos obtener otra herramienta útil para el análisis del movimiento integrando la segunda ley de Newton respecto al tiempo. Expresamos dicha ley así:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Luego integramos con respecto al tiempo para obtener

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1,} \tag{5.1}$$

donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son las velocidades del centro de masa en los tiempos t_1 y t_2. El término de la izquierda se llama **impulso lineal**, y $m\mathbf{v}$ es la **cantidad de movimiento lineal**. Este resultado es el **principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal:** el impulso aplicado a un cuerpo durante un intervalo de tiempo es igual al cambio en su cantidad de movimiento lineal (Fig. 5.1). Las dimensiones de ambas cantidades son (fuerza) × (tiempo).

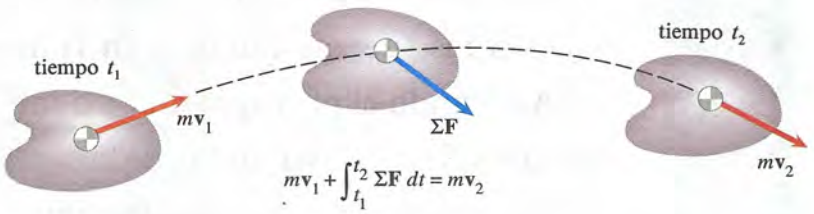


Figura 5.1
Principio del impulso y la cantidad de movimiento.

Observe que la Ec. (5.1) y el principio del trabajo y la energía, expresado por la Ec. (4.5), son muy similares. Ambas relacionan la integral de las fuerzas externas con el cambio de velocidad de un cuerpo. La Ec. (5.1) es una ecuación vectorial que nos da el cambio de magnitud y dirección de la velocidad, mientras que el principio del trabajo y la energía, que es una ecuación escalar, sólo nos da el cambio en la magnitud de la velocidad. Sin embargo, hay una gran diferencia entre los dos métodos: En el caso del impulso y la cantidad de movimiento, no hay tipos de fuerzas equivalentes a las fuerzas conservativas que facilitan en grado sumo la aplicación del trabajo y la energía.

Cuando se conocen las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo como funciones del tiempo, el principio del impulso y la cantidad de movimiento nos permite determinar el cambio en su velocidad durante un intervalo de tiempo. Éste es un resultado importante pero no nuevo. Cuando usamos la segunda ley de Newton en el Cap. 3 para determinar la acelera-

ción de un cuerpo y luego integramos la aceleración con respecto al tiempo para determinar su velocidad, estábamos aplicando realmente el principio del impulso y la cantidad de movimiento. Sin embargo, en este capítulo mostraremos que tal principio se puede extender a nuevas e interesantes aplicaciones.

El promedio respecto al tiempo de la fuerza total que actúa sobre un cuerpo entre t_1 y t_2 es

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{media}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{F}\, dt,$$

de manera que podemos escribir la Ec. (5.1) como

$$(t_2 - t_1)\Sigma \mathbf{F}_{\text{media}} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1. \tag{5.2}$$

Con esta ecuación se puede determinar el valor medio de la fuerza total que actúa sobre un cuerpo durante un intervalo de tiempo dado si se conoce el cambio en su velocidad.

Una fuerza de magnitud relativamente grande que actúa durante un pequeño intervalo de tiempo se llama **fuerza impulsora** (Fig. 5.2). La determinación del desarrollo temporal real de tal fuerza suele ser impráctica, pero a menudo puede especificarse su valor medio. Por ejemplo, una pelota de golf golpeada por un palo está sometida a una fuerza impulsiva. Filmando a gran velocidad podemos determinar la duración del impacto, la velocidad de la pelota y el movimiento resultante por el impacto. Conociendo la duración y la cantidad de movimiento lineal de la pelota resultantes del impacto, podemos usar la Ec. (5.2) para determinar la fuerza media ejercida sobre la pelota por el palo (véase el Ej. 5.2).

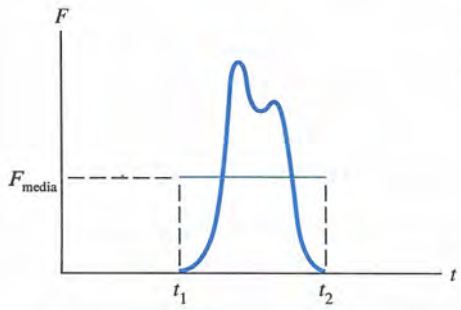


Figura 5.2
Fuerza impulsora y su valor medio.

Ejemplo 5.1

Figura 5.3

El cohete de la Fig. 5.3 viaja en línea recta hacia arriba cuando repentinamente empieza a girar en sentido antihorario a 0.25 rev/s, y es destruido 2 s después. Su masa es $m = 90$ Mg, su empuje es $T = 1.0$ MN y su velocidad hacia arriba cuando empieza a girar es de 10 m/s. Si se ignoran las fuerzas aerodinámicas, ¿cuál era su velocidad al ser destruido?

ESTRATEGIA

Como conocemos la velocidad angular, podemos determinar la dirección del empuje en función del tiempo y calcular el impulso durante el periodo de 2 segundos.

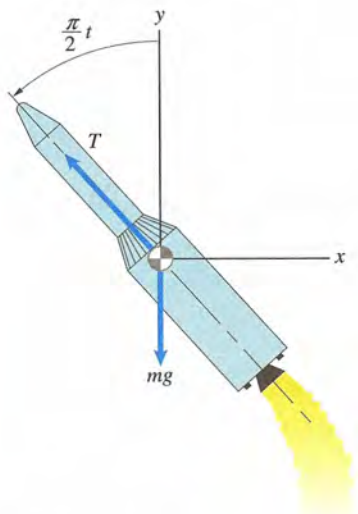
SOLUCIÓN

La velocidad angular del cohete es $\pi/2$ rad/s. Con $t = 0$ como el tiempo en que empieza a girar, el ángulo entre su eje y la vertical es $(\pi/2)t$ (Fig. a). La fuerza total sobre el cohete es

$$\Sigma \mathbf{F} = \left(-T \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t\right) \mathbf{i} + \left(T \cos \frac{\pi}{2} t - mg\right) \mathbf{j},$$

de modo que el impulso entre $t = 0$ y $t = 2$ s es

$$\begin{aligned} \int_0^2 \Sigma \mathbf{F}\, dt &= \int_0^2 \left[\left(-T \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t\right) \mathbf{i} + \left(T \cos \frac{\pi}{2} t - mg\right) \mathbf{j}\right] dt \\ &= \left[\left(T \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} t\right) \mathbf{i} + \left(T \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t - mgt\right) \mathbf{j}\right]_0^2 \\ &= -\frac{4}{\pi} T \mathbf{i} - 2mg \mathbf{j}. \end{aligned}$$



(a) El cohete gira.

Del principio del impulso y la cantidad de movimiento,

$$\int_0^2 \Sigma \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 :$$

$$-\frac{4}{\pi}(1 \times 10^6)\,\mathbf{i} - 2(90 \times 10^3)(9.81)\,\mathbf{j} = (90 \times 10^3)(\mathbf{v}_2 - 10\,\mathbf{j}).$$

Obtenemos $\mathbf{v}_2 = -14.15\mathbf{i} - 9.62\mathbf{j}$ (m/s).

COMENTARIO

Observe que el empuje del cohete no tiene efecto en la componente y de su velocidad durante los 2 s. El efecto de la componente y positiva del empuje durante el primer cuarto de revolución es cancelado por el efecto de la componente y negativa durante el segundo cuarto de revolución. El cambio en la componente y de la velocidad es causado enteramente por el peso del cohete. El empuje tiene una componente x negativa durante el intervalo de 2 s, dando al cohete su componente x de velocidad negativa cuando es destruido.

Ejemplo 5.2

Una pelota de golf en vuelo es fotografiada a intervalos de 0.001 s (Fig. 5.4). La pelota de 1.62 onzas tiene 1.68 pulg de diámetro. Si el palo tocó la pelota durante 0.0006 s, calcule la fuerza impulsiva media ejercida por el palo.

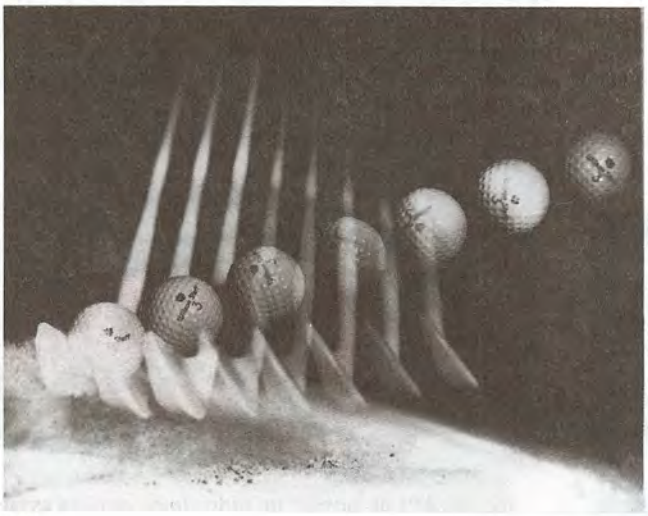
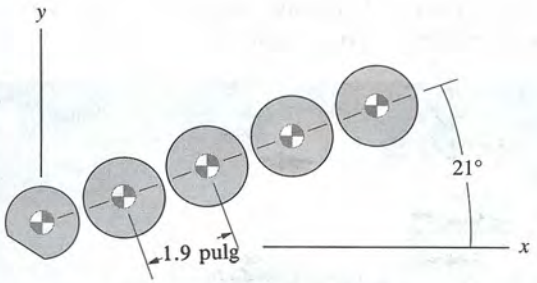


Figura 5.4



(a) Cálculo de la distancia recorrida durante un intervalo de 0.001 s.

ESTRATEGIA

Midiendo la distancia recorrida por la pelota en uno de los intervalos de 0.001 s, podemos calcular su velocidad después de ser golpeada y luego usar la Ec. (5.2) para determinar la fuerza media total sobre la pelota.

SOLUCIÓN

Comparando la distancia recorrida durante uno de los intervalos de 0.001 s con el diámetro conocido de la pelota, calculamos que ésta viajó 1.9 pulg y que su dirección fue de 21° sobre la horizontal (Fig. a). La magnitud de la velocidad de la pelota es

$$\frac{(1.9/12)\ \text{pies}}{0.001\ \text{s}} = 158\ \text{pie/s}.$$

El peso de la pelota es $1.62/16 = 0.101$ lb, por lo que su masa es $0.101/32.2 = 3.14 \times 10^{-3}$ slugs. De la Ec. (5.2),

$$(t_2 - t_1)\Sigma\mathbf{F}_{\text{media}} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1.$$

$$(0.0006)\Sigma\mathbf{F}_{\text{media}} = (3.14 \times 10^{-3})(158.3)(\cos 21^\circ\ \mathbf{i} + \text{sen}\ 21^\circ\ \mathbf{j}) - 0,$$

obtenemos

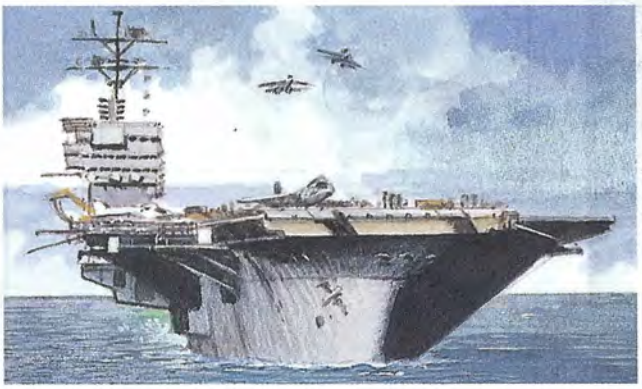
$$\Sigma\mathbf{F}_{\text{media}} = 775\mathbf{i} + 297\mathbf{j}\ \text{(lb)}.$$

COMENTARIO

La fuerza media durante el tiempo en que el palo está en contacto con la pelota incluye la fuerza impulsiva ejercida por el palo y el peso de la pelota. En comparación con la gran fuerza impulsiva media ejercida por el palo, el peso ($-0.101\mathbf{j}$ lb) es insignificante.

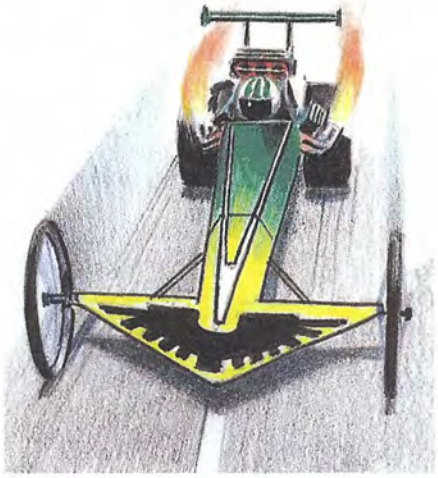
Problemas

5.1 El portaaviones *Nimitz* pesa 91 000 toneladas. Suponga que sus motores y la resistencia hidrodinámica ejercen sobre él una fuerza constante de desaceleración de 1 000 000 lb.
(a) Use el principio del impulso y la cantidad de movimiento para determinar cuánto tarda la nave en detenerse desde su velocidad máxima de aproximadamente 30 nudos (un nudo equivale a alrededor de 6076 pie/h).
(b) Con el principio del trabajo y la energía, determine la distancia que recorre la nave antes de detenerse.



P5.1

5.2 Un vehículo de 2000 lb acelera del reposo a 300 mi/h en 6 s.
(a) ¿Qué impulso se aplica al vehículo durante los 6 s?
(b) Si se supone como primera aprximación que la fuerza tangencial ejercida sobre el vehículo es constante, ¿cuál es la magnitud de la fuerza?

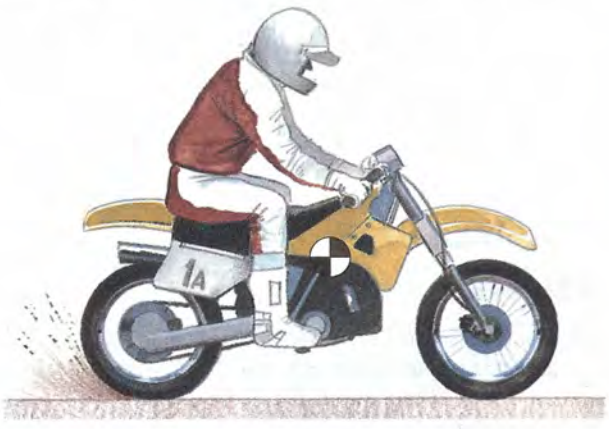


P5.2

5.3 Un camión de bomberos de 21 900 kg, diseñado para responder rápidamente a emergencias en aeropuertos, acelera del reposo a 80 km/h en 35 s.
(a) ¿Qué impulso se aplica al vehículo durante los 35 s?
(b) Si se supone como primera aproximación que la fuerza tangencial ejercida sobre el vehículo es constante, ¿cuál es la magnitud de la fuerza?
(c) ¿Qué potencia media se transfiere al vehículo?

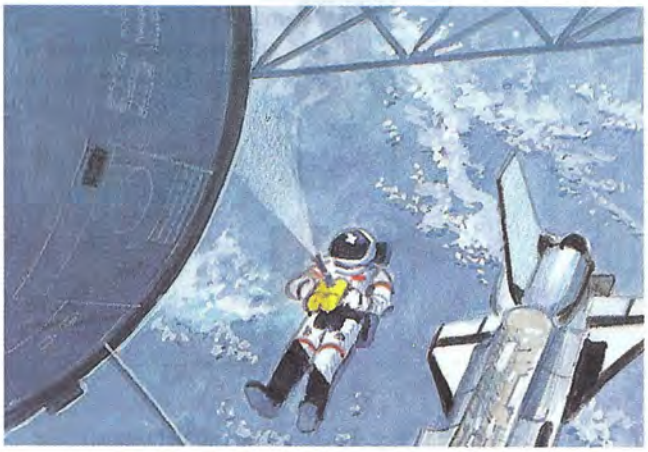
P5.3

5.4 En la Fig. P5.4, el peso combinado de la motocicleta y el conductor es de 300 lb. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos de la motocicleta y el camino es $\mu_k = 0.8$. Suponga que el conductor parte del reposo y hace patinar la rueda trasera (motriz). La fuerza normal entre la rueda trasera y el camino es de 250 lb.
(a) ¿Qué impulso ejerce la fuerza de fricción sobre la rueda trasera en 5 s?
(b) Si se ignoran otras fuerzas horizontales, ¿qué velocidad se alcanza en 5 s?



P5.4

5.5 Un astronauta "flota" hacia una estación espacial a 8 m/s. Lleva consigo una unidad de maniobras (un pequeño cohete de peróxido de hidrógeno) que tiene un impulso nominal de 720 N-s. La masa total del astronauta, su traje y la unidad de maniobras es de 120 kg. Si usa todo el impulso para disminuir su velocidad, ¿cuál será ésta respecto a la estación?



P5.5

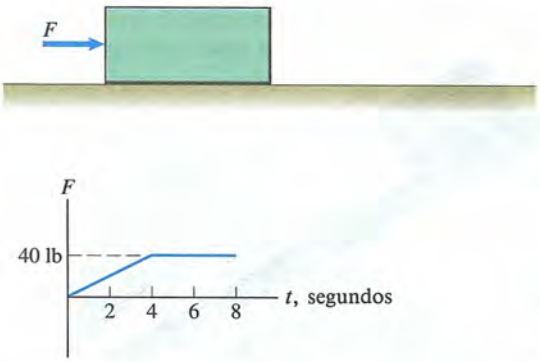
5.6 La fuerza externa total sobre un cuerpo de 10 kg es constante e igual a $90\mathbf{i} - 60\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$ (N). En $t = 2$ s, la velocidad del cuerpo es $-8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (m/s).
(a) ¿Qué impulso se aplica al cuerpo de $t = 2$ s a $t = 4$ s?
(b) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo en $t = 4$ s?

5.7 La fuerza externa total sobre un cuerpo es $\mathbf{F} = 10t\mathbf{i} + 60\mathbf{j}$ (lb). En $t = 0$, su velocidad es $\mathbf{v} = 20\mathbf{j}$ (pie/s). En $t = 12$ s, la componente x de su velocidad es 48 pie/s.
(a) ¿Qué impulso se aplica al cuerpo entre $t = 0$ y $t = 6$ s?
(b) ¿Cuál es su velocidad en $t = 6$ s?

5.8 Durante los primeros 5 s del recorrido de despegue de un avión de 32 200 lb, el piloto aumenta el empuje del motor a una razón constante de 5000 lb hasta alcanzar su empuje total de 25 000 lb.
(a) ¿Qué impulso ejerce el empuje sobre el avión durante los 5 s?
(b) Si se ignoran otras fuerzas, ¿qué tiempo total se requiere para que el avión alcance su velocidad de despegue de 150 pie/s?

P5.8

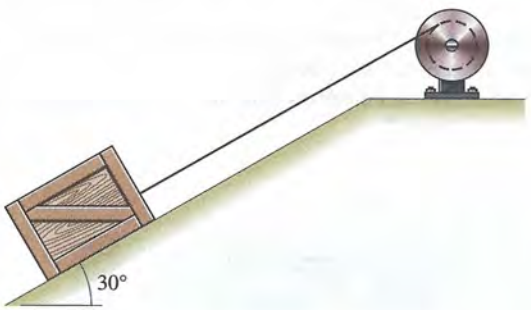
5.9 Una caja de 100 lb parte del reposo y está sometida a la fuerza mostrada. Si se ignora la fricción, ¿cuál es la velocidad de la caja en $t = 8$ s?



P5.9

5.10 Resuelva el Prob. 5.9 si los coeficientes de fricción entre la caja y el piso son $\mu_s = \mu_k = 0.2$.

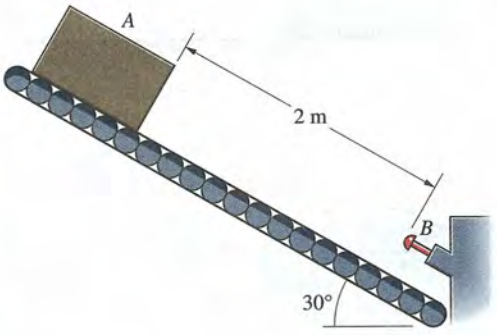
5.11 La caja mostrada tiene una masa de 120 kg y los coeficientes de fricción entre ella y la superficie inclinada son $\mu_s = 0.6$ y $\mu_k = 0.5$. La caja parte del reposo y el malacate ejerce una tensión $T = 1220$ N.
(a) ¿Qué impulso se aplica a la caja durante el primer segundo de movimiento?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la caja después de 1 s?



P5.11

5.12 Resuelva el Prob. 5.11 si la caja parte del reposo en $t = 0$ y el malacate ejerce una tensión $T = 1220 + 200t$ N.

5.13 En un proceso de ensamblado, el paquete A de 20 kg parte del reposo y resbala sobre la rampa lisa mostrada. Suponga que se quiere diseñar el dispositivo hidráulico B para que ejerza una fuerza constante de magnitud F sobre el paquete y lo detenga en 0.2 s. ¿Cuál es la fuerza requerida?



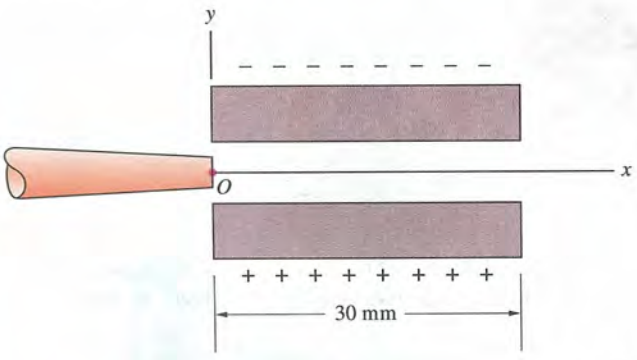
P5.13

5.14 En el Prob. 5.13, si el dispositivo hidráulico B ejerce una fuerza de magnitud $F = 540(1 + 0.4t)$ N sobre el paquete, donde t está en segundos medido desde el momento del primer contacto, ¿qué tiempo se requiere para llevar el paquete al reposo?

5.15 Un electrón (masa $= 9.11 \times 10^{-31}$ kg) entra en O a un tubo de rayos catódicos con velocidad $\mathbf{v} = (2.2 \times 10^7)\mathbf{i}$ (m/s). Mientras está entre las placas cargadas, el campo eléctrico generado por éstas lo somete a una fuerza $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}\mathbf{j}$. La carga del electrón es $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C (coulombs) y la intensidad del campo eléctrico es $E = 15\ \text{sen}(\omega t)$ kN/C, donde la frecuencia $\omega = 2 \times 10^9\ \text{s}^{-1}$.

(a) ¿Qué impulso ejerce el campo eléctrico sobre el electrón mientras éste se halla entre las placas?

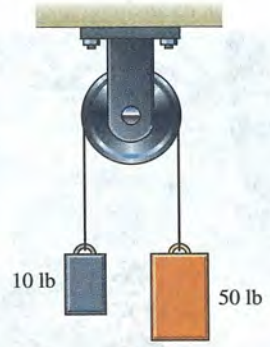
(b) ¿Cuál es la velocidad del electrón cuando sale de la región localizada entre las placas?



P5.15

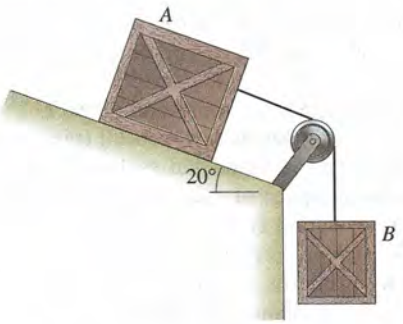
5.16 Los dos pesos mostrados se liberan del reposo. ¿Cuál es la magnitud de sus velocidades después de medio segundo?

Estrategia: Aplique por separado el principio del impulso y la cantidad de movimiento a cada peso.



P5.16

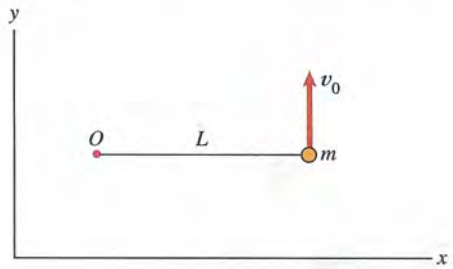
5.17 Las dos cajas de la Fig. P5.17 se liberan del reposo. Sus masas son $m_A = 40$ kg y $m_B = 30$ kg, y el coeficiente de fricción cinética entre la caja A y la superficie inclinada es $\mu_k = 0.15$. ¿Cuál es la magnitud de sus velocidades después de 1 s?



P5.17

5.18 En el Ej. 5.1, si el cohete se destruye 1 s después de que empieza a girar, ¿cuál es su velocidad en el momento en que es destruido?

5.19 Un cuerpo de masa m se desliza con velocidad constante v_0 sobre una mesa horizontal (vista desde arriba en la figura). El cuerpo está unido con una cuerda al punto fijo O y se halla en la posición mostrada, con la cuerda paralela al eje x, en $t = 0$.
(a) Determine las componentes x y y de la fuerza ejercida sobre la masa por la cuerda en función del tiempo.
(b) Use los resultados de la parte (a) y el principio del impulso y la cantidad de movimiento para determinar el vector velocidad de la masa cuando ésta ha recorrido un cuarto de vuelta alrededor del punto O.



P5.19

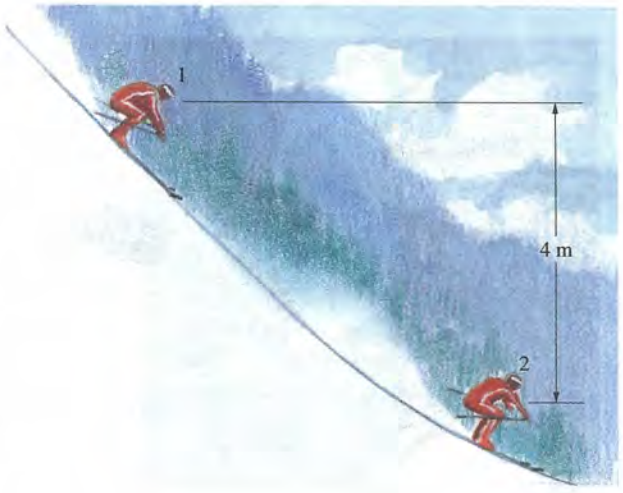
5.20 En $t = 0$, a un proyectil de 50 lb se le da una velocidad inicial de 40 pie/s a 60° sobre la horizontal. Ignore la fuerza de arrastre.
(a) ¿Qué impulso se aplica al proyectil entre $t = 0$ y $t = 2$ s?
(b) ¿Cuál es la velocidad del proyectil en $t = 2$ s?

5.21 Un cañón sobre rieles, que usa un campo electromagnético para acelerar un cuerpo, acelera un proyectil de 30 g a 5 km/s en 0.0005 s. ¿Qué fuerza media ejerce sobre el proyectil?

5.22 La lancha mostrada viaja a 50 mi/h cuando su motor se apaga. En 5 s su velocidad disminuye a 30 mi/h. La lancha y sus pasajeros pesan 1800 lb. Determine la magnitud de la fuerza media ejercida sobre la lancha por las fuerzas de arrastre hidrodinámica y aerodinámica durante los 5 s.

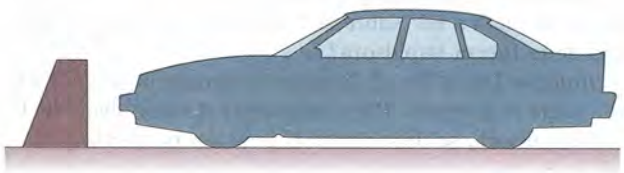
P5.22

5.23 Un esquiador de 77 kg desciende a 10 m/s en 1 y tarda 0.7 s en ir de 1 a 2.
(a) Si se ignoran la fricción y la resistencia aerodinámica, ¿cuál es el tiempo medio de la componente tangencial de la fuerza ejercida sobre él al pasar de 1 a 2?
(b) Si se mide su velocidad real en 2 y se encuentra que es de 13.1 m/s, ¿cuál es el tiempo medio de la componente tangencial de la fuerza ejercida sobre él al pasar de 1 a 2?



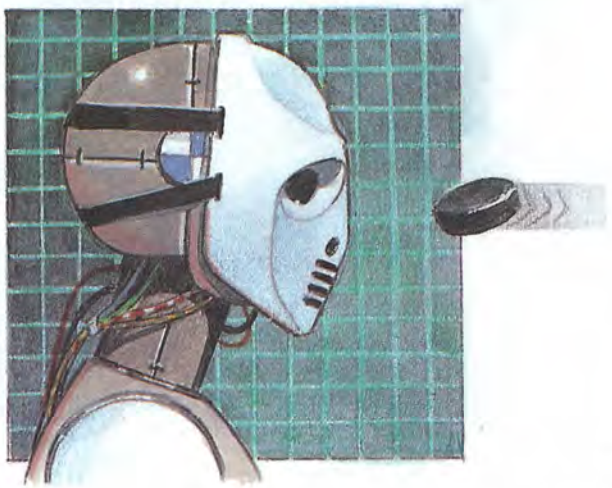
P5.23

5.24 En una prueba de una barrera antichoques, un automóvil de 2800 lb se estrella contra ésta a 5 mi/h. La duración del impacto es de 0.4 s y el automóvil rebota a 1 mi/h.
(a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza horizontal media ejercida sobre el automóvil durante el impacto?
(b) ¿Cuál es la desaceleración media del vehículo durante el impacto?



P5.24

5.25 A fin de probar una máscara protectora para porteros de hockey, se usa una máscara de plástico a la que se lanza el disco de 170 g horizontalmente a 40 m/s. Por las fotografías del impacto, se calcula que la duración de éste es de 0.02 s y que el disco rebota a 5 m/s.
(a) ¿Qué impulso lineal ejerce el disco?
(b) ¿Cuál es el valor medio de la fuerza impulsora ejercida sobre la máscara por el disco?



P5.25

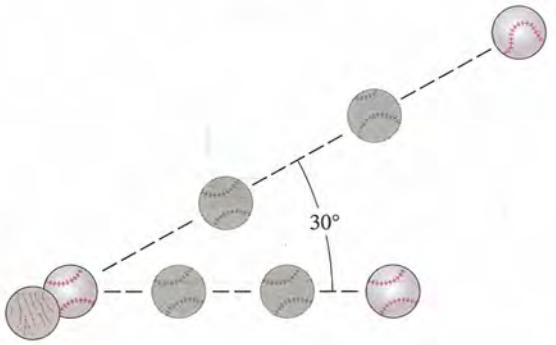
5.26 Un cuerpo frágil que cae sobre una superficie dura se rompe debido a que queda sometido a una gran fuerza impulsora. Si se deja caer un reloj de 2 onzas desde 4 pies, la duración del impacto es de 0.001 s y el reloj rebota 2 pulg sobre el piso; ¿qué valor medio tiene la fuerza impulsora?

5.27 Un proyectil de 50 lb está sometido a una fuerza impulsora con duración de 0.01 s que lo acelera del reposo a una velocidad de 40 pie/s a 60° sobre la horizontal. ¿Cuál es el valor medio de la fuerza impulsora?

Estrategia: Use la Ec. (5.2) para determinar la fuerza total media sobre el proyectil. Para determinar el valor medio de la fuerza impulsora, se debe restar el peso del proyectil.

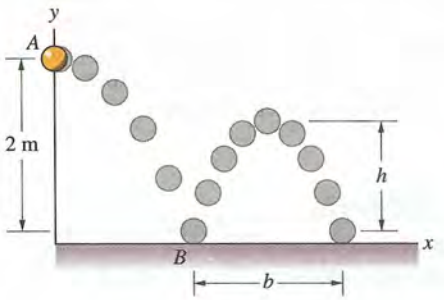
5.28 Se mide el movimiento de un insecto de 3 g durante su salto y se determina que acelera del reposo a 3.4 m/s en 25 milisegundos. El ángulo de despegue es de 55° sobre la horizontal. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza media impulsora ejercida por las patas traseras del insecto durante el salto?

5.29 Una bola de 5 onzas está a 3 pies sobre el terreno cuando es golpeada con un bate. La distancia horizontal al punto en que cae la pelota es de 180 pies. Los estudios fotográficos indican que la pelota se movía aproximadamente en dirección horizontal a 100 pie/s antes de ser golpeada; la duración del impacto fue de 0.015 s y la pelota viajó a 30° sobre la horizontal. ¿Cuál fue la magnitud de la fuerza impulsora media ejercida sobre la bola por el bate?



P5.29

5.30 La bola de 1 kg mostrada tiene una velocidad horizontal de 1.2 m/s en A. Las mediciones fotográficas indican que $b = 1.2$ m, $h = 1.3$ m y que la duración del rebote en B es de 0.1 s. ¿Cuáles son las componentes de la fuerza impulsora media ejercida sobre la bola por el piso en B?



P5.30

5.2 Conservación de la cantidad de movimiento lineal

Aquí consideramos los movimientos de varios cuerpos y mostramos que si las fuerzas externas pueden ignorarse, la cantidad de movimiento lineal total se conserva. Esto es muy útil para analizar interacciones entre cuerpos, como las colisiones, y nos permite determinar las fuerzas ejercidas sobre los cuerpos como resultado de la ganancia o pérdida de masa.

Consideremos los cuerpos A y B de la Fig. 5.5. $\mathbf{F}_{AB}$ es la fuerza ejercida sobre A por B y $\mathbf{F}_{BA}$ es la fuerza ejercida por A sobre B. Esas fuerzas podrían resultar del contacto entre los dos cuerpos, o podrían ser ejercidas por un resorte que los conectara. Como consecuencia de la tercera ley de Newton, esas fuerzas son iguales y opuestas:

$$\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} = 0. \tag{5.3}$$

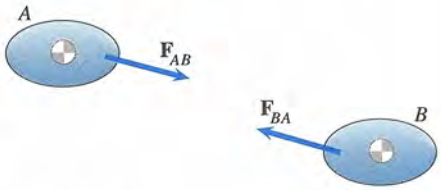


Figura 5.5
Dos cuerpos y las fuerzas que ejercen entre sí.

Suponga que ninguna otra fuerza externa actúa sobre A y B, o que otras fuerzas externas son insignificantes en comparación con las fuerzas que A y B ejercen entre sí. Podemos aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento a cada cuerpo durante tiempos arbitrarios t_1 y t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{AB}\, dt = m_A\mathbf{v}_{A2} - m_A\mathbf{v}_{A1},$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{BA}\, dt = m_B\mathbf{v}_{B2} - m_B\mathbf{v}_{B1}.$$

Al sumar estas ecuaciones los términos de la izquierda se cancelan y tenemos

$$m_A\mathbf{v}_{A1} + m_B\mathbf{v}_{B1} = m_A\mathbf{v}_{A2} + m_B\mathbf{v}_{B2},$$

esto es, la cantidad de movimiento lineal total de A y B se conserva:

$$\boxed{m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = \text{constante}.} \tag{5.4}$$

Podemos demostrar que la velocidad del centro de masa combinado de A y B (es decir, de A y B considerados como un solo cuerpo) también es constante. Sean $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ los vectores de posición de sus centros de masa individuales (Fig. 5.6). La posición del centro de masa combinado es

$$\mathbf{r} = \frac{m_A\mathbf{r}_A + m_B\mathbf{r}_B}{m_A + m_B}.$$

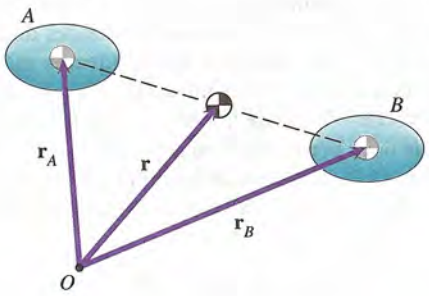


Figura 5.6
Vector de posición $\mathbf{r}$ del centro de masa de A y B.

Derivando respecto al tiempo esta ecuación, obtenemos

$$(m_A + m_B)\mathbf{v} = m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = \text{constante}, \tag{5.5}$$

donde $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad del centro de masa combinado. Si bien el objetivo por lo general consistirá en determinar los movimientos de los cuerpos aislados, saber que la velocidad del centro de masa combinado es constante contribuye al mejor entendimiento del problema, y en algunos casos el movimiento del centro de masa combinado puede ser la única información disponible.

Aun cuando haya fuerzas externas que actúen sobre A y B, si las fuerzas externas son insignificantes en una dirección particular, las Ecs. (5.4) y (5.5) son aplicables en esa dirección. Estas ecuaciones también se aplican a un número arbitrario de cuerpos: si las fuerzas externas que actúan sobre cualquier conjunto de cuerpos son insignificantes, la cantidad de movimiento lineal total de los cuerpos se conserva y la velocidad de sus centros de masa es constante.

En los siguientes ejemplos demostramos el uso de las Ecs. (5.4) y (5.5) en el análisis del movimiento de cuerpos. Cuando se conocen las posiciones y velocidades iniciales de los cuerpos y se pueden ignorar las fuerzas externas, esas ecuaciones relacionan sus posiciones y velocidades en cualquier tiempo posterior.

Ejemplo 5.3

Una persona de masa m_P está de pie en el centro de una barcaza de masa m_B que se encuentra en reposo (Fig. 5.7). Ignore las fuerzas horizontales ejercidas sobre la barcaza por el agua.

(a) Si la persona corre hacia la derecha con velocidad v_P respecto al agua, ¿cuál es la velocidad resultante de la barcaza respecto al agua?

(b) Si la persona se detiene cuando llega al extremo derecho de la barcaza, ¿cuales son su posición y la de la barcaza respecto a sus posiciones originales?

Figura 5.7

ESTRATEGIA

(a) Las únicas fuerzas horizontales ejercidas sobre la persona y la barcaza son las que ellas ejercen entre sí. Por tanto, sus cantidades de movimiento lineal total *en la dirección horizontal* se conservan y podemos usar la Ec. (5.4) para determinar la velocidad de la barcaza mientras la persona está corriendo.

(b) El centro de masa combinado de la persona y la barcaza está inicialmente en reposo, por lo que debe permanecer en reposo. Conociendo la posición del centro de masa combinado, podemos determinar las posiciones de la persona y la barcaza cuando la primera se halla en el extremo derecho de la barcaza.

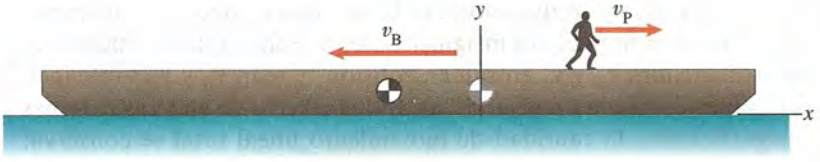
SOLUCIÓN

(a) Antes de que la persona empiece a correr, la cantidad de movimiento lineal total de la persona y la barcaza en la dirección horizontal es cero, por lo que debe ser cero después de que aquélla comience a correr. Si v_B es el valor de la velocidad de la barcaza *hacia la izquierda* mientras la persona está corriendo (Fig. a), obtenemos

$$m_P v_P + m_B(-v_B) = 0,$$

por lo que la velocidad de la barcaza es

$$v_B = \left(\frac{m_P}{m_B}\right) v_P.$$



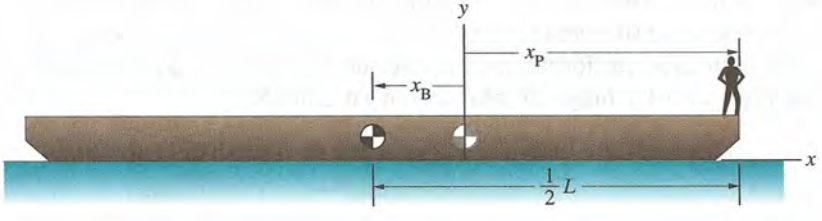
(a) Velocidades de la persona y la barcaza.

(b) Sea el origen del sistema coordenado en la Fig. (b) la posición horizontal original de los centros de masa de la barcaza y la persona, y sea x_B la posición del centro de masa de la barcaza *a la izquierda del origen*. Cuando la persona se ha detenido en el extremo derecho de la barcaza, el centro de masa combinado debe estar aún en $x = 0$:

$$\frac{x_P m_P + (-x_B)m_B}{m_P + m_B} = 0.$$

Resolviendo esta ecuación junto con la relación $x_p + x_B = L/2$, obtenemos

$$x_P = \frac{m_B L}{2(m_P + m_B)}, \qquad x_B = \frac{m_P L}{2(m_P + m_B)}.$$



(b) Posiciones después de que la persona se detiene.

COMENTARIO

Este ejemplo es una buena ilustración de la fuerza que tienen los métodos basados en la cantidad de movimiento. Observe que fuimos capaces de determinar la velocidad de la barcaza y las posiciones finales de ésta y la persona aun cuando no conocíamos la complicada dependencia respecto al tiempo de las fuerzas horizontales que se ejercían entre sí.

5.3 *Impactos*

En máquinas de estampado o de forja, los troqueles se impactan contra las piezas de trabajo. Las impresoras mecánicas crean imágenes impactando elementos metálicos contra papel y placas. Hay vehículos que se impactan intencionalmente, como los vagones de ferrocarril, y otros de manera accidental. Los impactos ocurren en muchas situaciones de interés para la ingeniería. Aquí veremos un asunto básico: si se conocen las velocidades de dos cuerpos antes de que choquen, ¿cómo cambiarán después de la colisión? Es decir, ¿cómo afecta el impacto sus movimientos?

Si los cuerpos que chocan no están sujetos a fuerzas externas, sus cantidades de movimiento lineal total deben ser las mismas antes y después del impacto. Aun cuando estén sujetos a fuerzas externas, el impacto es a menudo tan fuerte y su duración tan breve, que el efecto en sus movimientos durante el impacto es insignificante. Suponga que los cuerpos A y B con velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ entran en colisión, y sean $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ sus velocidades después del impacto (Fig. 5.8a). Si los efectos de fuerzas externas son insignificantes, la cantidad de movimiento lineal total se conserva:

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B. \tag{5.6}$$

Además, la velocidad $\mathbf{v}$ de su centro de masa es la misma antes y después del impacto. De la Ec. (5.5),

$$\mathbf{v} = \frac{m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B}{m_A + m_B}. \tag{5.7}$$

Si A y B se adhieren y permanecen juntos después de la colisión, se dice que sufren un **impacto perfectamente plástico**. La Ec. (5.7) da la velocidad del centro de masa del cuerpo que ellos forman después del impacto (Fig. 5.8b). Un aspecto notable de este resultado es que se puede determinar la velocidad posterior al impacto *sin considerar la naturaleza física del impacto*.

Si A y B no se adhieren, la mera conservación de la cantidad de movimiento lineal no es suficiente para determinar sus velocidades después del impacto. Primero consideraremos el caso en que viajan a lo largo de la misma recta antes y luego de que entren en colisión.

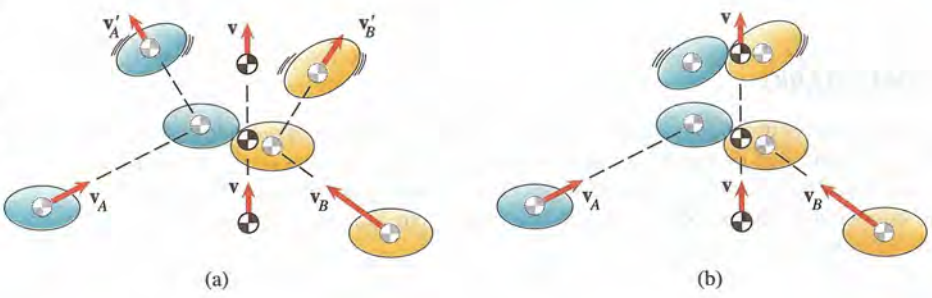


Figura 5.8
(a) Velocidades de A y B antes y después de impacto y velocidad $\mathbf{v}$ de sus centros de masa. (b) Impacto perfectamente plástico.

Impactos centrales directos

Supongamos que los centros de masa de A y B viajan a lo largo de la misma recta con velocidades v_A y v_B antes de su impacto (Fig. 5.9a). Sea R la magnitud de la fuerza que ejercen entre sí durante el impacto (Fig. 5.9b). Suponemos que las superficies que chocan están orientadas de manera que R es paralela a la línea en la que viajan y que está dirigida hacia sus centros de masa. Esta condición, llamada **impacto central directo**, significa que pueden seguir viajando en la misma recta después del impacto (Fig. 5.9c). Si los efectos de las fuerzas externas durante el impacto se pueden ignorar, su cantidad de movimiento lineal total se conserva:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B. \tag{5.8}$$

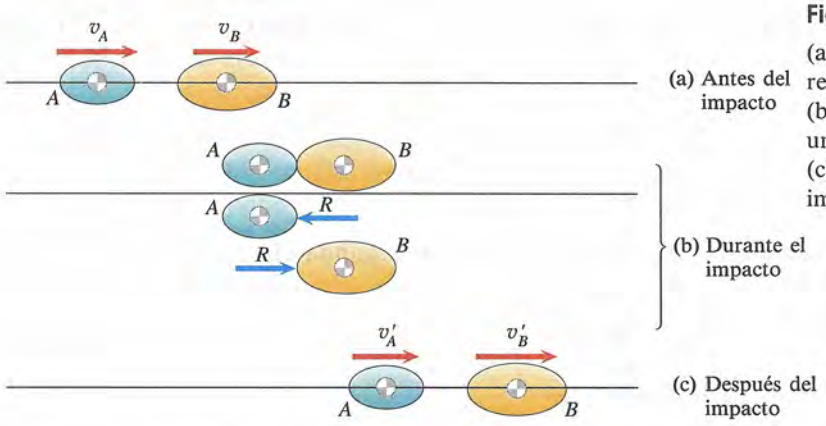


Figura 5.9
(a) Cuerpos A y B que recorren la misma recta.
(b) Durante el impacto, ejercen entre sí una fuerza R.
(c) Recorren la misma recta después de su impacto central.

Sin embargo, necesitamos otra ecuación para determinar las velocidades v'_A y v'_B. Para obtenerla debemos considerar el impacto con mayor detalle.

Sea t_1 el tiempo en que A y B entran por primera vez en contacto (Fig. 5.10a). Como resultado del impacto, primero se deforman y sus centros de masa continúan acercándose uno al otro. En un tiempo t_C, sus centros de masa habrán alcanzado su máxima proximidad (Fig. 5.10b). En este tiempo la velocidad relativa de los dos centros de masa es cero, por lo que ambos tendrán la misma velocidad. La denotamos con v_C. Los cuerpos comienzan a separarse en un tiempo t_2 (Fig. 5.10c). Aplicamos el principio del impulso y la cantidad de movimiento a A durante los intervalos de tiempo de t_1 al tiempo de máxima proximidad t_C y también de t_C a t_2:

$$\int_{t_1}^{t_C} -R\,dt = m_A v_C - m_A v_A, \tag{5.9}$$

$$\int_{t_C}^{t_2} -R\,dt = m_A v'_A - m_A v_C. \tag{5.10}$$

Luego aplicamos este principio a B en los mismos intervalos de tiempo:

$$\int_{t_1}^{t_C} R\,dt = m_B v_C - m_B v_B, \tag{5.11}$$

$$\int_{t_C}^{t_2} R\,dt = m_B v'_B - m_B v_C. \tag{5.12}$$

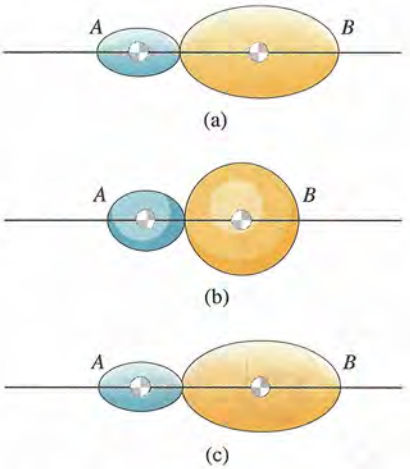


Figura 5.10
(a) Primer contacto, $t = t_1$.
(b) Acercamiento más próximo, $t = t_C$.
(c) Fin del contacto, $t = t_2$.

Como resultado del impacto, parte de la energía cinética de los cuerpos puede perderse debido a una variedad de mecanismos, incluidos la deformación permanente y la generación de calor y sonido. Como consecuencia de esto, el impulso que se imparten entre sí durante la fase de "restitución" del impacto de t_C a t_2 es, en general, menor que el impulso que se imparten de t_1 a t_C. La razón de esos impulsos se llama **coeficiente de restitución**:

$$e = \frac{\int_{t_C}^{t_2} R\,dt}{\int_{t_1}^{t_C} R\,dt}. \tag{5.13}$$

Su valor depende de las propiedades de los cuerpos y de sus velocidades y orientaciones al chocar, y se puede determinar sólo mediante experimentos o por un análisis detallado de las deformaciones durante el impacto.

Si dividimos la Ec. (5.10) entre la Ec. (5.9) y dividimos la Ec. (5.12) entre la Ec. (5.11), podemos expresar las ecuaciones resultantes en las formas

$$(v_C - v_A)e = v'_A - v_C,$$

$$(v_C - v_B)e = v'_B - v_C.$$

Restando la primera ecuación de la segunda obtenemos

$$\boxed{e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}}. \tag{5.14}$$

Así, el coeficiente de restitución se relaciona de manera sencilla con las velocidades relativas de los cuerpos antes y después del impacto. Si se conoce e, se puede usar la Ec. (5.14) junto con la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento lineal, Ec. (5.8), para determinar v'_A y v'_B.

Si $e = 0$, la Ec. (5.14) indica que $v'_B = v'_A$. Los cuerpos permanecen juntos después del impacto, y éste es perfectamente plástico. Si $e = 1$, se puede demostrar que la energía cinética total no cambia por el impacto:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A (v'_A)^2 + \frac{1}{2}m_B (v'_B)^2 \quad \text{(Cuando } e = 1\text{)}.$$

Un impacto en el que se conserva la energía cinética se denomina **perfectamente elástico**. Aunque ésta es a veces una útil aproximación, en cualquier impacto entre cuerpos materiales siempre se pierde energía. Si se puede oír un choque, la energía cinética se ha convertido en sonido. Las deformaciones permanentes y las vibraciones de los cuerpos en colisión después del impacto también representan pérdidas de energía cinética.

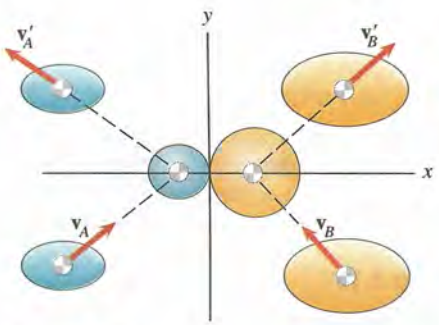


Figura 5.11
Impacto central oblicuo.

Impactos centrales oblicuos

El procedimiento empleado para analizar los impactos centrales se puede extender al caso en que los cuerpos se aproximen entre sí con un ángulo oblicuo. Supongamos que A y B se aproximan con velocidades arbitrarias $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ (Fig. 5.11) y que las fuerzas que ejercen entre sí durante su impacto son paralelas al eje x y apuntan hacia sus centros de masa. Ninguna

fuerza se ejerce sobre ellos en las direcciones y o z, por lo que sus velocidades en esas direcciones no cambian con el impacto:

$$(\mathbf{v}'_A)_y = (\mathbf{v}_A)_y, \qquad (\mathbf{v}'_B)_y = (\mathbf{v}_B)_y,$$
$$(\mathbf{v}'_A)_z = (\mathbf{v}_A)_z, \qquad (\mathbf{v}'_B)_z = (\mathbf{v}_B)_z. \tag{5.15}$$

En la dirección x se conserva la cantidad de movimiento,

$$m_A(\mathbf{v}_A)_x + m_B(\mathbf{v}_B)_x = m_A(\mathbf{v}'_A)_x + m_B(\mathbf{v}'_B)_x, \tag{5.16}$$

y por el mismo análisis que usamos para obtener la Ec. (5.14), las componentes x de la velocidad satisfacen la relación

$$e = \frac{(\mathbf{v}'_B)_x - (\mathbf{v}'_A)_x}{(\mathbf{v}_A)_x - (\mathbf{v}_B)_x}. \tag{5.17}$$

Si la fricción es insignificante, podemos analizar un impacto en el que A choca con un cuerpo en reposo, por ejemplo una pared (Fig. 5.12), como un impacto central oblicuo. Las componentes y y z de la velocidad de A no cambian y la componente x después del impacto está dada por la Ec. (5.17) con la velocidad de B igual a cero:

$$(\mathbf{v}'_A)_x = -e(\mathbf{v}_A)_x.$$

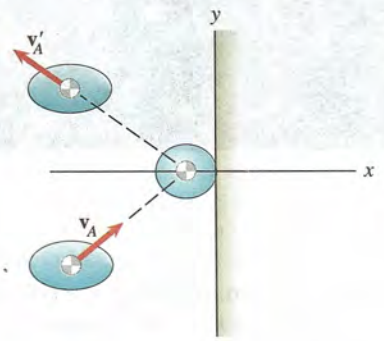


Figura 5.12
Impacto con un cuerpo en reposo.

En el siguiente ejemplo analizamos el impacto de dos cuerpos. Si un impacto es perfectamente plástico, lo cual significa que los cuerpos se adhieren y permanecen juntos, podemos determinar con la Ec. (5.7) la velocidad de sus centros de masa después del impacto. En un impacto central directo, en el sistema coordenado que aparece en la Fig. 5.11, las componentes y y z de las velocidades de los cuerpos no cambian y las Ecs. (5.16) y (5.17) se pueden resolver para las componentes x de las velocidades después del impacto.

Ejemplo 5.4

El CSM Apolo (A) intenta acoplarse con la cápsula Soyuz (B) (15 de julio de 1975) (Fig. 5.13). Sus masas son $m_A = 18$ Mg y $m_B = 6.6$ Mg. El Soyuz está en reposo respecto al marco de referencia mostrado, y el CSM se aproxima con velocidad $\mathbf{v}_A = 0.2\mathbf{i} + 0.03\mathbf{j} - 0.02\mathbf{k}$ (m/s).

(a) Si el primer intento de acoplamiento tiene éxito, ¿cuál es la velocidad del centro de masa de los dos vehículos combinados?

(b) Si el primer intento no tiene éxito y el coeficiente de restitución del impacto resultante es $e = 0.95$, ¿cuáles son las velocidades de los dos vehículos después del impacto?

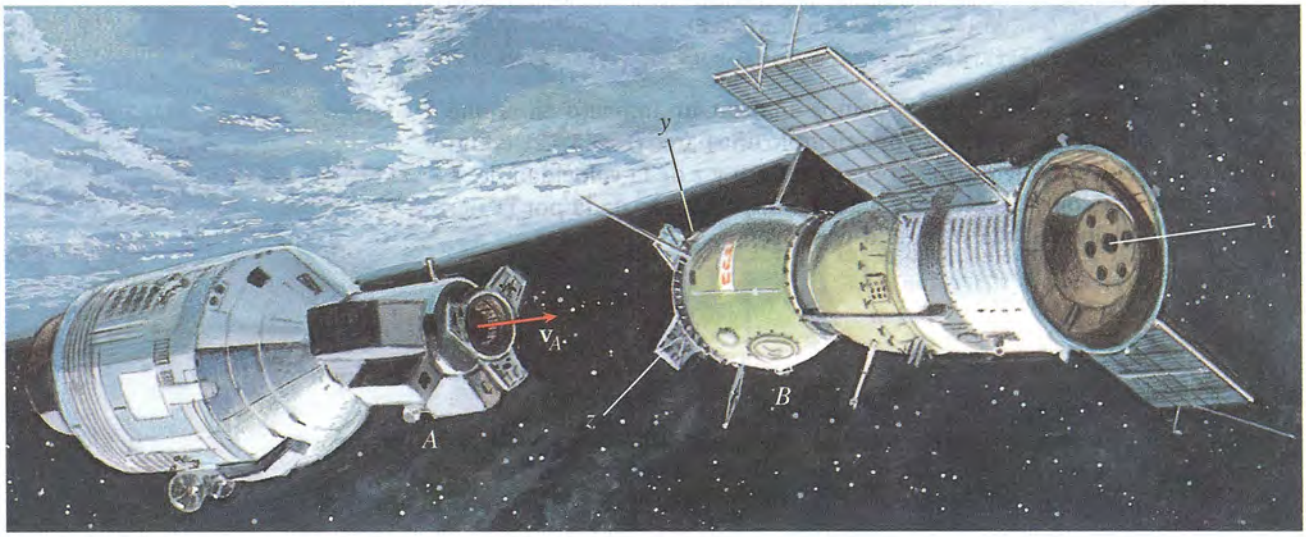


Figura 5.13

ESTRATEGIA

(a) Si el acoplamiento tuvo éxito, el impacto es perfectamente plástico y podemos usar la Ec. (5.7) para determinar la velocidad del centro de masa de los vehículos combinados después del impacto.

(b) Suponiendo un impacto central oblicuo con las fuerzas ejercidas por los cuellos de acoplamiento paralelos al eje x, podemos usar las Ecs. (5.16) y (5.17) para determinar las velocidades de ambos vehículos después del impacto.

SOLUCIÓN

(a) Según la Ec. (5.7), la velocidad del centro de masa de los vehículos combinados es

$$\mathbf{v} = \frac{m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{(18)(0.2\,\mathbf{i} + 0.03\,\mathbf{j} - 0.02\,\mathbf{k}) + 0}{18 + 6.6}$$

$$= 0.146\,\mathbf{i} + 0.022\,\mathbf{j} - 0.015\,\mathbf{k} \text{ (m/s)}.$$

(b) Las componentes y y z de las velocidades de ambos vehículos no cambian. Para determinar las componentes x, usamos la conservación de la cantidad de movimiento lineal, Ec. (5.16),

$$m_A(\mathbf{v}_A)_x + m_B(\mathbf{v}_B)_x = m_A(\mathbf{v}'_A)_x + m_B(\mathbf{v}'_B)_x,$$

$$(18)(0.2) = (18)(\mathbf{v}'_A)_x + (6.6)(\mathbf{v}'_B)_x,$$

y el coeficiente de restitución, Ec. (5.17),

$$e = \frac{(\mathbf{v}'_B)_x - (\mathbf{v}'_A)_x}{(\mathbf{v}_A)_x - (\mathbf{v}_B)_x},$$

$$0.95 = \frac{(\mathbf{v}'_B)_x - (\mathbf{v}'_A)_x}{0.2 - 0}.$$

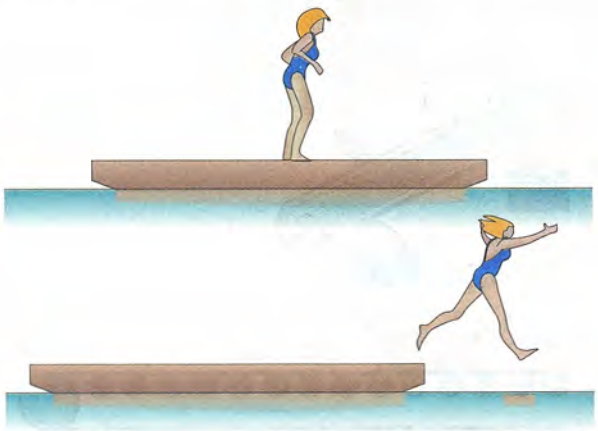
Resolviendo estas dos ecuaciones, obtenemos $(\mathbf{v}'_A)_x = 0.095$ (m/s) y $(\mathbf{v}'_B)_x = 0.285$ (m/s), por lo que las velocidades de los vehículos espaciales después del impacto son

$$\mathbf{v}'_A = 0.095\,\mathbf{i} + 0.03\,\mathbf{j} - 0.02\,\mathbf{k} \text{ (m/s)},$$

$$\mathbf{v}'_B = 0.285\,\mathbf{i} \text{ (m/s)}.$$

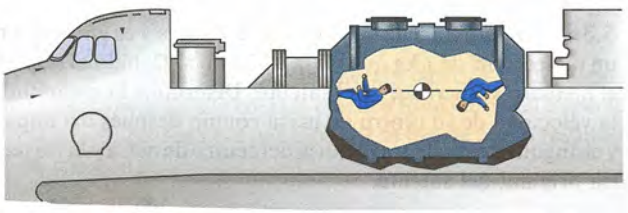
Problemas

5.31 Una joven que pesa 100 lb está de pie en reposo en una barcaza que pesa 500 lb. Empieza a correr a 10 pie/s *respecto a la barcaza* y al llegar al extremo salta al agua. Ignore la fuerza horizontal ejercida sobre la barcaza por el agua.
(a) Justo antes de que ella toque el agua, ¿cuál es la componente horizontal de su velocidad respecto al agua?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la barcaza respecto al agua mientras la joven corre?



P5.31

5.32 Un astronauta pesa 60 kg y se impulsa con los pies hacia el centro de masa del transbordador de 105 Mg a 1 m/s respecto a éste. Se desplaza 6 m antes de llegar al reposo en la pared opuesta.
(a) ¿Cuál es la magnitud del cambio de velocidad del transbordador durante este desplazamiento?
(b) ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento del centro de masa del transbordador debido a este recorrido?

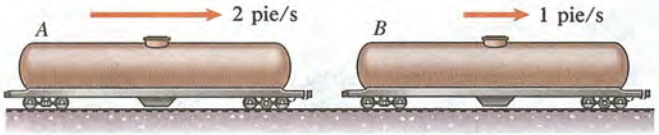


P5.32

5.33 Un joven que pesa 80 lb está sentado en un carro de 20 lb y quiere simular una propulsión de reacción lanzando ladrillos desde el carro. Ignore las fuerzas horizontales sobre las ruedas. Si tiene tres ladrillos de 10 lb cada uno y los lanza con una velocidad horizontal de 10 pie/s respecto al carro, determine la velocidad alcanzada (a) si lanza uno a la vez; (b) si los lanza juntos.

P5.33

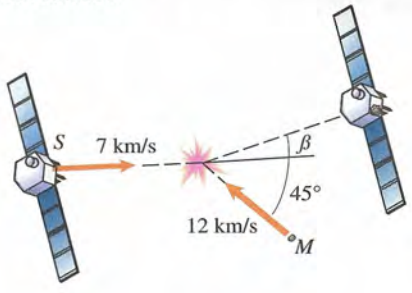
5.34 Dos vagones de ferrocarril ($m_A = 1.7\ m_B$) chocan y quedan acoplados. El carro A está lleno y el B semilleno de ácido. Por el choque, el ácido en B se agita con violencia.
(a) Inmediatamente después del impacto, ¿cuál es la velocidad del centro común de masa de los dos vagones?
(b) Unos pocos segundos después, cuando ha cesado la agitación, ¿cuál es la velocidad de los dos vagones?



P5.34

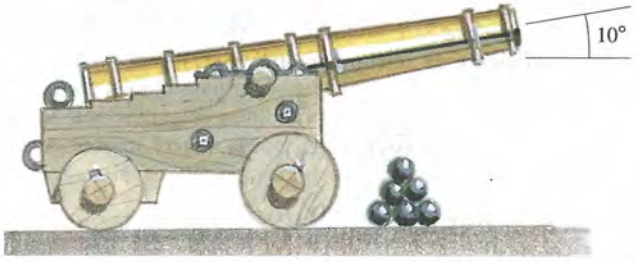
5.35 En el Prob. 5.34, si la vía tiene una pendiente de medio grado hacia arriba a la derecha y los carros están inicialmente separados a 10 pies, ¿cuál es la velocidad de su centro común de masa inmediatamente después del impacto?

5.36 Un satélite S de 400 kg viaja a 7 km/s y es golpeado por un meteoro M de 1 kg que viaja a 12 km/s. Debido al impacto, el meteoro se incrusta en el satélite. Determine la magnitud de la velocidad de su centro de masa común después del impacto y el ángulo β entre la trayectoria del centro de masa y la trayectoria original del satélite.



P5.36

5.37 El cañón de 400 lb mostrado disparó un proyectil de 10 lb con una velocidad de 200 pie/s en la boca. Para el ángulo de elevación de 10° mostrado, determine (a) la velocidad del cañón después del disparo; (b) la distancia que recorre el proyectil (ignore la resistencia del aire).



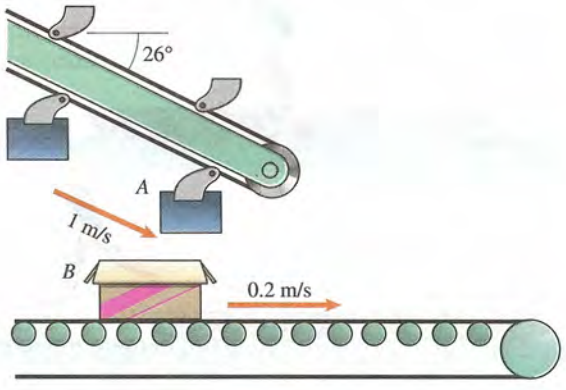
P5.37

5.38 Una bala (masa m) golpea un bloque de madera en reposo (masa m_B) y se incrusta en él. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el piso es μ_k. Como resultado del impacto, el bloque se desliza una distancia D antes de detenerse. ¿Qué velocidad tenía la bala?

Estrategia: Primero resuelva el problema de impacto para determinar la velocidad del bloque y la bala incrustada después del impacto en términos de v y luego relacione la velocidad inicial del bloque y la bala en su interior con la distancia D que ambos se deslizan.

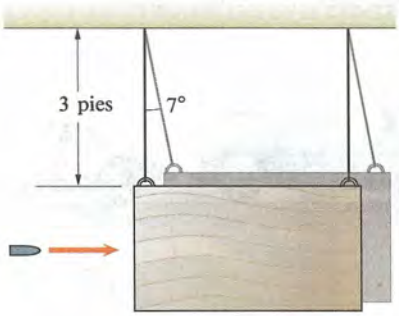
P5.38

5.39 En la Fig. P5.39, la banda transportadora deja caer el paquete A de 12 kg en la caja B de 1.6 kg. El paquete es "pegajoso" y se adhiere al fondo de la caja. Si el coeficiente de fricción entre la caja y la banda horizontal es $\mu_k = 0.2$, ¿qué distancia resbala la caja después del impacto?



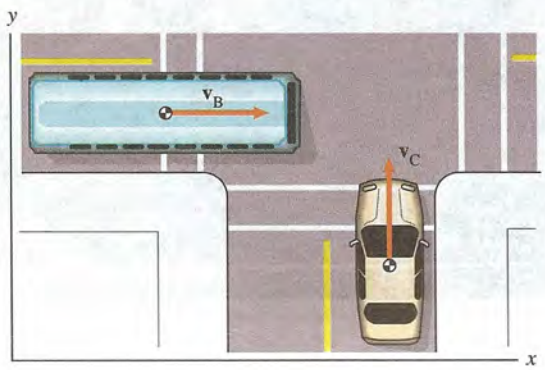
P5.39

5.40 Una bala de 1 onza con trayectoria horizontal golpea un bloque colgante de madera de 100 lb y se incrusta en él. Si el ángulo que los alambres de los que cuelga el bloque oscilaron a través de un ángulo de 7° como consecuencia del impacto, ¿cuál era la velocidad de la bala?



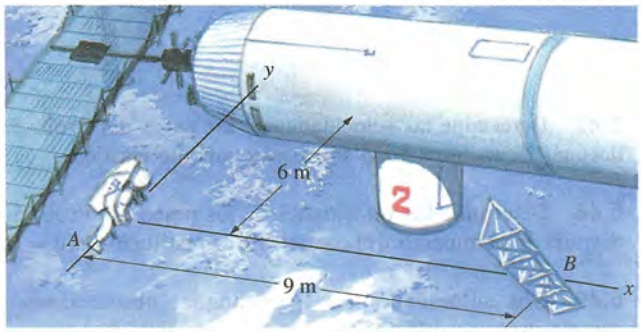
P5.40

5.41 Suponga que se está investigando un accidente en el que un automóvil de 3000 lb con velocidad $\mathbf{v}_C = 20\mathbf{j}$ mi/h chocó con un autobús de 12 000 lb con velocidad $\mathbf{v}_B = 10\mathbf{i}$ (mi/h). Los vehículos quedaron trabados y permanecieron juntos después de la colisión.
(a) ¿Cuál fue la velocidad del centro de masa común de los vehículos después de la colisión?
(b) Si el coeficiente de fricción entre los vehículos deslizantes y el camino después de la colisión es $\mu_k = 0.4$, ¿cuál es la posición final aproximada del centro de masa común respecto a su posición cuando ocurrió el impacto?



P5.41

5.42 En Fig. P5.42, la velocidad del astronauta A de 100 kg respecto a la estación espacial es $40\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$ (mm/s). La velocidad del elemento estructural B de 200 kg respecto a la estación es $-20\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$ (mm/s). Cuando se aproximan uno al otro, el astronauta se sujeta del elemento estructural y permanece junto a él.
(a) Determine la velocidad de su centro de masa común cuando llegan a la estación.
(b) Determine la posición aproximada en la que entran en contacto con la estación.



P5.42

5.43 En la Fig. P5.53, los cuerpos A y B con la misma masa m sufren un impacto central directo. La velocidad de A antes del impacto es v_A, mientras que B está en reposo. Determine las velocidades de A y B después del impacto si éste es (a) perfectamente plástico ($e = 0$); (b) perfectamente elástico ($e = 1$).

P5.43

5.44 En el Prob. 5.43, si la velocidad de B después del impacto es $0.6v_A$, determine el coeficiente de restitución e y la velocidad de A después del impacto.

5.45 En la Fig. P5.45, los cuerpos A y B con masas m_A y m_B sufren un impacto central directo.
(a) Si $e = 1$, demuestre que la energía cinética total después del impacto es igual a la energía cinética total antes del impacto.
(b) Si $e = 0$, ¿cuánta energía cinética se pierde como resultado de la colisión?

P5.45

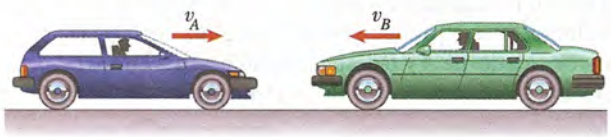
5.46 Dos pesos de 10 lb se deslizan sobre la barra horizontal lisa. Determine sus velocidades después de que chocan si los pesos están recubiertos con velcro y se quedan pegados.

P5.46

5.47 Determine las velocidades de los pesos del Prob. 5.46 después de su impacto si son perfectamente elásticos.

5.48 Determine las velocidades de los pesos del Prob. 5.46 después de su impacto si el coeficiente de restitución es $e = 0.8$.

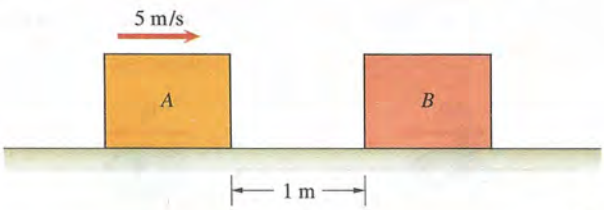
5.49 Dos automóviles con parachoques absorbedores de energía chocan a velocidades $v_A = v_B = 5$ mi/h. Sus pesos son $W_A = 2800$ lb y $W_B = 4400$ lb. Si el coeficiente de restitución es $e = 0.2$, ¿cuáles son las velocidades de los automóviles después de la colisión?



P5.49

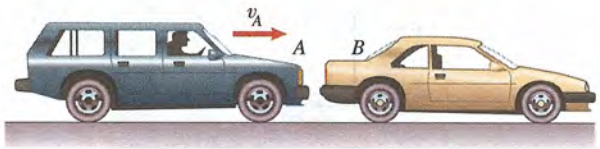
5.50 En el Prob. 5.49, si la duración de la colisión es de 0.1 s, ¿cuáles son las magnitudes de la aceleración media a la que quedan sometidos los ocupantes de los dos automóviles?

5.51 La masa A de 10 kg mostrada se mueve a 5 m/s cuando está a 1 m de la masa B de 10 kg en reposo. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y las dos masas es $\mu_k = 0.6$ y el coeficiente de restitución del impacto es $e = 0.5$. Determine cuánto se desplaza B desde su posición inicial a consecuencia del impacto.



P5.51

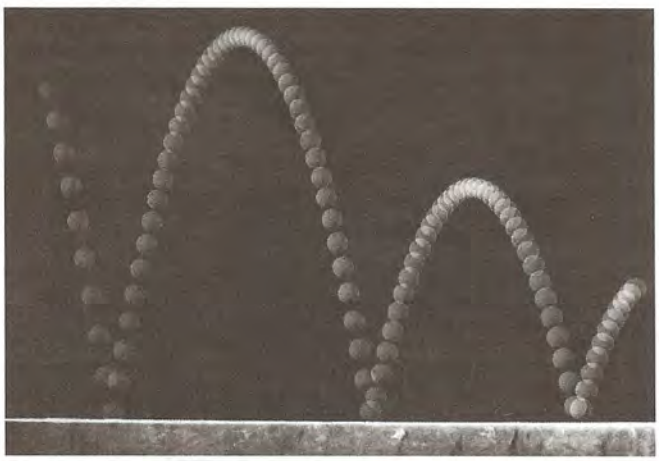
5.52 En la Fig. P5.52, el auto A de 1300 kg golpea el auto B de 1200 kg que se encuentra estacionado. Las cuatro ruedas de B estaban frenadas y las marcas de patinaje indican un resbalamiento de 2 m después del impacto. Si el coeficiente de fricción entre los neumáticos de B y el pavimento es $\mu_k = 0.8$ y $e = 0.4$, ¿cuál fue la velocidad de A justo antes del impacto? (Suponga que sólo ocurrió un impacto.)



P5.52

5.53 A 5 pies del suelo se deja caer una pelota, que rebota hasta una altura de 4 pies. Se vuelve a soltar a 3 pies del suelo, pero esta vez con una velocidad de 30 pie/s hacia abajo. ¿Qué altura alcanza el rebote?

5.54 Tomando medidas directamente de la fotografía de la pelota de golf rebotando, calcule el coeficiente de restitución.



P5.54

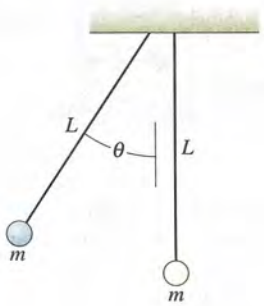
5.55 Si la pelota de golf del Prob. 5.54 se lanza horizontalmente a 2 pie/s y se suelta 4 pies arriba de la superficie, ¿cuál es la distancia entre los dos primeros rebotes?

5.56 Durante la prueba de diseño de un casco de 2.4 kg que contiene una cabeza de plástico de 2 kg, el casco es lanzado contra una superficie rígida a 6 m/s. La cabeza, suspendida dentro del casco, no es afectada inmediatamente por el impacto y continúa moviéndose hacia la derecha a 6 m/s, hasta que choca con el casco. Si el coeficiente de restitución del impacto del casco con la superficie es de 0.8 y el de la cabeza con el casco es de 0.2, ¿cuáles son las velocidades del casco y de la cabeza después de su interacción inicial?

P5.56

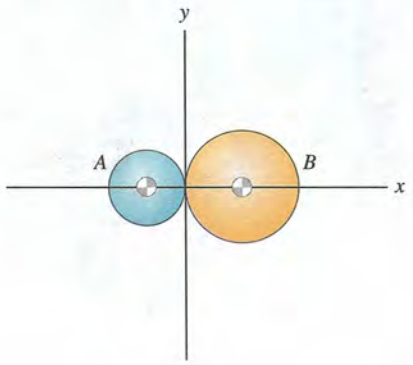
5.57 (a) En el Prob. 5.56, si la duración del impacto de la cabeza con el casco es de 0.008 s, ¿a qué fuerza media queda sometida la cabeza?
(b) Suponga que la cabeza sola golpea la superficie a 6 m/s, el coeficiente de restitución es 0.3 y la duración del impacto es de 0.002 s. ¿A qué fuerza media está sometida la cabeza?

5.58 Dos bolas pequeñas, cada una con masa m, cuelgan de cuerdas de longitud L. La bola izquierda se libera del reposo en la posición mostrada. Como resultado de la primera colisión, la bola derecha oscila a través de un ángulo β. Determine el coeficiente de restitución.



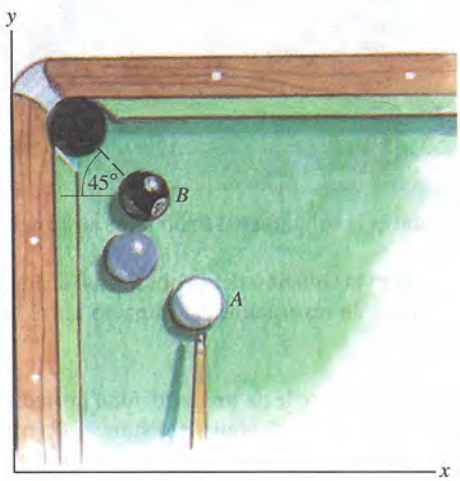
P5.58

5.59 Un cuerpo A de 1 slug y un cuerpo B de 2 slugs sufren un impacto central oblicuo. El coeficiente de restitución es $e = 0.8$. Antes del impacto, $\mathbf{v}_B = -10\mathbf{i}$ pie/s, y después del impacto, $\mathbf{v}'_A = -15\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ pie/s. Determine la velocidad de A antes del impacto y la velocidad de B después del impacto.



P5.59

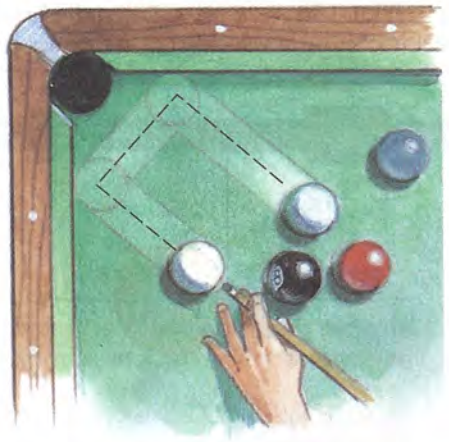
5.60 En Fig. P5.60, el taco da a la bola A una velocidad paralela al eje y, y la bola 8 entra en la buchaca. Si la magnitud de la velocidad de A justo antes del impacto con la 8 es de 2 m/s y $e = 1$, ¿cuáles son los vectores de velocidad de las dos bolas justo después del impacto? (Las bolas tienen masas iguales.)



P5.60

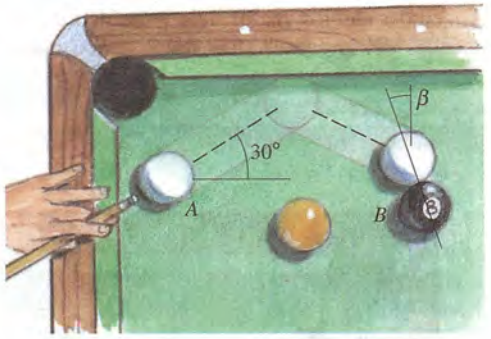
5.61 En el Prob. 5.60, ¿cuáles son los vectores de velocidad de las dos bolas inmediatamente después del impacto si el coeficiente de restitución es $e = 0.9$?

5.62 En la Fig. P5.62, si el coeficiente de restitución no varía, demuestre que la trayectoria de la bola blanca después de golpear dos barandas es paralela a su trayectoria original.



P5.62

5.63 En Fig. P5.63, el taco da a la bola blanca A una velocidad de 3 m/s. El ángulo $\beta = 0$ y el coeficiente de restitución de ella con la bola B es $e = 1$. Si la velocidad de B después del impacto es de 0.9 m/s, ¿cuál fue el coeficiente de restitución del impacto de A con la baranda? (Las bolas tienen masas iguales.)

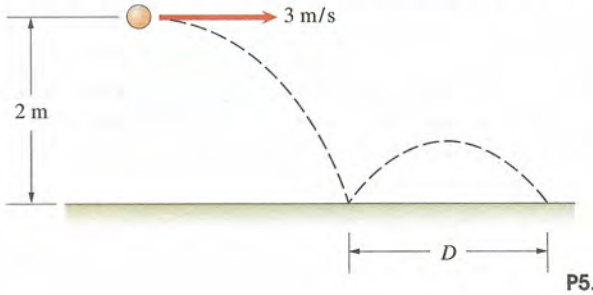


P5.63

5.64 ¿Cuál es la solución del Prob. 5.63 si el ángulo $\beta = 10°$?

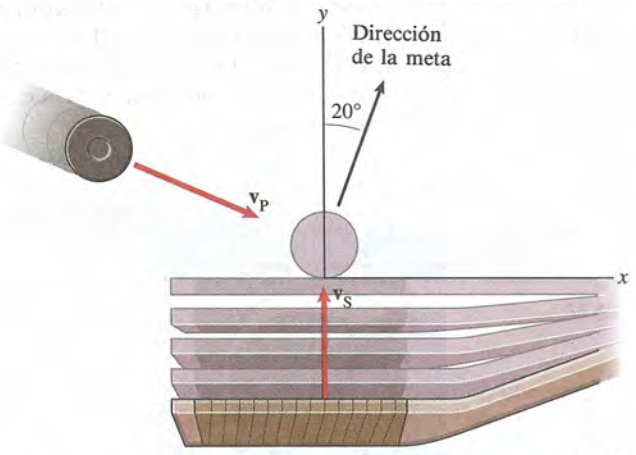
5.65 ¿Cuál es la solución del Prob. 5.63 si el ángulo $\beta = 15°$ y el coeficiente de restitución del impacto entre las dos bolas es $e = 0.9$?

5.66 A una pelota se le da una velocidad horizontal de 3 m/s a 2 m arriba del piso liso. Halle la distancia D entre su primer y segundo rebotes si el coeficiente de restitución es $e = 0.6$.



P5.66

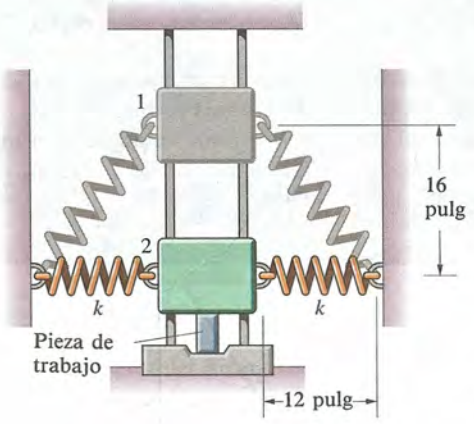
5.67 La velocidad del disco de hockey de 170 g es $\mathbf{v}_p = 10\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (m/s). Si se ignora el cambio en la velocidad $\mathbf{v}_S = v_S\mathbf{j}$ del bastón por el impacto y el coeficiente de restitución es $e = 0.6$, ¿qué valor debe tener v_S para enviar el disco hacia la meta?



P5.67

5.68 En el Prob. 5.67, si el bastón responde al impacto como un cuerpo con la misma masa que el disco y el coeficiente de restitución es $e = 0.6$, ¿qué valor debe tener v_S para enviar el disco a la meta?

5.69 En la Fig. P5.69, el peso de 100 lb se levanta hasta la posición 1 y luego se libera del reposo. Al caer golpea una pieza de trabajo en la posición 2. Si el peso se mueve a 15 pie/s inmediatamente antes del impacto y el coeficiente de restitución es $e = 0.3$, ¿cuál es su velocidad inmediatamente después?



P5.69

5.70 En el Prob. 5.69, suponga que la constante de resorte es $k = 120$ lb/pie, que los resortes no están estirados en la posición 2 y que el coeficiente de restitución es $e = 0.2$. Determine la velocidad del peso inmediatamente después del impacto.

5.71 En el Prob. 5.69, suponga que la constante de resorte es $k = 160$ lb/pie, que los resortes no están estirados en la posición 2 y que el peso rebota 3 pulg después del impacto. Encuentre el coeficiente de restitución.

5.4 Momento angular

Aquí obtenemos un resultado, análogo al principio del impulso y la cantidad de movimiento, que relaciona la integral respecto al tiempo de un momento con el cambio en una cantidad llamada momento angular. También obtenemos una útil ley de conservación: si el momento total debido a fuerzas externas sobre un cuerpo es cero, el momento angular se conserva.

Principio del impulso angular y del momento angular

Describimos la posición de un cuerpo con el vector de posición de su centro de masa respecto a un punto de referencia O (Fig. 5.14a). Recuerde que obtuvimos el principio del trabajo y la energía formando el producto escalar de la segunda ley de Newton con la velocidad. Aquí obtenemos otro útil resultado formando el producto vectorial de la segunda ley de Newton con el vector de posición. Esto nos da una relación entre el momento de las fuerzas externas respecto a O y el movimiento del cuerpo.

El producto vectorial de la segunda ley de Newton con $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{5.18}$$

Observe que la derivada respecto al tiempo de la cantidad $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ es

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v}\right)}_{=0} + \left(\mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right).$$

(El primer término es cero porque $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, y el producto vectorial de vectores paralelos es cero.) Con esto podemos escribir la Ec. (5.18) como

$$\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{H}_0}{dt}, \tag{5.19}$$

donde el vector

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{5.20}$$

se llama **momento angular** respecto a O (Fig. 5.14b). Si interpretamos el momento angular como el momento de la cantidad de movimiento lineal del cuerpo respecto a O, esta ecuación establece que el momento $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ es la razón de cambio del momento de la cantidad de movimiento respecto a O. Si el momento es cero durante un intervalo, $\mathbf{H}_0$ es constante.

Integrando la Ec. (5.19) respecto al tiempo obtenemos

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F})\, dt = (\mathbf{H}_0)_2 - (\mathbf{H}_0)_1.} \tag{5.21}$$

La integral de la izquierda se llama **impulso angular**, y esta ecuación

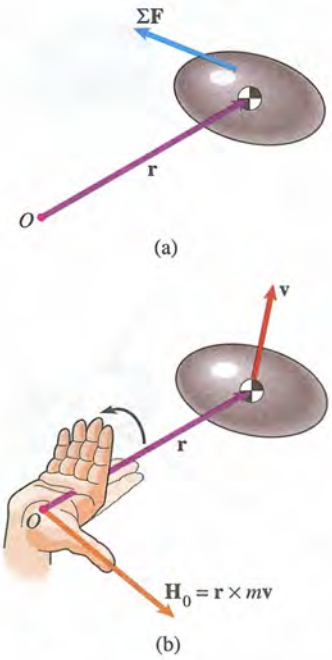


Figura 5.14
(a) Vector de posición y fuerza externa total sobre un cuerpo.
(b) Vector de momento angular y regla de la mano derecha para determinar su dirección.

se llama **principio del impulso angular y del momento angular**: el impulso angular aplicado a un cuerpo durante un intervalo de tiempo es igual al cambio en su momento angular. Si se conoce el momento $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ en función del tiempo, se puede determinar el cambio en el momento angular.

Movimiento bajo una fuerza central

Si la fuerza total que actúa sobre un cuerpo permanece dirigida hacia un punto fijo respecto a un marco de referencia inercial, se dice que el cuerpo se encuentra en **movimiento bajo una fuerza central**. El punto fijo se llama **centro del movimiento**. Los problemas de órbitas son los casos más familiares de movimientos bajo una fuerza central. Por ejemplo, la fuerza gravitatoria sobre un satélite de la Tierra permanece dirigida hacia el centro de la Tierra.

Si colocamos el punto de referencia O en el centro del movimiento (Fig. 5.15a), el vector de posición $\mathbf{r}$ es paralelo a la fuerza total, por lo que $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ es igual a cero. Por consiguiente, la Ec. (5.21) indica que en un movimiento bajo una fuerza central, el momento angular del cuerpo se conserva:

$$\mathbf{H}_0 = \text{constante}. \tag{5.22}$$

En un movimiento bajo una fuerza central plano podemos expresar $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ en coordenadas cilíndricas (Fig. 5.15b):

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r, \qquad \mathbf{v} = v_r\,\mathbf{e}_r + v_\theta\,\mathbf{e}_\theta.$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (5.20) obtenemos el momento angular:

$$\mathbf{H}_0 = (r\,\mathbf{e}_r) \times m(v_r\,\mathbf{e}_r + v_\theta\,\mathbf{e}_\theta) = mrv_\theta\,\mathbf{e}_z.$$

En esta expresión vemos que en un movimiento plano bajo una fuerza central, *el producto de la distancia radial desde el centro del movimiento y la componente transversal de la velocidad es constante*:

$$r\,v_\theta = \text{constante}. \tag{5.23}$$

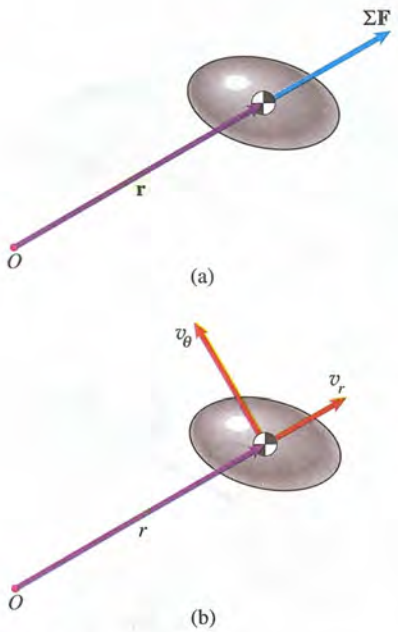


Figura 5.15

(a) Movimiento bajo una fuerza central. (b) Posición y velocidad en coordenadas cilíndricas.

En los siguientes ejemplos mostraremos cómo se puede usar el principio del impulso angular y la cantidad de movimiento, así como la conservación del momento angular, para analizar el movimiento de cuerpos. Si se conoce el momento $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ durante un intervalo de tiempo, se puede calcular el impulso angular y determinar el cambio en el momento angular de un cuerpo. En el movimiento bajo una fuerza central (la fuerza total que actúa sobre un cuerpo está dirigida hacia un punto O) sabemos que el momento angular respecto a O se conserva.

Ejemplo 5.5

Un disco de masa m unido a una cuerda se desliza sobre una mesa horizontal lisa bajo la acción de una fuerza transversal constante F (Fig. 5.16). La cuerda se jala a través de un agujero en O en la mesa a velocidad constante v_0. En $t = 0$, $r = r_0$ y la velocidad transversal del disco es cero. ¿Cuál es la velocidad del disco en función del tiempo?

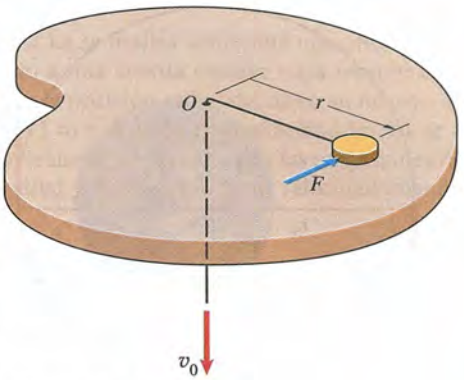


Figura 5.16

ESTRATEGIA

Expresando r en función del tiempo, podemos determinar el momento de las fuerzas respecto a O que actúan sobre el disco en función del tiempo. El momento angular del disco depende de su velocidad, por lo que podemos aplicar el principio del impulso y del momento angular para obtener información sobre su velocidad en función del tiempo.

SOLUCIÓN

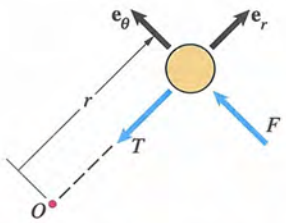
La posición radial en función del tiempo es $r = r_0 - v_0 t$. En términos de coordenadas polares (Fig. a), el momento respecto a O de las fuerzas sobre el disco es

$$\mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = r\mathbf{e}_r \times (-T\mathbf{e}_r + F\mathbf{e}_\theta) = F(r_0 - v_0 t)\mathbf{e}_z,$$

donde T es la tensión en la cuerda. El momento angular en el tiempo t es

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = r\,\mathbf{e}_r \times m(v_r\,\mathbf{e}_r + v_\theta\,\mathbf{e}_\theta)$$

$$= mv_\theta(r_0 - v_0 t)\,\mathbf{e}_z.$$



(a) El momento en coordenadas polares.

Sustituyendo estas expresiones en el principio del impulso y el momento angular, obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F})\,dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1:$$

$$\int_0^t F(r_0 - v_0 t)\,\mathbf{e}_z\,dt = mv_\theta(r_0 - v_0 t)\,\mathbf{e}_z - \mathbf{0}.$$

Evaluando la integral obtenemos la componente transversal de la velocidad en función del tiempo:

$$v_\theta = \frac{[r_0 t - (1/2)v_0 t^2]F}{(r_0 - v_0 t)m}.$$

La velocidad del disco en función del tiempo es

$$\mathbf{v} = -v_0\,\mathbf{e}_r + \frac{[r_0 t - (1/2)v_0 t^2]F}{(r_0 - v_0 t)m}\,\mathbf{e}_\theta.$$

Ejemplo 5.6

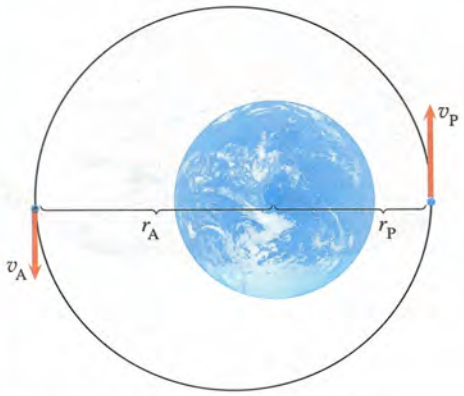


Figura 5.17

Cuando un satélite terrestre está en su perigeo (el punto en que se encuentra más cercano a la Tierra), la magnitud de su velocidad es $v_P = 7000$ m/s y su distancia al centro de la Tierra es $r_P = 10\,000$ km (Fig. 5.17). ¿Cuáles son las magnitudes de su velocidad v_A y de su distancia r_A al centro de la Tierra en su apogeo (el punto en que se encuentra más alejado de la Tierra)? El radio de la Tierra es $R_E = 6370$ km.

ESTRATEGIA

Como éste es un movimiento bajo una fuerza central respecto al centro de la Tierra, sabemos que el producto de la distancia desde el centro de ésta y la componente transversal de la velocidad del satélite es constante. Esto nos da una ecuación que relaciona v_A y r_A. Podemos obtener una segunda ecuación que relacione v_A y r_A usando el principio de la conservación de la energía.

SOLUCIÓN

De la Ec. (5.23), la conservación del momento angular requiere que

$$r_A v_A = r_P v_P.$$

De acuerdo con la Ec. (4.27), la energía potencial del satélite en términos de la distancia al centro de la Tierra es

$$V = -\frac{mgR_E^2}{r}.$$

La suma de las energías cinética y potencial en el apogeo y en el perigeo deben ser iguales:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mgR_E^2}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{mgR_E^2}{r_P}.$$

Sustituyendo $r_A = r_P v_P / v_A$ en esta ecuación y reordenando términos, obtenemos

$$(v_A - v_P)\left(v_A + v_P - \frac{2gR_E^2}{r_P v_P}\right) = 0.$$

Esta ecuación da la solución trivial $v_A = v_P$ y también la solución para la velocidad en el apogeo:

$$v_A = \frac{2gR_E^2}{r_P v_P} - v_P.$$

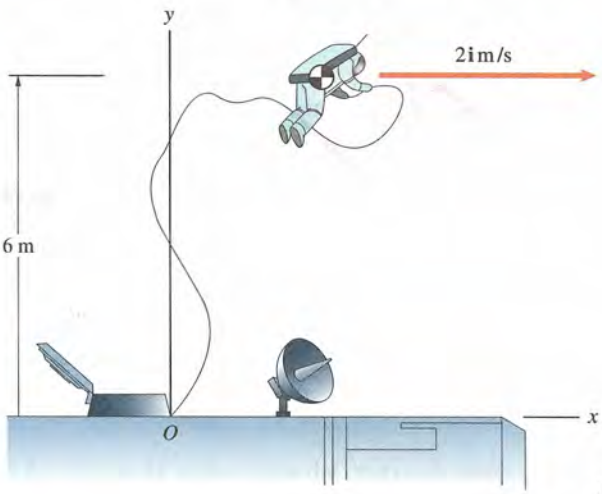
Sustituyendo los valores de g, R_T, r_P y v_P obtenemos $v_A = 4373$ m/s y $r_A = 16\,007$ km.

Problemas

5.72 Un cuerpo con posición $\mathbf{r} = 12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (pies) respecto a un punto O se mueve a 130 pie/s, y su momento angular respecto a O es cero. ¿Cuál es su vector de velocidad?

5.73 La fuerza externa total sobre un cuerpo de 2 kg es $\Sigma\mathbf{F} = 2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ (N), donde t es el tiempo en segundos. En $t_1 = 0$, su posición y velocidad son $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{v} = 0$.
(a) Use la segunda ley de Newton para determinar la posición $\mathbf{r}$ del cuerpo y su velocidad $\mathbf{v}$ en función del tiempo.
(b) Integrando $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ con respecto al tiempo, determine el impulso angular entre $t_1 = 0$ y $t_2 = 6$ s.
(c) Use los resultados de la parte (a) para determinar el cambio en el momento angular del cuerpo entre $t_1 = 0$ y $t_2 = 6$ s.

5.74 Un astronauta se mueve en el plano x-y sujeto al extremo de una cuerda de 10 m unida a una estación espacial en O. La masa total del astronauta y su equipo es de 120 kg.
(a) ¿Cuál es su momento angular respecto a O antes de que la cuerda se tense?
(b) ¿Cuál es la magnitud de la componente de su velocidad perpendicular a la cuerda inmediatamente después de que la cuerda se tensa?

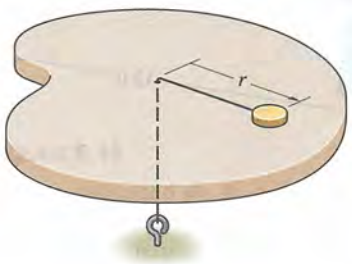


P5.74

5.75 En el Prob. 5.74, si el coeficiente de restitución del "impacto" que ocurre cuando el astronauta alcanza el extremo de la cuerda es $e = 0.8$, ¿cuáles son las componentes x y y de su velocidad inmediatamente después de que la cuerda se tensa?

5.76 En el Ej. 5.5 determine la velocidad del disco en función del tiempo si la fuerza es $F = Ct$, donde C es una constante.

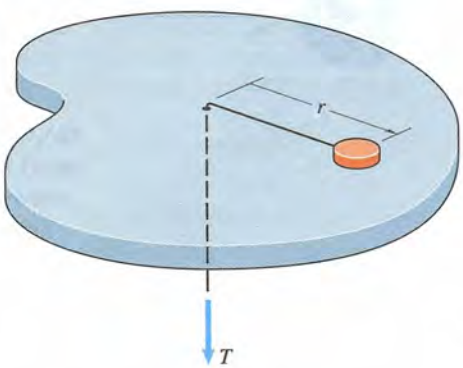
5.77 Un disco de 2 kg se desliza sobre una mesa horizontal lisa y está conectado a una cuerda elástica cuya tensión es $T = 6r$ (N), donde r es la posición radial del disco en metros. Si el disco está en $r = 1$ m y se le da una velocidad inicial de 4 m/s en la dirección transversal, ¿cuáles son las magnitudes de las componentes radial y transversal de su velocidad cuando $r = 2$ m?



P5.77

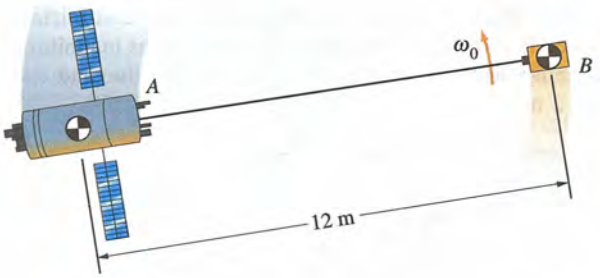
5.78 En el Prob. 5.77 determine el valor máximo de r alcanzado por el disco.

5.79 Un disco de masa m se desliza sobre una mesa horizontal y está unido a una cuerda que pasa por un agujero en la mesa.
(a) Si la masa se mueve en una trayectoria circular de radio r_0 con velocidad transversal v_0, ¿cuál es la tensión T?
(b) Comenzando con la condición inicial descrita en la parte (a), la tensión se incrementa de manera que se tira de la cuerda a través del agujero a razón constante hasta que $r = \frac{1}{2} r_0$. Determine T en función de r mientras esto ocurre.
(c) ¿Qué trabajo se efectúa sobre la masa al tirar de la cuerda a través del agujero, como se describió en la parte (b)?



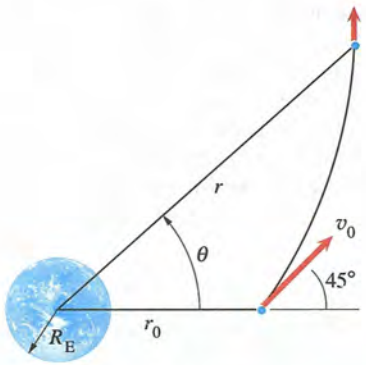
P5.79

5.80 Dos satélites ($m_A = 250$ kg, $m_B = 50$ kg) están unidos por un cable. Los satélites y el cable giran con velocidad angular $\omega_0 = 0.25$ rev/min. Desde la Tierra se ordena al satélite A desenrollar con lentitud 6 m de cable adicional. ¿Cuál es la velocidad angular después de esto?



P5.80

5.81 Un satélite a $r_0 = 10\,000$ millas del centro de la Tierra recibe una velocidad inicial $v_0 = 20\,000$ pie/s en la dirección mostrada. Determine la magnitud de la componente transversal de su velocidad cuando $r = 20\,000$ millas. El radio de la Tierra es de 3960 millas.



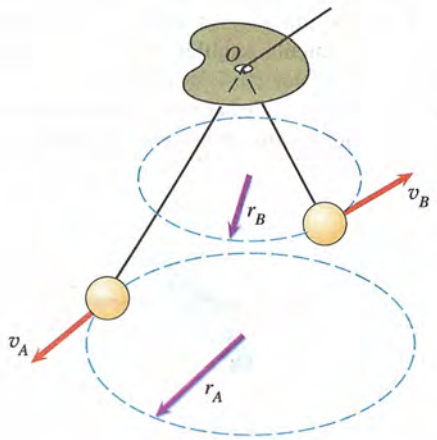
P5.81

5.82 En el Prob. 5.81 determine las magnitudes de las componentes radial y transversal de la velocidad del satélite cuando $r = 15\,000$ millas.

5.83 En el Prob. 5.81 determine la máxima distancia r alcanzada por el satélite.

5.84 Una esfera suspendida de una cuerda que pasa por un agujero en el techo en O se mueve con velocidad v_A en una trayectoria circular horizontal de radio r_A. La cuerda se jala a través del agujero hasta que la esfera se mueve con velocidad v_B en una trayectoria circular horizontal de radio r_B. Use el principio del impulso angular y del momento angular para demostrar que $r_A v_A = r_B v_B$.

Estrategia: Sea **e** un vector unitario perpendicular al techo. Aunque éste no es un problema de fuerza central, ya que el peso de la esfera no señala hacia O, se puede demostrar que $\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}) = 0$, por lo que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_0$ se conserva.



P5.84

5.5 *Flujos de masa*

Aquí usamos la conservación de la cantidad de movimiento lineal para determinar la fuerza ejercida sobre un cuerpo que emite o absorbe un flujo continuo de masa. La ecuación resultante se aplica a diversas situaciones como la determinación del empuje de un cohete y el cálculo de las fuerzas ejercidas sobre cuerpos por flujos de fluidos o materiales granulares.

Suponga que un cuerpo de masa m y velocidad $\mathbf{v}$ no está sometido a fuerzas externas (Fig. 5.18a) y que emite un elemento de masa Δm_f con velocidad $\mathbf{v}_f$ *respecto al cuerpo* (Fig. 5.18b). Denotamos con $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ la nueva velocidad del cuerpo. La cantidad de movimiento lineal del cuerpo antes de la emisión del elemento de masa es igual a la cantidad de movimiento lineal total del cuerpo y el elemento después de la emisión:

$$m\mathbf{v} = (m - \Delta m_f)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + \Delta m_f(\mathbf{v} + \mathbf{v}_f).$$

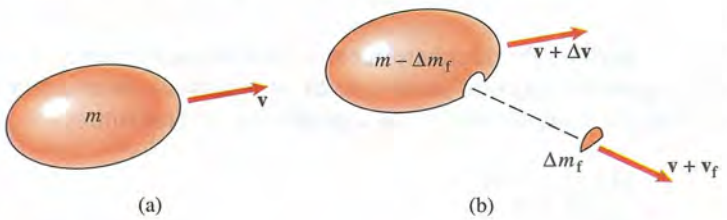


Figura 5.18
Masa y velocidad de un cuerpo (a) antes y (b) después de emitir un elemento de masa.

Evaluando los productos y simplificando obtenemos

$$m\Delta\mathbf{v} + \Delta m_f\mathbf{v}_f - \Delta m_f\Delta\mathbf{v} = 0. \tag{5.24}$$

Suponemos ahora que, en vez de un elemento de masa discreto, se emite un flujo continuo de masa y que Δm_f es la cantidad emitida en un intervalo Δt. Dividimos la Ec. (5.24) entre Δt y escribimos el resultado como

$$m\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta m_f}{\Delta t}\mathbf{v}_f - \frac{\Delta m_f}{\Delta t}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\Delta t = 0.$$

Tomando el límite de esta ecuación cuando $\Delta t \to 0$ obtenemos

$$-\frac{dm_f}{dt}\mathbf{v}_f = m\mathbf{a},$$

donde $\mathbf{a}$ es la aceleración del centro de masa del cuerpo. El término dm_f/dt es la **razón de flujo másico**, es decir, la velocidad con que la masa fluye del cuerpo. Comparando esta ecuación con la segunda ley de Newton, concluimos que un flujo de masa *desde* un cuerpo ejerce una fuerza

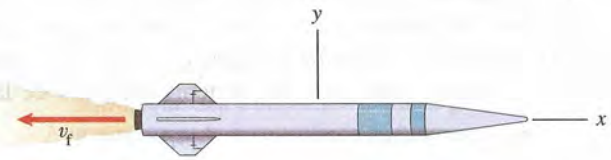
$$\boxed{\mathbf{F}_f = -\frac{dm_f}{dt}\mathbf{v}_f} \tag{5.25}$$

sobre él. La fuerza es proporcional a la razón de flujo másico y a la magnitud de la velocidad *relativa* del flujo, y su dirección es *opuesta* a la dirección de la velocidad relativa. Por el contrario, un flujo de masa *hacia* un cuerpo ejerce una fuerza en la misma dirección que la velocidad relativa.

El ejemplo clásico de fuerza creada por un flujo de masa se presenta en un cohete (Fig. 5.19). Suponga que éste tiene una velocidad de escape uniforme v_f paralela al eje x y que la razón de flujo másico del escape es dm_f/dt. En el sistema coordenado que se da, el vector de velocidad del escape es $\mathbf{v}_f = -v_f\mathbf{i}$, por lo que, de la Ec. (5.25), la fuerza sobre el cohete es

$$\mathbf{F}_f = -\frac{dm_f}{dt}\mathbf{v}_f = \frac{dm_f}{dt}v_f\,\mathbf{i}.$$

Figura 5.19
Cohete con su escape alineado con el eje x.



La fuerza ejercida sobre el cohete por su escape es hacia la derecha, opuesta a la dirección del flujo de su escape. Si suponemos que ninguna fuerza externa actúa sobre el cohete, la segunda ley de Newton es

$$\frac{dm_f}{dt}v_f = m\frac{dv}{dt}. \tag{5.26}$$

La razón de flujo másico del combustible es la razón a la cual se consume la masa del cohete. Por tanto, la razón de cambio de la masa del cohete es

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dm_f}{dt}.$$

Usando esta expresión podemos escribir la Ec. (5.26) como

$$dv = -v_f\frac{dm}{m}.$$

Supongamos que el cohete parte del reposo con masa inicial m_0. Si la velocidad de escape es constante, podemos integrar esta ecuación para determinar la velocidad del cohete en función de su masa:

$$\int_0^v dv = \int_{m_0}^{m} -v_f\frac{dm}{m}.$$

El resultado es

$$v = v_f \ln\left(\frac{m_0}{m}\right). \tag{5.27}$$

El cohete puede ganar más velocidad consumiendo más masa, pero observe que el incremento de la razón m_0/m de 10 a 100 sólo aumenta la velocidad en un factor de dos. Por el contrario, incrementando la velocidad de escape se obtiene un aumento proporcional en la velocidad del cohete.

Ejemplo 5.7

Una corriente horizontal de agua con velocidad v_0 y razón de flujo másico dm_f/dt golpea una placa que desvía el agua en el plano horizontal a través de un ángulo θ (Fig. 5.20). Suponga que la magnitud de la velocidad del agua cuando ésta abandona la placa es aproximadamente igual a v_0. ¿Qué fuerza ejerce el agua sobre la placa?

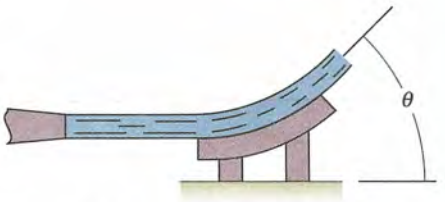


Figura 5.20

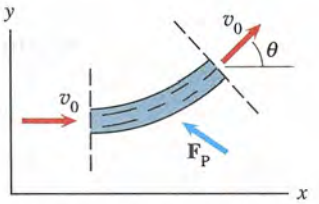
ESTRATEGIA

Podemos determinar la fuerza ejercida sobre la placa considerando la parte de la corriente en contacto con la placa como un cuerpo con un flujo de masa que entra y sale de él.

SOLUCIÓN

En la Fig. (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la parte de la corriente en contacto con la placa. Corrientes de masa con velocidad v_0 entran y salen de este cuerpo, y $\mathbf{F}_P$ es la fuerza que ejerce la placa sobre la corriente. Lo que queremos determinar es la fuerza $-\mathbf{F}_P$ que ejerce la corriente sobre la placa. Primero consideramos la corriente de agua que sale. La razón de flujo másico de agua que sale del diagrama de cuerpo libre debe ser igual a la razón de flujo másico que entra. En el sistema coordenado que se muestra, la velocidad de la corriente que sale es

$$\mathbf{v}_f = v_0 \cos\theta\,\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}.$$



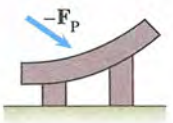
(a) Diagrama de cuerpo libre de la corriente.

Sea $\mathbf{F}_D$ la fuerza que ejerce la corriente que sale sobre el cuerpo. De la Ec. (5.25),

$$\mathbf{F}_D = -\frac{dm_f}{dt}\mathbf{v}_r = -\frac{dm_f}{dt}(v_0 \cos\theta\,\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}).$$

La velocidad de la corriente que entra es $\mathbf{v}_f = v_0\mathbf{i}$. Como este flujo ingresa al cuerpo en vez de salir de él, la fuerza resultante $\mathbf{F}_E$ tiene la misma dirección que la velocidad relativa:

$$\mathbf{F}_E = \frac{dm_f}{dt}\mathbf{v}_r = \frac{dm_f}{dt}v_0\,\mathbf{i}.$$



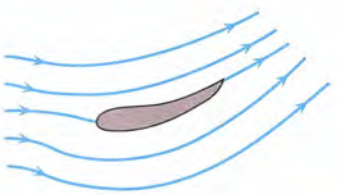
(b) Fuerza ejercida sobre la placa.

La suma de las fuerzas sobre el diagrama de cuerpo libre debe ser igual a cero,

$$\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_P = 0,$$

por lo cual la fuerza que ejerce el agua sobre la placa es (Fig. b)

$$-\mathbf{F}_P = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_E = \frac{dm_f}{dt}v_0[(1 - \cos\theta)\,\mathbf{i} - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}].$$



(c) Patrón del fluido en movimiento alrededor del ala de un avión.

COMENTARIO

Este sencillo ejemplo nos da una idea de cómo los álabes de las turbinas y las alas de los aviones crean fuerzas al desviar corrientes de líquidos o gases (Fig. c).

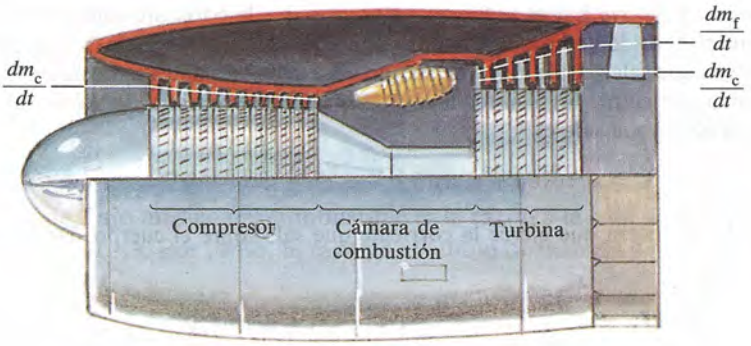
Ejemplo 5.8

Aplicación a la ingeniería

Motores de reacción

En un motor turborreactor (Fig. 5.21), entra al compresor una razón de flujo másico dm_c/dt de aire con velocidad v_i. El aire se mezcla con combustible y se enciende en la cámara de combustión. Luego la mezcla fluye por la turbina que impulsa al compresor. Los gases de escape, con una razón de flujo másico igual a la del aire más la razón de flujo másico del combustible, $dm_c/dt + dm_f/dt$, salen a una alta velocidad v_e, ejerciendo una gran fuerza sobre el motor. Suponga que $dm_c/dt = 0.925$ slug/s y que $dm_f/dt = 0.009$ slug/s. La velocidad de entrada del aire es $v_i = 400$ pie/s y la velocidad de escape es $v_e = 1605$ pie/s. ¿Cuál es el empuje del motor?

Figura 5.21



ESTRATEGIA

Podemos determinar el empuje del motor usando la Ec. (5.25). Para determinar el empuje neto debemos incluir la fuerza ejercida por la descarga del motor y la fuerza ejercida por el flujo másico del aire que entra al compresor.

SOLUCIÓN

La descarga del motor ejerce una fuerza hacia la izquierda igual al producto de la razón del flujo másico de la mezcla combustible-aire por la velocidad de descarga. El aire de entrada ejerce una fuerza hacia la derecha igual al producto de la razón del flujo másico del aire entrante por la velocidad de entrada. El empuje del motor (fuerza neta hacia la izquierda) es

$$T = \left(\frac{dm_c}{dt} + \frac{dm_f}{dt}\right) v_e - \frac{dm_c}{dt} v_i$$

$$= (0.925 + 0.009)(1605) - (0.925)(400)$$

$$= 1129 \text{ lb.}$$

CONSIDERACIONES DE DISEÑO

El motor de reacción se desarrolló en Europa poco antes del inicio de la Segunda Guerra Mundial. El diseño del motor turborreactor de la Fig. 5.21 tuvo mucho éxito y dominó por muchos años la aviación militar y comercial, aunque tiene el inconveniente de consumir mucho combustible.

Durante los últimos treinta años, el motor de reacción de doble flujo mostrado en la Fig. 5.22 ha llegado a ser el diseño más común, particularmente en aviones comerciales. Parte de su empuje es proporcionada por el aire, que es acelerado por un ventilador. La razón del flujo másico del aire que entra al ventilador, dm_b/dt, a la del flujo másico del aire que entra al compresor, dm_c/dt, se llama *razón de derivación*.

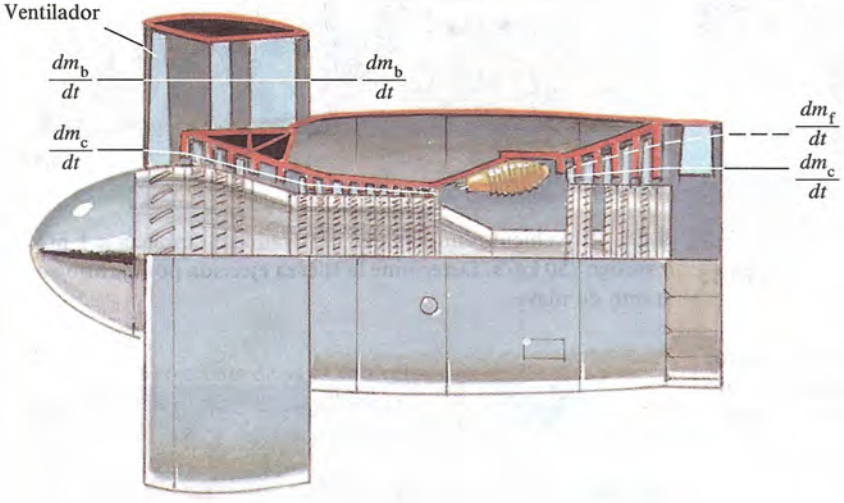


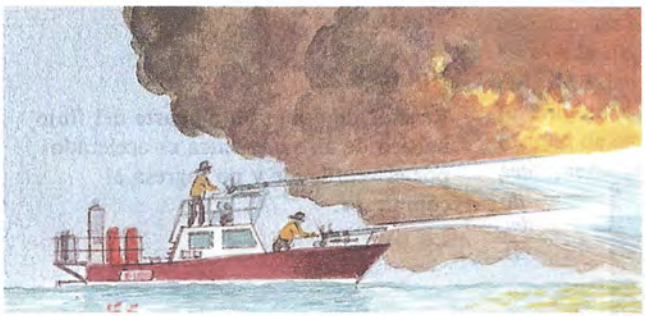
Figura 5.22

Reactor de doble flujo. Parte del flujo másico de aire que entra es acelerado por el ventilador y no ingresa al compresor.

La fuerza ejercida por el escape de un motor de reacción es igual al producto de la razón del flujo másico por la velocidad de escape. En el motor de reacción de doble flujo, el aire que pasa por el ventilador no es calentado por la combustión del combustible, y tiene por ello mayor densidad que la descarga de los motores turborreactores. Como resultado, el motor de reacción de doble flujo puede proporcionar un empuje dado con menor velocidad media de salida. Como el trabajo que se debe efectuar para crear el empuje depende de la energía cinética de la descarga, el motor de reacción de doble flujo genera un empuje más eficiente.

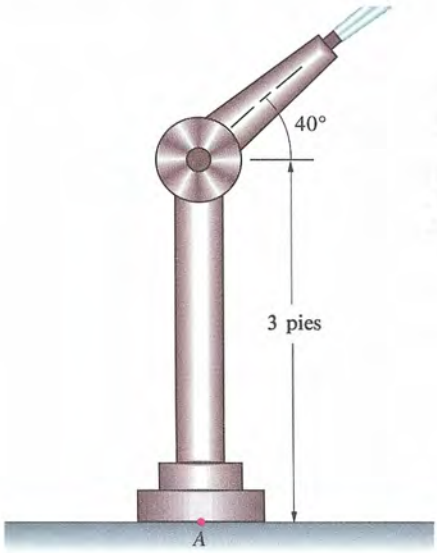
Problemas

5.85 La embarcación de bomberos mostrada puede lanzar, con cada uno de sus dos cañones, 3.8 kg/s de agua a una velocidad de 44 m/s. Si ambos cañones apuntan en la misma dirección, ¿qué fuerza total ejercen sobre la embarcación?



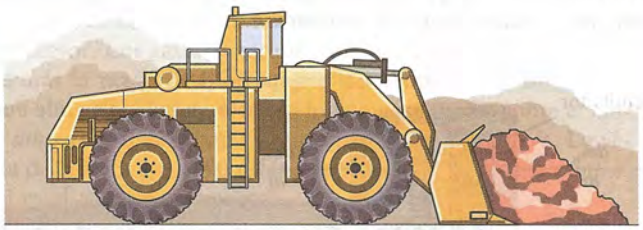
P5.85

5.86 Una boquilla montada sobre un camión de bomberos emite una corriente de agua a 80 pie/s con una razón de flujo másico de 3.4 slug/s. Determine el momento respecto a A debido a la fuerza ejercida por la corriente de agua.



P5.86

5.87 El tractor se mueve a 2 mi/h y recoge 66 000 lb de mineral de hierro en 3 s. ¿Qué fuerza horizontal deben ejercer sus ruedas?



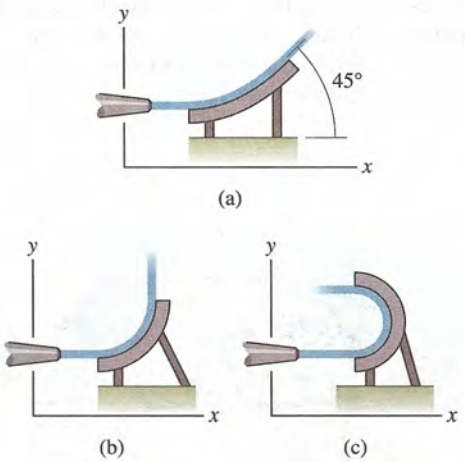
P5.87

5.88 El vehículo limpianieve mostrado se desplaza a 1 m/s y recoge 750 kg/s. Determine la fuerza ejercida por el flujo entrante de nieve.

P5.88

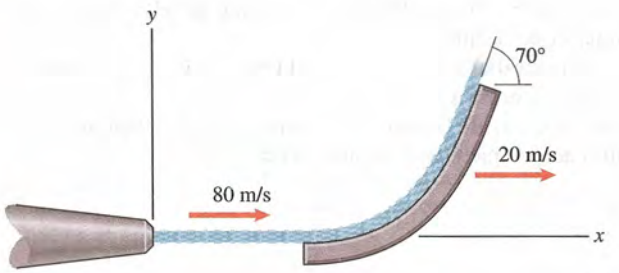
5.89 Si el vehículo del Prob. 5.88 se diseña de modo que lance la nieve a 45° desde una boquilla a 2 m sobre el suelo y la nieve caiga a 20 m de distancia, ¿qué fuerza horizontal ejerce sobre el vehículo el flujo de la nieve lanzada?

5.90 Una boquilla emite una corriente de agua horizontal a 40 m/s con una razón de flujo másico de 30 kg/s, y la corriente es desviada en el plano horizontal por una placa. Determine la fuerza que ejerce la corriente sobre la placa en los casos (a), (b) y (c).



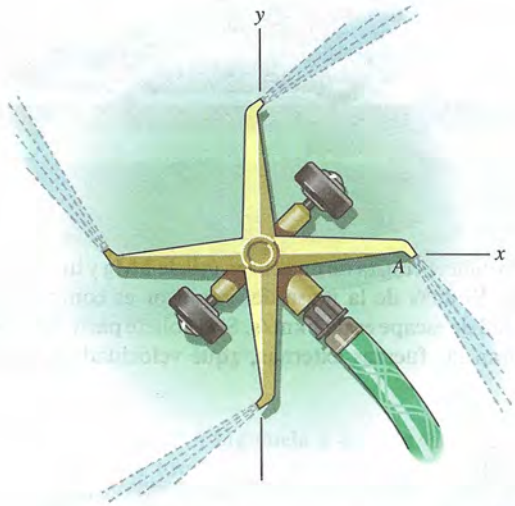
P5.90

5.91 Una corriente de agua con velocidad de 80**i** m/s y razón de flujo másico de 6 kg/s golpea el álabe de una turbina que se mueve a una velocidad constante de 20**i** m/s.
(a) ¿Qué fuerza ejerce el agua sobre el álabe?
(b) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del agua al abandonar el álabe?



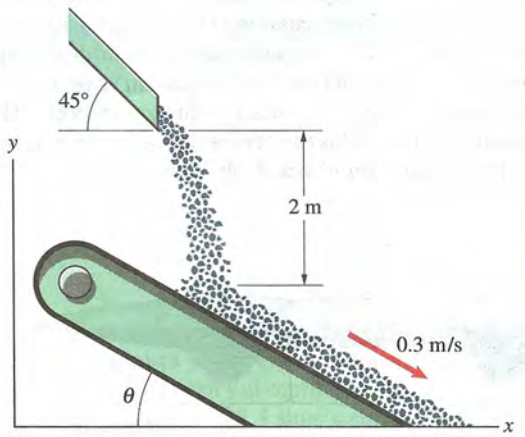
P5.91

5.92 La boquilla A del rociador se localiza en (7, −0.5, 0.5) pulg. De la boquilla sale agua a 25 pie/s, con una razón de flujo de 0.5 lb/s. Los cosenos directores del flujo en A son $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. ¿Cuál es el momento total respecto al eje z que ejercen los flujos de las cuatro boquillas sobre el rociador?



P5.92

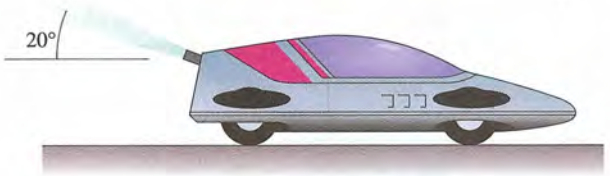
5.93 Un flujo de 45 kg/s de grava sale de una tolva a 2 m/s y cae sobre una banda que se mueve a 0.3 m/s. Determine las componentes de la fuerza que ejerce el flujo de la grava sobre la banda si $\theta = 0$.



P5.93

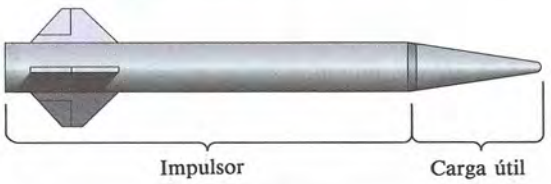
5.94 Resuelva el Prob. 5.93 si $\theta = 30°$.

5.95 Un auto de juguete es impulsado por el agua que sale de un tanque interior a 3 m/s respecto al auto. Si la masa del auto vacío es de 1 kg y contiene 2 kg de agua, ¿cuál es la velocidad máxima del auto si se ignoran las otras fuerzas tangenciales?



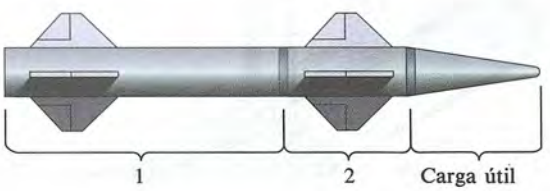
P5.95

5.96 Un cohete consta de una carga útil de 2 Mg y un impulsor de 40 Mg. El 80% de la masa del impulsor es combustible y su velocidad de escape es de 1 km/s. Si el cohete parte del reposo y se ignoran las fuerzas externas, ¿qué velocidad alcanzará?



P5.96

5.97 Un cohete consta de una carga útil de 2 Mg y un impulsor, con masa total = 40 Mg, de 2 etapas. El 80% de la masa de cada etapa es combustible; cuando el de la etapa 1 se agota, ésta se desprende del impulsor y se enciende el motor de la etapa 2. La velocidad de escape del gas de combustión es de 1 km/s. El cohete parte del reposo y se ignoran las fuerzas externas. Halle la velocidad del cohete si las dos etapas tienen la misma masa. Compare el resultado con el del Prob. 5.96.



P5.97

5.98 En el Prob. 5.97, determine la velocidad alcanzada por el cohete para tres conjuntos de valores de las masas de las dos etapas: (a) $m_1 = 25$ Mg, $m_2 = 15$ Mg; (b) $m_1 = 35$ Mg, $m_2 = 5$ Mg; (c) $m_1 = 38$ Mg, $m_2 = 2$ Mg.

5.99 Cuando se apaga el motor de un trineo cohete, se usa un freno de agua para detenerlo. Un tubo penetra dentro del canal y el agua fluye por él a la velocidad del trineo y hacia afuera en una dirección perpendicular al movimiento de éste. La razón de flujo másico en el tubo es ρvA, donde $\rho = 1.94$ slug/pie^3 es la densidad del agua, v es la velocidad de flujo y $A = 0.1$ pie^2 es el área de la sección transversal del tubo. La masa del trineo es de 30 slugs. Ignorando la fricción y la resistencia aerodinámica, determine la distancia y el tiempo requeridos para que el trineo desacelere de 1000 pie/s a 100 pie/s.

P5.99

5.100 Suponga que sujeta el extremo de una cadena que pesa 3 lb/pie y la levanta del piso a una velocidad constante de 2 pie/s.

(a) Determine la fuerza F hacia arriba que usted debe ejercer en función de la altura s.

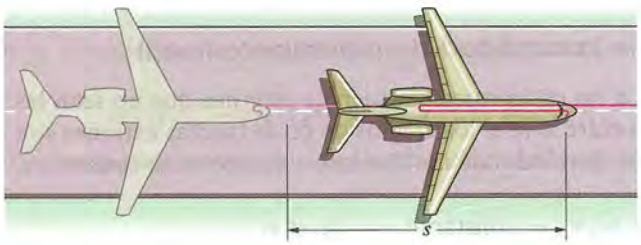
(b) ¿Cuánto trabajo efectúa usted al levantar la parte superior de la cadena hasta $s = 4$ pies?

Estrategia: Trate la parte de la cadena que ha levantado como un cuerpo que está ganando masa.

P5.100

5.101 Resuelva el Prob. 5.100 suponiendo que usted levanta del piso el extremo de la cadena con una aceleración constante de 2 pie/s^2.

5.102 Para detener gradualmente un avión se usa una pesada cadena. Un gancho unido al extremo de la cadena se engarza a la rueda frontal del avión y éste jala una longitud creciente de la cadena al rodar sobre la pista. Sea m la masa del avión, v_0 su velocidad inicial y ρ_L la masa por unidad de longitud de la cadena. Si se ignoran la fricción y la resistencia aerodinámica, ¿cuál es la velocidad del avión en función de s?



P5.102

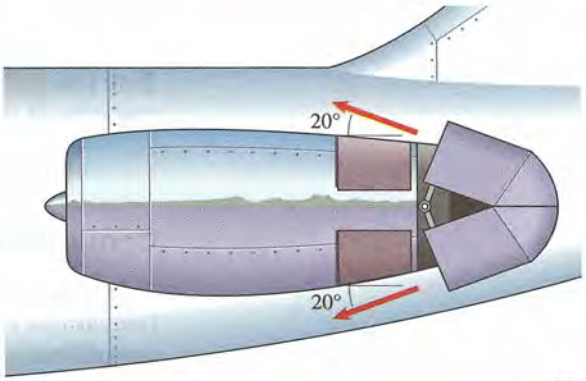
5.103 En el Prob. 5.102, la fuerza de fricción que ejerce el terreno sobre la cadena dominaría realmente a las otras fuerzas conforme aumentara la distancia s. Si el coeficiente de fricción cinética entre la cadena y el terreno es μ_k y se ignoran todas las fuerzas excepto la de fricción, ¿cuál es la velocidad del avión en función de s?

Los Probs. 5.104 a 5.108 están relacionados con el Ej. 5.8.

5.104 Se está probando el motor turborreactor de la Fig. 5.21. La velocidad de flujo másico del aire que entra al compresor es de 13.5 kg/s y la velocidad de flujo másico del combustible es de 0.13 kg/s. La velocidad efectiva del aire que entra al compresor es cero y la velocidad de descarga es de 500 m/s. ¿Cuál es el empuje del motor?

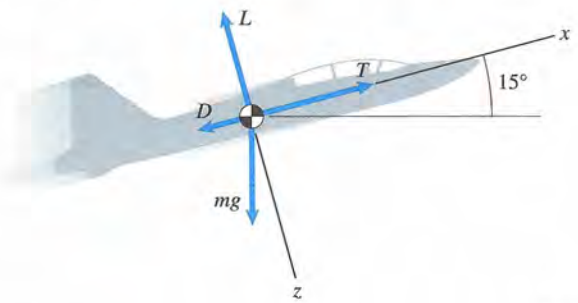
5.105 Suponga que el motor descrito en el Prob. 5.104 está en un avión que vuela a 400 km/h. La velocidad efectiva del aire que entra en la admisión es igual a la velocidad del avión. ¿Cuál es el empuje del motor?

5.106 Un inversor del empuje del motor turborreactor hace que la descarga salga del motor a 20° respecto a la línea central de éste. La razón de flujo másico del aire que entra al compresor a 200 pie/s es de 3 slug/s. La razón de flujo másico del combustible es de 0.1 slug/s y su velocidad de salida es de 1200 pie/s. ¿Qué fuerza de frenado ejerce el motor sobre el avión?



P5.106

5.107 Un avión de 13.6 Mg vuela a 400 km/h. La razón de flujo másico de aire total que entra a los compresores de sus turborreactores es de 280 kg/s, y la razón de flujo másico total de combustible es de 2.6 kg/s. La velocidad efectiva del aire que entra a los compresores es igual a la velocidad del avión, y la velocidad de salida es de 480 m/s. La razón de la fuerza sustentadora L a la fuerza de arrastre B es 6, y la componente z de la aceleración del avión es cero. ¿Cuál es la componente x de su aceleración?



P5.107

5.108 Considere el reactor de doble flujo de la Fig. 5.22. Cuando el avión inicia su carrera de despegue, la velocidad del aire que entra al compresor y al ventilador es insignificante. Una razón de flujo másico de 38.5 slug/s entra al ventilador y es acelerada a 885 pie/s. Una razón de flujo másico de 7.7 slug/s entra al compresor. La razón de flujo másico de combustible es de 0.23 slug/s y la velocidad de salida es de 1190 pie/s. (a) ¿Cuál es la razón de derivación? (b) ¿Cuál es el empuje del motor? (c) Si el avión pesa 500 000 lb, ¿cuál es su aceleración inicial? (El avión tiene cuatro motores.)

Resumen del capítulo

Principio del impulso y la cantidad de movimiento

El impulso lineal aplicado a un cuerpo durante un intervalo de tiempo es igual al cambio en su cantidad de movimiento lineal:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1. \qquad \text{Ec. (5.1)}$$

Este resultado también se puede expresar en términos del promedio con respecto al tiempo de la fuerza total:

$$(t_2 - t_1)\Sigma \mathbf{F}_{\text{media}} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1. \qquad \text{Ec. (5.2)}$$

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

Si los cuerpos A y B no están sujetos a fuerzas externas que no sean las fuerzas que ejercen entre sí (o si los efectos de otras fuerzas externas son insignificantes), sus cantidades de movimiento lineal total se conservan,

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = \text{constante}, \qquad \text{Ec. (5.4)}$$

y la velocidad de sus centros de masa común es constante.

Impactos

Si los cuerpos que chocan no están sujetos a fuerzas externas, sus cantidades de movimiento lineal total deben ser iguales antes y después del impacto. Aun cuando estén sujetos a fuerzas externas, la fuerza del impacto suele ser tan grande, y su duración tan breve, que el efecto de las fuerzas externas sobre sus movimientos durante el impacto es insignificante.

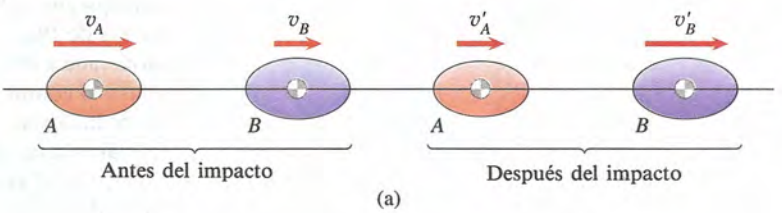
Si los cuerpos A y B se adhieren y permanecen juntos después de la colisión, se dice que sufren un **impacto perfectamente plástico.** La velocidad de su centro común de masa antes y después de la colisión está dada por

$$\mathbf{v} = \frac{m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B}{m_A + m_B}. \qquad \text{Ec. (5.7)}$$

Impactos centrales

En un **impacto central directo** (Fig. a), la cantidad de movimiento lineal se conserva,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B, \qquad \text{Ec. (5.8)}$$



(a)

y las velocidades están relacionadas por el **coeficiente de restitución**:

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}. \qquad \text{Ec. (5.14)}$$

Si $e = 0$, el impacto es perfectamente plástico. Si $e = 1$, la energía cinética total se conserva y el impacto se llama **perfectamente elástico**.

En un **impacto central oblicuo** (Fig. b), las componentes de la velocidad en las direcciones y y z no cambian por el impacto:

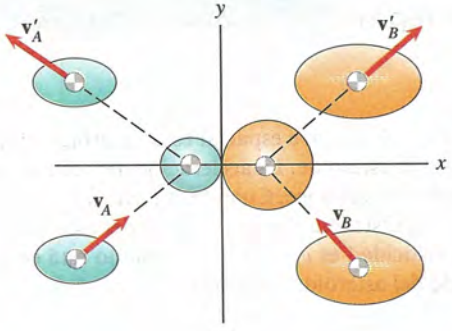
$$(\mathbf{v}'_A)_y = (\mathbf{v}_A)_y, \qquad (\mathbf{v}'_B)_y = (\mathbf{v}_B)_y,$$
$$(\mathbf{v}'_A)_z = (\mathbf{v}_A)_z, \qquad (\mathbf{v}'_B)_z = (\mathbf{v}_B)_z. \qquad \text{Ec. (5.15)}$$

En la dirección x, la cantidad de movimiento lineal se conserva,

$$m_A(\mathbf{v}_A)_x + m_B(\mathbf{v}_B)_x = m_A(\mathbf{v}'_A)_x + m_B(\mathbf{v}'_B)_x, \qquad \text{Ec. (5.16)}$$

y las componentes de velocidad están relacionadas por el coeficiente de restitución:

$$e = \frac{(\mathbf{v}'_B)_x - (\mathbf{v}'_A)_x}{(\mathbf{v}_A)_x - (\mathbf{v}_B)_x}. \qquad \text{Ec. (5.17)}$$



(b)

Principio del impulso angular y del momento angular

El impulso angular respecto a un punto O aplicado a un cuerpo durante un intervalo de tiempo es igual al cambio en su momento angular respecto a O:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F})\, dt = (\mathbf{H}_0)_2 - (\mathbf{H}_0)_1, \qquad \text{Ec. (5.21)}$$

donde el momento angular es

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \qquad \text{Ec. (5.20)}$$

Movimento bajo una fuerza central

Si la fuerza total que actúa sobre un cuerpo permanece dirigida hacia un punto fijo, se dice que el cuerpo se encuentra en **movimiento bajo una fuerza central**, y su momento angular respecto al punto fijo se conserva:

$$\mathbf{H}_0 = \text{constante.} \qquad \text{Ec. (5.22)}$$

En el movimiento plano bajo una fuerza central, el producto de la distancia radial y la componente transversal de la velocidad es constante:

$$r\,v_\theta = \text{constante.} \qquad \text{Ec. (5.23)}$$

Flujos de masa

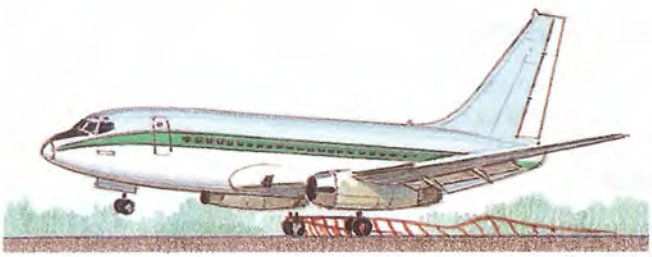
Un flujo de masa *desde* un cuerpo con velocidad $\mathbf{v}_f$ *relativa al cuerpo* ejerce una fuerza

$$\mathbf{F}_f = \frac{dm_f}{dt}\mathbf{v}_f \qquad \text{Ec. (5.25)}$$

sobre el cuerpo, donde dm_f/dt es la **velocidad de flujo másico.** La dirección de la fuerza es opuesta a la dirección de la velocidad relativa. Un flujo de masa *hacia* un cuerpo ejerce una fuerza en la misma dirección que la velocidad relativa.

Problemas de repaso

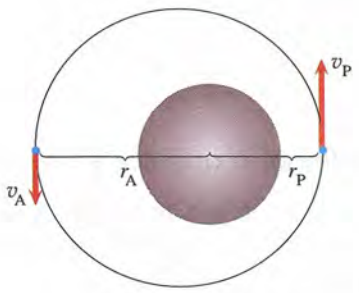
5.109 Para detener aviones cuyos sistemas de frenos fallan se usa un sistema de detención de aviones. El sistema detiene un avión de 47.5 Mg que se mueve a 80 m/s en 9.15 s.
(a) ¿Qué impulso se aplica al avión durante los 9.15 s?
(b) ¿Cuál es la desaceleración media a que se someten los pasajeros?



P5.109

5.110 Un cañon tiene un barril de 1.94 m de largo, una velocidad de 300 m/s en la boca, y dispara un obús de 38 kg. Si el obús tarda 0.013 s en recorrer la longitud del barril, ¿qué fuerza media se ejerce sobre el obús?

5.111 Una nave espacial está en órbita elíptica alrededor de un gran asteroide. La aceleración debida a la gravedad del asteroide se desconoce. Cuando la nave está en su punto más cercano, su distancia desde el centro del asteroide es $r_P = 2$ km y su velocidad es $v_P = 1$ m/s. Cuando está en el punto más alejado del asteroide, su distancia es $r_A = 6$ km. ¿Cuál es la velocidad v_A?

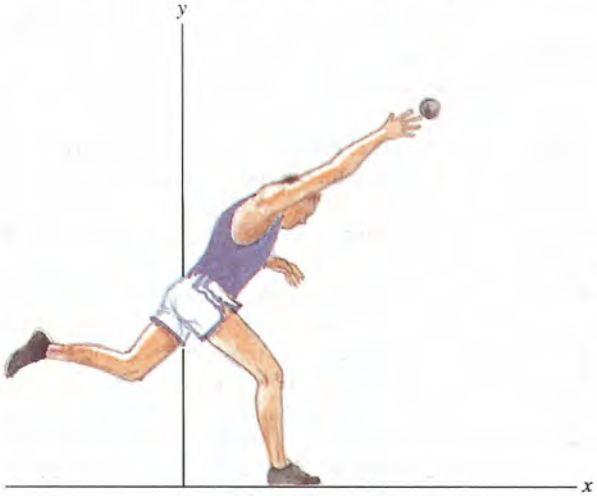


P5.111

5.112 En el Prob. 5.111, ¿cuál es la masa del asteroide? Si se supone que el asteroide es aproximadamente esférico con densidad media de 7000 kg/m^3, ¿cuál es su radio?

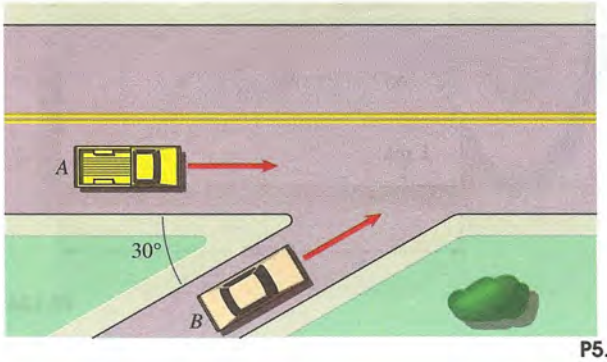
Estrategia: Use la conservación de la energía y exprese la energía potencial gravitatoria en la forma $V = -Gmm_A/r$, donde $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m^2/kg^2 es la constante de gravitación universal y m_A es la masa del asteroide.

5.113 Un atleta lanza una bala de 16 lb. Cuando la suelta, la bala está a 7 pies sobre el terreno y sus componentes de velocidad son $v_x = 31$ pie/s y $v_y = 26$ pie/s.
(a) Si acelera la bala desde el reposo en 0.8 s y como primera aproximación se supone que la fuerza **F** que ejerce sobre ella es constante, use el principio del impulso y la cantidad de movimiento para determinar las componentes x y y de **F**.
(b) ¿Cuál es la distancia horizontal desde el punto en que suelta la bala hasta el punto en que ésta toca el suelo?



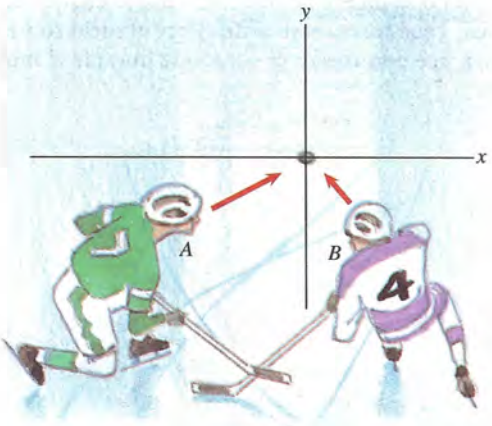
P5.113

5.114 El camión A de 6000 lb que circula a 40 pie/s choca con el automóvil B de 4000 lb que circula a 30 pie/s.
(a) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de su centro de masa común después del impacto?
(b) Si la colisión se trata como un impacto perfectamente plástico, ¿cuánta energía cinética se pierde?



P5.114

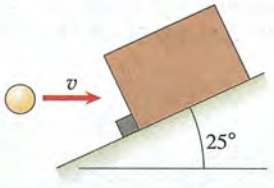
5.115 Dos jugadores de hockey ($m_A = 80$ kg, $m_B = 90$ kg) al convergir hacia el disco en $x = 0$, $y = 0$ se traban y caen al hielo. Antes de la colisión, $v_A = 9\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ (m/s) y $v_B = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre los jugadores y el hielo es $\mu_k = 0.1$, ¿cuál es su posición aproximada cuando dejan de deslizarse?



P5.115

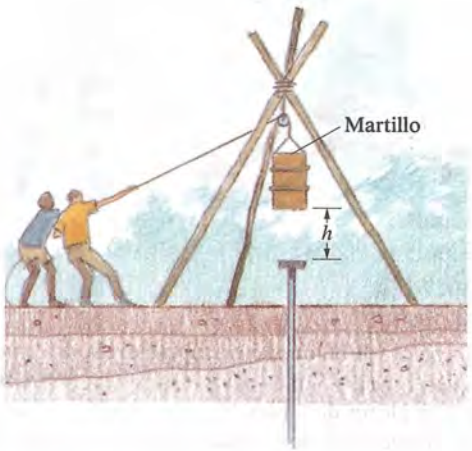
5.116 Una pelota de balonmano aceptable rebota a una altura de entre 3 pies 6 pulg y 4 pies cuando se suelta sobre un piso duro desde una altura de 5 pies 10 pulg. ¿Cuál es el intervalo aceptable de coeficientes de restitución para las pelotas de balonmano?

5.117 Una pelota de 1 kg se mueve horizontalmente a 12 m/s y golpea un bloque de 10 kg. El coeficiente de restitución del impacto es $e = 0.6$, y el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie inclinada es $\mu_k = 0.4$. ¿Qué distancia se desliza el bloque antes de detenerse?



P5.117

5.118 Una persona diseña el dispositivo mostrado para perforar pozos. Un "martillo" de 70 kg se levanta a $h = 1$ m y se deja caer sobre la cabeza del tubo de perforación. La masa de la cabeza y del tubo es de 20 kg. Suponga que el coeficiente de restitución es casi cero.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la cabeza y el tubo inmediatamente después del impacto?
(b) Si el tubo se mueve 30 mm hacia abajo cuando el martillo lo golpea, ¿qué fuerza resistente ejerce el suelo sobre el tubo? (Suponga que esta fuerza es constante durante el movimiento del tubo.)



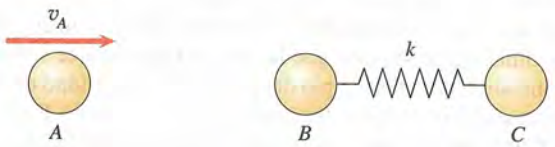
P5.118

5.119 Un remolcador (masa = 40 Mg) y una barcaza (masa = 160 Mg) están en reposo con una cuerda no tensa que los conecta. El remolcador acelera a 2 nudos (1 nudo = 1852 m/h) antes de que la cuerda se tense. Determine las velocidades del remolcador y la barcaza justo después de que la cuerda se tensa (a) si el "impacto" es perfectamente plástico ($e = 0$); (b) si el "impacto" es perfectamente elástico ($e = 1$). Ignore las fuerzas ejercidas por el agua y el motor del remolcador.

P5.119

5.120 En el Prob. 5.119, determine la magnitud de la fuerza impulsora ejercida sobre el remolcador en los dos casos si la duración del "impacto" es de 4 s. Ignore las fuerzas ejercidas por el agua y los motores del remolcador durante este periodo.

5.121 Las bolas mostradas tienen igual masa m. Las bolas B y C están conectadas por un resorte lineal sin estirar y están en reposo. La bola A se mueve hacia la bola B con velocidad v_A. El impacto de A con B es perfectamente elástico ($e = 1$). Ignore las fuerzas externas.
(a) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa común de las bolas B y C inmediatamente después del impacto?
(b) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa común de las bolas B y C en el tiempo t después del impacto?

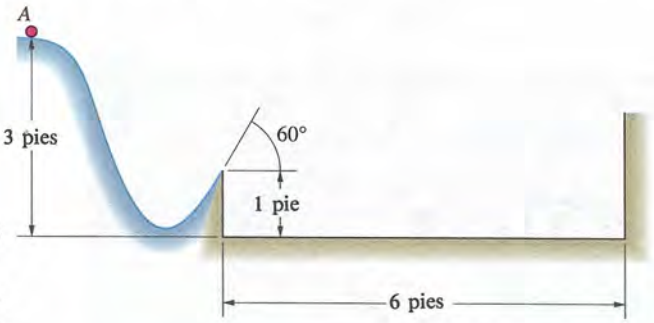


P5.121

5.122 En el Prob. 5.121, ¿cuál es la máxima fuerza de compresión en el resorte como consecuencia del impacto?

5.123 Suponga que el Prob. 5.121 se interpreta como un impacto entre la bola A y un cuerpo D que consiste en las bolas B y C conectadas.
(a) ¿Cuál es el coeficiente de restitución del impacto entre A y D?
(b) Si la energía total después del impacto se considera como la suma de las energías cinéticas $\frac{1}{2}m(v'_A)^2 + \frac{1}{2}(2m)(v'_D)^2$, donde v'_D es la velocidad del centro de masa de D después del impacto, ¿cuánta energía se "pierde" como resultado del impacto?
(c) ¿Cuánta energía se pierde realmente como resultado del impacto? (Este problema es un modelo interesante para uno de los mecanismos de pérdida de energía en impactos entre cuerpos. La energía "perdida" calculada en la parte (b) se transforma en "energía interna", es decir, en movimientos vibratorios de B y C respecto a su centro de masa común.)

5.124 Un cuerpo pequeño parte del reposo en A y se desliza hacia abajo por la rampa lisa. El coeficiente de restitución de su impacto con el piso es $e = 0.8$. ¿A qué altura sobre el piso toca la pared?



P5.124

5.125 Una pelota de baloncesto lanzada al suelo desde una altura de 4 pies rebota a una altura de 3 pies. En el lanzamiento mostrado, la magnitud de la velocidad de la peolota es de 5 pie/s y los ángulos entre su vector de velocidad y los ejes coordenados positivos son $\theta_x = 42°$, $\theta_y = 68°$ y $\theta_z = 124°$ justo antes de tocar el tablero. ¿Cuáles son la magnitud de su velocidad y los ángulos entre su vector de velocidad y los ejes coordenados positivos justo después de que rebota en el tablero?

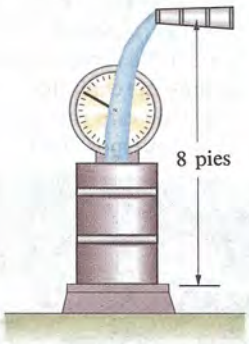
P5.125

5.126 En el Prob. 5.125 el diámetro de la pelota es de 9.5 pulg, las coordenadas del centro del borde de la canasta son $x = 0$, $y = 0$, $z = 12$ pulg y el tablero está en el plano x-y. Determine las coordenadas x y y del punto en que la pelota debe golpear el tablero para que el centro de la pelota pase por el centro del borde de la canasta.

5.127 En la Fig. P5.127 la nieve tiene 2 pies de profundidad y pesa 20 lb/pie^3; el camión limpianieve mostrado tiene 8 pies de ancho y viaja a 5 mi/h. ¿Qué fuerza ejerce la nieve sobre el camión?

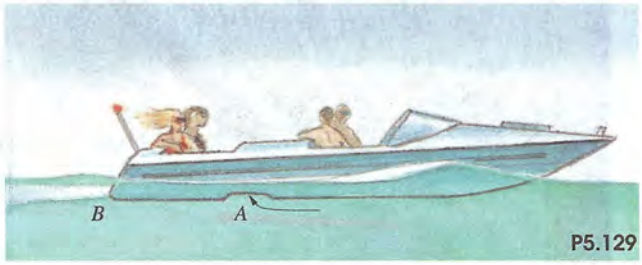
P5.127

5.128 Un tambor vacío de 55 lb con 3 pies de diámetro está sobre una balanza. El agua empieza a entrar al tambor a 1200 lb/min desde 8 pies arriba del fondo del tambor. La densidad del agua es 62.4 lb/pie^3. ¿Qué peso indica la balanza 40 s después de que comenzó a entrar el agua?



P5.128

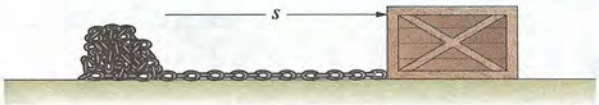
5.129 El sistema de propulsión por chorro admite agua en A y la expulsa en B a 80 pie/s respecto a la lancha. Suponga que el agua admitida entra sin velocidad horizontal relativa con respecto al agua. La razón máxima de flujo másico del agua a través del motor es de 2.5 slug/s. La resistencia hidrodinámica ejerce sobre la lancha una fuerza de $1.5v$ lb, donde v es la velocidad de la lancha en pie/s. Si se ignora la resistencia aerodinámica, ¿cuál es la velocidad máxima de la lancha?



P5.129

5.130 La lancha del Prob. 5.129 pesa 2800 lb. La velocidad de flujo másico del agua que pasa por su motor es de 2.5 slug/s, y parte del reposo en $t = 0$. Determine la velocidad de la lancha (a) en $t = 20$ s; (b) en $t = 60$ s.

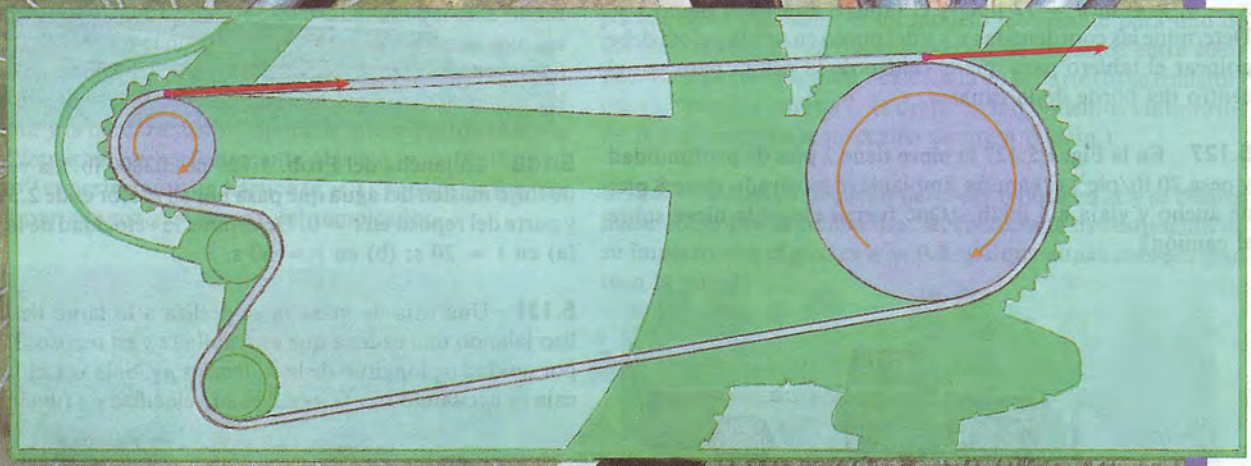
5.131 Una caja de masa m se desliza a lo largo de un piso liso jalando una cadena que está apilada y en reposo. La masa por unidad de longitud de la cadena es ρ_L. Si la velocidad de la caja es v_0 cuando $s = 0$, ¿cuál es su velocidad en función de s?



P5.131

Proyecto 5.1 Efectuando mediciones, determine el coeficiente de restitución de una pelota de tenis que rebota sobre una superficie rígida. Trate de determinar si su resultado es independiente de la velocidad de la pelota. Describa su procedimiento y comente las posibles fuentes de error.

El engrane acoplado determina la relación de la velocidad angular de los pedales y la rueda dentada motriz con la de la rueda trasera de la bicicleta. La relación entre el radio de la rueda motriz y el del piñón trasero es igual a la relación entre la velocidad angular de la rueda y la de los pedales. En el presente capítulo obtendremos resultados de este tipo modelando objetos como cuerpos rígidos.



Capítulo 6

Cinemática plana de cuerpos rígidos

HASTA ahora hemos considerado situaciones en que el movimiento del centro de masa de un cuerpo se podía determinar con la segunda ley de Newton. Sin embargo, suele ser necesario determinar el movimiento rotacional de un cuerpo, aun cuando el único objetivo sea determinar el movimiento de su centro de masa. Además, el movimiento rotacional en sí puede ser de interés o incluso ser fundamental en el caso que se considere, como ocurre en los movimientos de engranes, generadores, turbinas y giróscopos.

En este capítulo analizamos la **cinemática** de cuerpos, es decir, la descripción y el análisis del movimiento de los cuerpos sin considerar las fuerzas y pares que lo generan. En particular, mostraremos la forma como los movimientos de puntos individuales de un cuerpo se relacionan con su movimiento angular.

6.1 *Cuerpos rígidos y tipos de movimiento*

Si se lanza un ladrillo (Fig. 6.1a), se puede determinar el movimiento de su centro de masa sin tener que considerar su movimiento rotacional. La única fuerza significativa es su peso, y la segunda ley de Newton determina la aceleración de su centro de masa. Sin embargo, suponga que el ladrillo está parado sobre el piso y usted lo vuelca (Fig. 6.1b) porque desea determinar el movimiento de su centro de masa al caer. En este caso el ladrillo está sometido a su peso y a una fuerza ejercida por el piso. No se puede determinar la fuerza ejercida por el piso ni el movimiento del centro de masa sin analizar su movimiento rotacional.

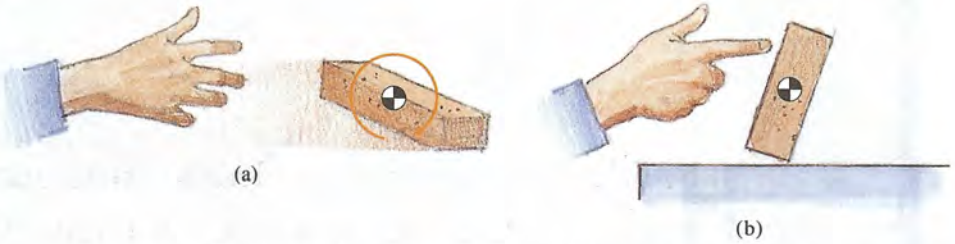


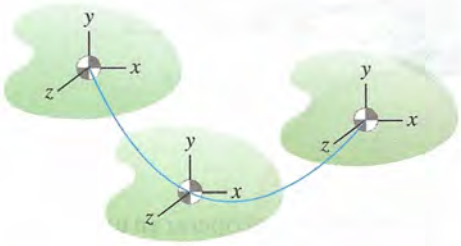
Figura 6.1
(a) Lanzamiento de un ladrillo; su rotación no afecta el movimiento de su centro de masa.
(b) Volcamiento de un ladrillo; la rotación y el movimiento del centro de masa están relacionados.

Antes de analizar tales movimientos, debemos considerar cómo describirlos. Un ladrillo es un ejemplo de cuerpo cuyo movimiento se puede describir tratándolo como cuerpo rígido. Un **cuerpo rígido** es un modelo idealizado de un cuerpo que no se deforma. La definición precisa es que la distancia entre todo par de puntos del cuerpo rígido permanece constante. Si bien cualquier cuerpo se deforma al moverse, si su deformación es pequeña *su movimiento puede aproximarse modelándolo como cuerpo rígido*. Por ejemplo, un bastón se puede modelar en su uso normal como cuerpo rígido (Fig. 6.2a), no así una caña de pescar (Fig. 6.2b).

Para describir el movimiento de un cuerpo rígido basta con describir el movimiento de un solo punto, como su centro de masa, y el movimiento rotacional del cuerpo alrededor de ese punto. Algunos tipos particulares de movimientos ocurren con frecuencia en ciertas aplicaciones. Como ayuda para visuarlizarlos usamos un sistema coordenado que se mueve junto con el cuerpo rígido. Tal sistema coordenado se llama **fijo al cuerpo**.

Figura 6.2
(a) Un bastón se puede modelar como un cuerpo rígido.
(b) Una vara de pescar es demasiado flexible para modelarla como un cuerpo rígido.

Traslación Si un cuerpo rígido en movimiento no gira, se dice que está en **traslación**. Cada punto de un cuerpo rígido en traslación tiene la misma velocidad y aceleración, por lo que el movimiento del cuerpo rígido se puede describir completamente si se describe el movimiento de un punto de él. El punto se puede mover en línea recta o en forma curvilínea. Las direcciones de los ejes de un sistema coordenado fijo al cuerpo permanecen constantes (Fig. 6.3a). Por ejemplo, el columpio del niño de la Fig. 6.3(b) está diseñado para trasladarse, de manera que sea más fácil columpiarse en él. Cada punto del columpio se mueve en una trayectoria circular, pero sin girar, por lo que permanece a nivel.

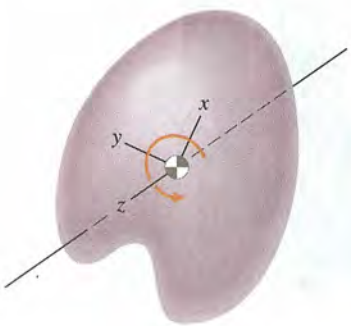


(a)

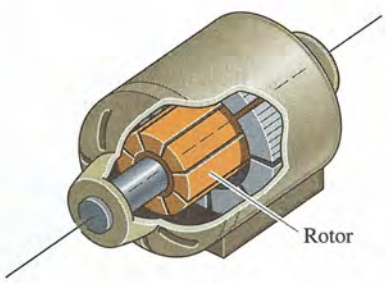
(b)

Figura 6.3
(a) Un cuerpo en traslación no gira.
(b) El columpio en traslación permanece a nivel.

Rotación respecto a un eje fijo Después de la traslación, el tipo más sencillo de movimiento de cuerpo rígido es la rotación alrededor de un eje fijo. Por ejemplo, en la Fig. 6.4(a) el eje z del sistema coordenado fijo al cuerpo permanece fijo y los ejes x y y giran alrededor del eje z. Cada punto del cuerpo rígido que no esté sobre el eje se mueve en una trayectoria circular alrededor de él. Un disco en un tocadiscos y el rotor de un motor eléctrico (Fig. 6.4b) son ejemplos de cuerpos que giran alrededor de un eje fijo. El movimiento de la hélice de un barco *relativo al barco* también es una rotación respecto a un eje fijo. En la siguiente sección analizaremos con más detalle este tipo de movimiento.

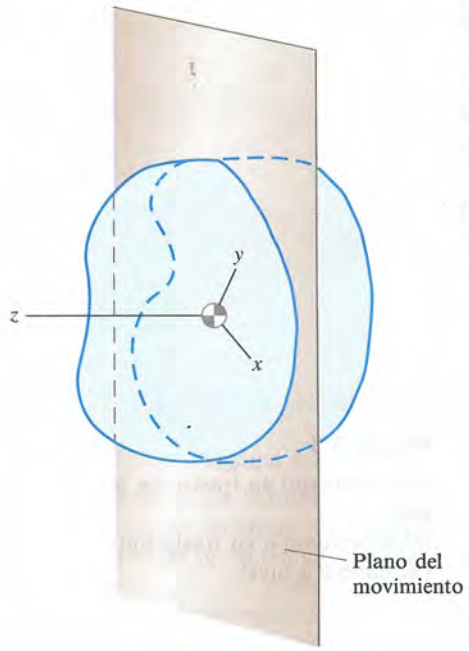


(a)



(b)

Figura 6.4
(a) Cuerpo rígido que gira alrededor del eje z.
(b) Si el bastidor del motor está fijo, su rotor gira alrededor de un eje fijo.



(a)

(b)

Figura 6.5

(a) Movimiento plano o bidimensional.
(b) Rueda en movimiento plano.

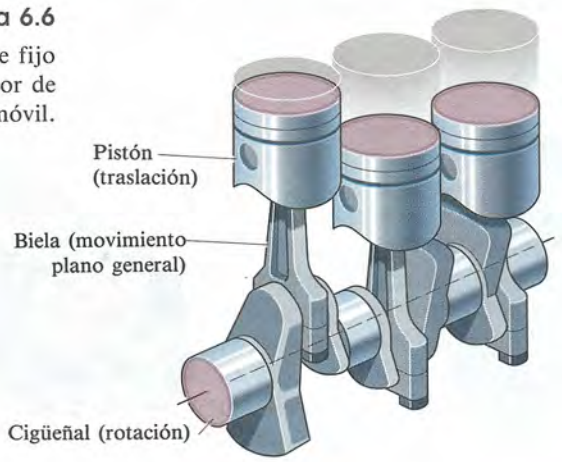
Movimiento bidimensional En este capítulo estudiaremos los movimientos bidimensionales de cuerpos rígidos. Un cuerpo rígido está sometido a un movimiento **plano o bidimensional** si su centro de masa se mueve en un plano fijo y un eje del sistema coordenado fijo al cuerpo permanece perpendicular al plano (Fig. 6.5a). El plano fijo es el **plano del movimiento**. La rotación de un cuerpo rígido respecto a un eje fijo es un caso especial del movimiento bidimensional. Cuando un auto sigue una trayectoria recta, sus ruedas están en movimiento bidimensional (Fig. 6.5b).

Las partes de un motor de combustión interna, al operar en un dispositivo de pruebas, ilustran esos tres tipos de movimiento (Fig. 6.6). Los pistones se trasladan dentro de los cilindros. Las bielas están en movimiento bidimensional, y el cigüeñal gira alrededor de un eje fijo.

En la siguiente sección empezamos a estudiar el movimiento de un cuerpo rígido analizando la rotación respecto a un eje fijo. Aquí, los puntos del cuerpo se mueven en trayectorias circulares respecto al eje, y podemos usar los resultados del Cap. 2 para el movimiento de un punto en una trayectoria circular. Usando las componentes normal y tangencial, expresamos la velocidad y la aceleración de un punto del cuerpo rígido en términos de la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo. Luego veremos el movimiento bidimensional general y obtendremos expresiones que relacionan la velocidad y la aceleración relativas de puntos de un cuerpo rígido con su velocidad y aceleración angulares. Con ellas analizaremos ejemplos del movimiento bidimensional general, como el rodamiento, y los movimientos de cuerpos rígidos conectados.

Figura 6.6

Traslación, rotación respecto a un eje fijo y movimiento plano en un motor de automóvil.



6.2 Rotación respecto a un eje fijo

Podemos presentar algunos de los conceptos implícitos en la descripción del movimiento de un cuerpo rígido considerando primero un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo. Imaginemos una línea recta fija al cuerpo dentro de él que sea perpendicular al eje fijo. Para describir la posición del cuerpo, o su **orientación** respecto al eje, se especifica el ángulo θ entre esa línea y una dirección de referencia (Fig. 6.7). La **velocidad angular** ω, o razón de giro, del cuerpo y su **aceleración angular** α son

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{6.1}$$

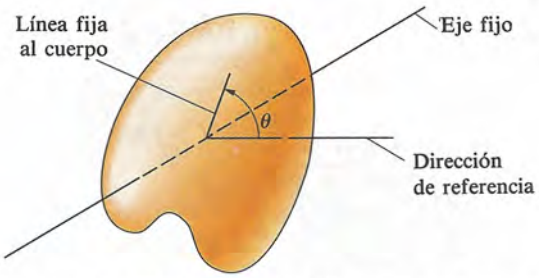


Figura 6.7
Especificación de la orientación de un cuerpo que gira respecto a un eje fijo.

Cada punto que no está sobre el eje fijo se mueve en una trayectoria circular alrededor de él. Con nuestro conocimiento del movimiento de un punto en una trayectoria circular, podemos relacionar la velocidad y la aceleración de un punto con la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo. En la Fig. 6.8 vemos el cuerpo en dirección paralela al eje fijo. La velocidad de un punto a una distancia r del eje es tangente a su trayectoria (Fig. 6.8a) y está dada, en términos de la velocidad angular del cuerpo, por

$$v = r\omega. \tag{6.2}$$

Un punto tiene componentes de aceleración tangencial y normal a su trayectoria circular (Fig. 6.8b). En términos de la velocidad y de la aceleración angulares del cuerpo, las componentes están dadas por

$$a_t = r\alpha, \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2. \tag{6.3}$$

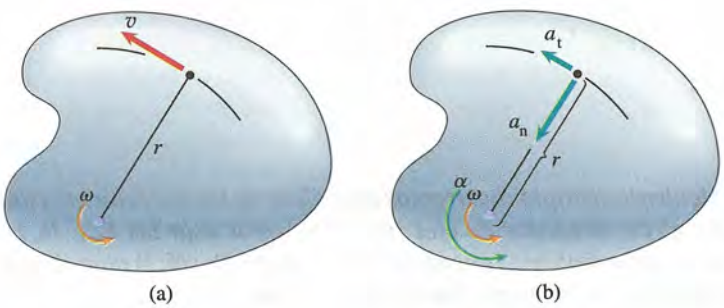


Figura 6.8
(a) Velocidad y (b) aceleración de un punto de un cuerpo rígido que gira respecto a un eje fijo.

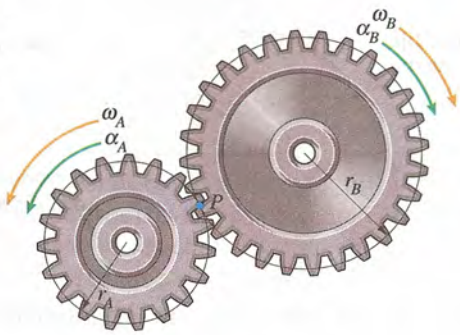
Con estas relaciones podemos analizar problemas de cuerpos que giran alrededor de ejes fijos. Por ejemplo, supongamos que conocemos la velocidad angular ω_A y la aceleración angular α_A del engrane izquierdo de la Fig. 6.9, y queremos determinar ω_B y α_B. Como las velocidades de los engranes deben ser iguales en P (no hay movimiento relativo entre ellos en P),

$$r_A\omega_A = r_B\omega_B,$$

por lo que $\omega_B = (r_A/r_B)\omega_A$. Derivando respecto al tiempo esta ecuación o igualando las componentes tangenciales de la aceleración en P, obtenemos $\alpha_B = (r_A/r_B)\alpha_A$.

Figura 6.9

Relación entre las velocidades angulares y las aceleraciones angulares de engranes acoplados.



En el siguiente ejemplo mostramos el análisis de los movimientos de cuerpos que giran alrededor de ejes fijos. Podemos usar las Ecs. (6.1) para analizar los movimientos angulares y las Ecs. (6.2) y (6.3) para determinar las velocidades y las aceleraciones de puntos.

Ejemplo 6.1

El engrane A del malacate de la Fig. 6.10 hace girar a B, que eleva el gancho H. Si A parte del reposo en $t = 0$ y su aceleración angular horaria es $\alpha_A = 0.2t$ rad/s^2, calcule la distancia vertical que se eleva H y su velocidad en $t = 10$ s.

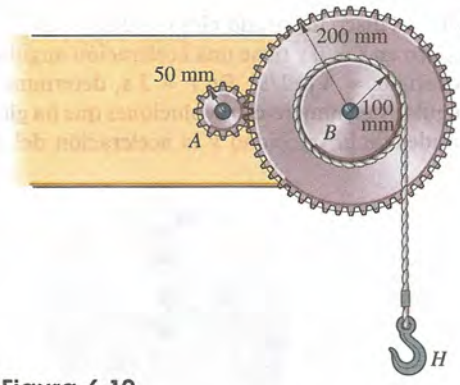


Figura 6.10

ESTRATEGIA

Igualando las componentes tangenciales de la aceleración de los engranes A y B en sus puntos de contacto, podemos determinar la aceleración angular del engrane B. Luego podemos integrar para obtener la velocidad angular del engrane B y el ángulo que ha girado en $t = 10$ s.

SOLUCIÓN

La aceleración tangencial del punto de contacto de los dos engranes (Fig. a) es

$$a_t = (0.05 \text{ m})(0.2t \text{ rad/s}^2) = (0.2 \text{ m})(\alpha_B).$$

Por tanto, la aceleración angular del engrane B es

$$\alpha_B = \frac{d\omega_B}{dt} = \frac{(0.05 \text{ m})(0.2t \text{ rad/s}^2)}{(0.2 \text{ m})} = 0.05t \text{ rad/s}^2.$$

Integrando esta ecuación,

$$\int_0^{\omega_B} d\omega_B = \int_0^t 0.05t \, dt,$$

obtenemos la velocidad angular del engrane B:

$$\omega_B = \frac{d\theta_B}{dt} = 0.025t^2 \text{ rad/s}.$$

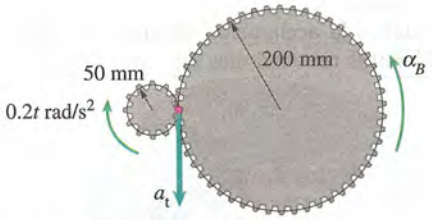
Integrando de nuevo obtenemos el ángulo que ha girado el engrane B:

$$\theta_B = 0.00833t^3 \text{ rad}.$$

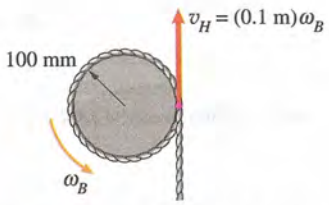
En $t = 10$ s, $\theta_B = 8.33$ rad. La longitud de cable enrollado en el tambor, que es la distancia que el gancho H se ha elevado, es el producto de θ_B por el radio del tambor: (8.33 rad)(0.1 m) = 0.833 m.

En $t = 10$ s, $\omega_B = 2.5$ rad/s. La velocidad de un punto sobre el borde, que es igual a la velocidad del gancho H (Fig. b), es

$$v_H = (0.1 \text{ m})(2.5 \text{ rad/s}) = 0.25 \text{ m/s}.$$



(a) Las aceleraciones tangenciales de los engranes son iguales en sus puntos de contacto.



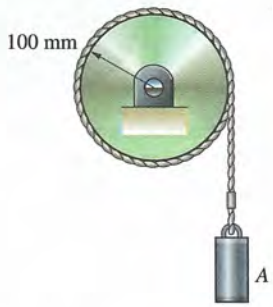
(b) Determinación de la velocidad del gancho.

Problemas

6.1 El disco mostrado gira respecto al árbol fijo O. Parte del reposo en $t = 0$ y tiene una aceleración angular constante antihoraria $\alpha = 4$ rad/s^2. En $t = 5$ s, determine (a) su velocidad angular y el número de revoluciones que ha girado; (b) las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto A.

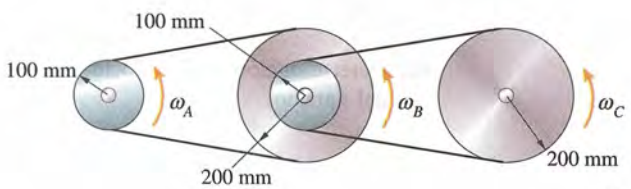
P6.1

6.2 En la Fig. P6.2, el peso A parte del reposo en $t = 0$ y cae con una aceleración constante de 2 m/s^2, ocasionando que el disco gire.
(a) ¿Cuál es la aceleración angular del disco?
(b) ¿Cuántas revoluciones ha girado el disco en $t = 1$ s?



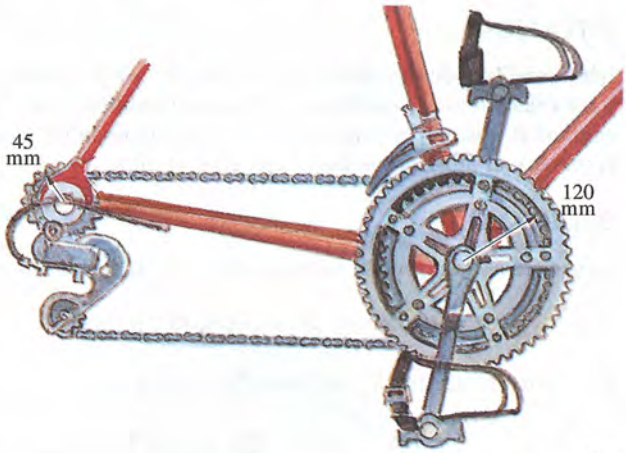
P6.2

6.3 Determine ω_B/ω_A y ω_C/ω_A de la Fig. P6.3.



P6.3

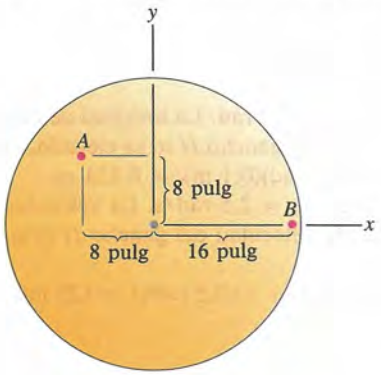
6.4 En Fig. P6.4, la rueda catalina de 120 mm de la bicicleta gira a 3 rad/s. ¿Cuál es la velocidad angular del engrane de 45 mm?



P6.4

6.5 La rueda trasera de la bicicleta del Prob. 6.4 tiene un radio de 330 mm y está rígidamente unida al engrane de 45 mm. Si el ciclista gira los pedales, que están rígidamente unidos a la rueda catalina de 120 mm, a una revolución por segundo, ¿cuál es la velocidad de la bicicleta?

6.6 El disco mostrado gira con velocidad angular constante antihoraria de 10 rad/s. ¿Cuál es la velocidad y aceleración del punto A con respecto al sistema coordenado que se muestra?

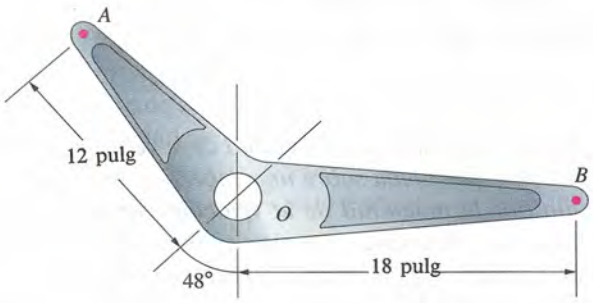


P6.6

6.7 En el Prob. 6.6, ¿cuáles son la velocidad y la aceleración del punto A respecto al punto B?

6.8 En el Prob. 6.6 suponga que el disco parte del reposo en la posición mostrada en $t = 0$ y que está sometido a una aceleración angular constante antihoraria de 6 rad/s^2. Determine la velocidad del punto B en el sistema coordenado de la figura en $t = 1$ s si tal sistema (a) está fijo al cuerpo; (b) permanece orientado con los ejes horizontal y vertical, como se muestra.

6.9 La ménsula mostrada gira alrededor del eje fijo en O. Si tiene una velocidad angular antihoraria de 20 rad/s y una aceleración angular horaria de 200 rad/s^2, ¿cuáles son las magnitudes de las aceleraciones de los puntos A y B?



P6.9

6.10 Considere la ménsula del Prob. 6.9. Si $|\mathbf{v}_A| = 10$ pie/s y $|\mathbf{a}_A| = 200$ pie/s^2, ¿qué valor tienen $|\mathbf{v}_B|$ y $|\mathbf{a}_B|$?

6.11 Considere la ménsula del Prob. 6.9. Si $|\mathbf{v}_A| = 36$ pulg/s y $|\mathbf{a}_B| = 600$ pulg/s^2, ¿qué valor tienen $|\mathbf{v}_B|$ y $|\mathbf{a}_A|$?

6.3 *Movimientos generales: velocidades*

Cada punto de un cuerpo rígido en traslación experimenta el mismo movimiento. Cada punto de un cuerpo rígido que gira respecto a un eje fijo experimenta un movimiento circular respecto a él. Para analizar movimientos más complejos que combinan traslación y rotación, debemos desarrollar ecuaciones que relacionen los movimientos relativos de puntos de un cuerpo rígido con su movimiento angular.

Velocidades relativas

En la Fig. 6.11(a) vemos un cuerpo rígido perpendicular al plano de movimiento. A y B son puntos del cuerpo contenidos en el plano, y O es un punto de referencia. La velocidad de A respecto a B se relaciona de manera sencilla con la velocidad angular del cuerpo. La posición de A respecto a B, $\mathbf{r}_{A/B}$, se relaciona con las de los puntos respecto a O mediante

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}.$$

Derivando respecto al tiempo esta ecuación obtenemos

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}, \tag{6.4}$$

donde $\mathbf{v}_{A/B} \doteq d\mathbf{r}_{A/B}/dt$ es la velocidad de A respecto a B. Como A y B son puntos del cuerpo rígido, la distancia entre ellos, $|\mathbf{r}_{A/B}|$, es constante. Esto significa que *al girar el cuerpo rígido, A se mueve en una trayectoria circular respecto a B* (Fig. 6.11b). La velocidad de A respecto a B es tangente a la trayectoria circular, y su valor es igual al producto de $|\mathbf{r}_{A/B}|$ por la velocidad angular ω del cuerpo rígido. Este resultado se puede usar para relacionar velocidades de puntos de un cuerpo rígido en movimiento bidimensional cuando se conoce su velocidad angular.

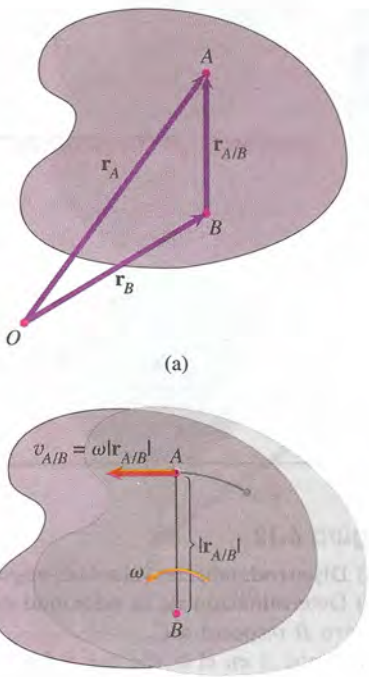


Figura 6.11

(a) Cuerpo rígido en movimiento bidimensional.
(b) El movimiento visto por un "observador" estacionario respecto a B.

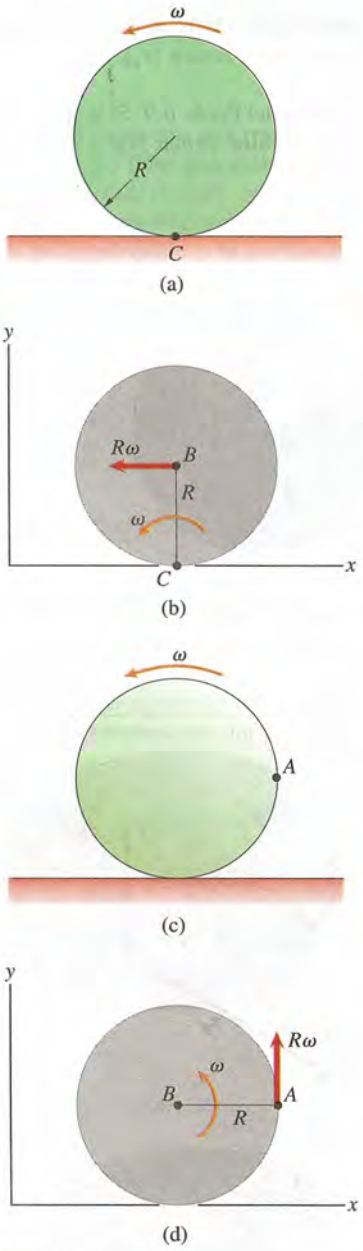


Figura 6.12

(a) Disco rodando con velocidad angular ω.
(b) Determinación de la velocidad del centro B respecto a C.
(c) Punto A en el borde del disco.
(d) Determinación de la velocidad de A respecto a B.

Por ejemplo, sea un disco circular de radio R que rueda sobre una superficie plana estacionaria con velocidad angular antihoraria ω (Fig. 6.12a). **Rodar** implica que la velocidad del disco en su punto de contacto C respecto a la superficie es cero. Sea B el centro del disco. *Respecto a C*, el punto B se mueve en una trayectoria circular de radio R (Fig. 6.12b). En el sistema coordenado que se muestra, la velocidad de B respecto a C es $\mathbf{v}_{B/C} = -R\omega\mathbf{i}$. Como la velocidad de C es cero, la de B es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C} = -R\omega\,\mathbf{i}.$$

Vale la pena recordar este resultado: *La magnitud de la velocidad del centro de un cuerpo redondo que rueda sobre una superficie estacionaria es el producto del radio por la magnitud de la velocidad angular.*

Podemos calcular así la velocidad de cualquier otro punto del disco. Consideremos el punto A de la Fig. 6.12(c). Respecto al centro B, el punto A se mueve en una trayectoria circular de radio R, por lo que la velocidad relativa $\mathbf{v}_{A/B} = R\omega\mathbf{j}$ (Fig. 6.12d). Por tanto, la velocidad de A es

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} = -R\omega\,\mathbf{i} + R\omega\,\mathbf{j}.$$

Vector de velocidad angular

Podemos expresar la razón de rotación de un cuerpo rígido como un vector. El **teorema de Euler** establece que un cuerpo rígido restringido a girar alrededor de un punto fijo B, puede moverse entre dos posiciones cualesquiera con una simple rotación respecto a algún eje que pase por B. Elijamos un punto arbitrario B de un cuerpo rígido sometido a un movimiento *arbitrario* en un tiempo t. El teorema de Euler nos permite expresar el cambio en la posición respecto a B del cuerpo entre de t y $t + dt$ como una simple rotación a través de un ángulo $d\theta$ respecto a algún eje. En t, la razón de giro del cuerpo respecto al eje es su velocidad angular $\omega = d\theta/dt$, y el eje alrededor del cual gira se llama **eje instantáneo de rotación**.

El **vector de velocidad angular**, denotado por $\boldsymbol{\omega}$, especifica la dirección del eje instantáneo de rotación y la velocidad angular. Se define paralelo al eje instantáneo de rotación (Fig. 6.13a) y su magnitud es la razón de rotación, o sea, el valor absoluto de ω. Su dirección está relacionada con la dirección de la rotación del cuerpo rígido por la regla de la mano derecha: si el pulgar de la mano derecha apunta hacia $\boldsymbol{\omega}$, los dedos se enrollan alrededor de $\boldsymbol{\omega}$ en la dirección de la rotación (Fig. 6.13b).

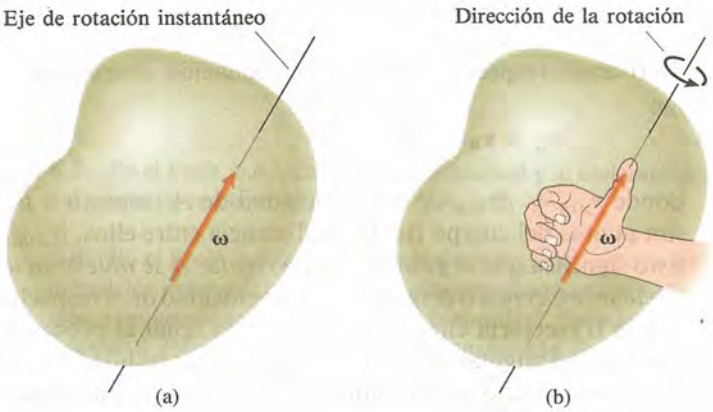


Figura 6.13

(a) Vector de velocidad angular.
(b) Regla de la mano derecha para la dirección del vector.

Por ejemplo, el eje de rotación del disco rodante de la Fig. 6.12 es paralelo al eje z, por lo que su vector de velocidad angular es paralelo al eje z y su magnitud es ω. Si los dedos de la mano derecha se enrollan alrededor del eje z en la dirección de la rotación, el pulgar apuntará en la dirección z positiva (Fig. 6.14). El vector de velocidad angular del disco es $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$.

El vector de velocidad angular permite expresar los resultados de la sección anterior en una forma muy conveniente. Sean A y B puntos de un cuerpo rígido con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 6.15a). Podemos demostrar que la velocidad de A respecto a B es

$$\mathbf{v}_{A/B} = \frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}. \tag{6.5}$$

Respecto a B, el punto A se mueve en el instante presente en una trayectoria circular de radio $|\mathbf{r}_{A/B}|$ sen β, donde β es el ángulo entre los vectores $\mathbf{r}_{A/B}$ y $\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 6.15b). La magnitud de la velocidad de A respecto a B es igual al producto del radio de la trayectoria circular por la velocidad angular del cuerpo rígido, $|\mathbf{v}_{A/B}| = (|\mathbf{r}_{A/B}| \text{ sen } \beta)|\boldsymbol{\omega}|$, que es la magnitud del producto vectorial de $\mathbf{r}_{A/B}$ por $\boldsymbol{\omega}$. Además, $\mathbf{v}_{A/B}$ es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ y a $\mathbf{r}_{A/B}$ pero, ¿es $\mathbf{v}_{A/B}$ igual a $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$ o a $\mathbf{r}_{A/B} \times \boldsymbol{\omega}$? En la Fig. 6.15(b) observe que, apuntando con los dedos de la mano derecha en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ y cerrándolos hacia $\mathbf{r}_{A/B}$, el pulgar apunta hacia la velocidad de A respecto a B, por lo que $\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$. Sustituyendo la Ec. (6.5) en la Ec. (6.4), obtenemos una ecuación para la relación entre las velocidades de dos puntos de un cuerpo rígido en función de su velocidad angular:

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}}_{\mathbf{v}_{A/B}}.} \tag{6.6}$$

Volvamos al ejemplo del disco de radio R que rueda con velocidad angular ω (Fig. 6.16), y usemos la Ec. (6.6) para determinar la velocidad del punto A. La velocidad del centro del disco está dada en función de su velocidad angular por $\mathbf{v}_B = -R\omega\mathbf{i}$, el vector de velocidad angular del disco es $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, y el vector de posición de A respecto al centro es $\mathbf{r}_{A/B} = R\mathbf{i}$. La velocidad de A es

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B} = -R\omega\mathbf{i} + (\omega\mathbf{k}) \times (R\mathbf{i})$$

$$= -R\omega\mathbf{i} + R\omega\mathbf{j}.$$

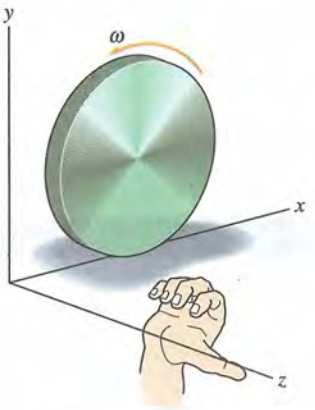


Figura 6.14
Determinación de la dirección del vector de velocidad angular de un disco rodando.

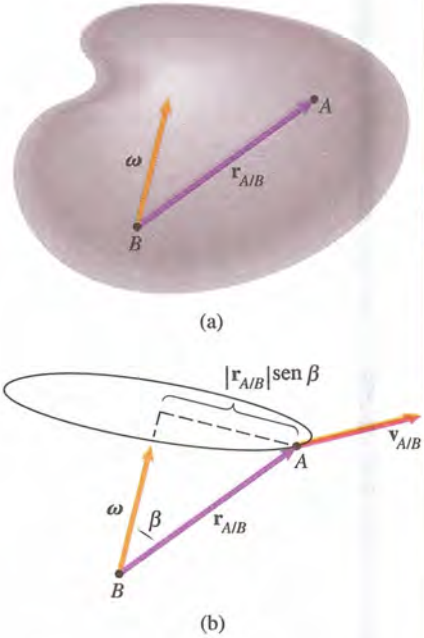


Figura 6.15
(a) Puntos A y B de un cuerpo rígido en rotación.
(b) A se mueve en una trayectoria circular respecto a B.

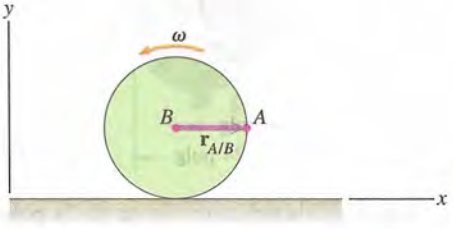


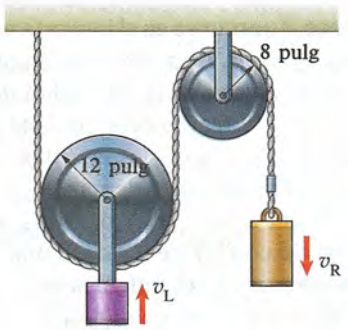
Figura 6.16
Disco en rotación y vector de posición de A respecto a B.

Los siguientes ejemplos muestran cómo aplicar la Ec. (6.6). Si se conoce la velocidad de un punto, se pueden expresar las velocidades de otros puntos de un cuerpo rígido en función de su velocidad angular. Repitiendo este paso para diferentes puntos, se pueden analizar los movimientos de sistemas formados por cuerpos rígidos conectados.

Ejemplo 6.2

En la Fig. 6.17, si la velocidad v_R es de 36 pulg/s ¿cuál es la velocidad v_L?

Figura 6.17



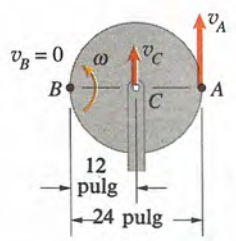
ESTRATEGIA

El centro de la polea derecha está fijo, por lo que la parte vertical del cable entre las dos poleas se mueve hacia arriba con velocidad v_R. El punto de la polea izquierda en contacto con esa parte del cable se mueve hacia arriba con la misma velocidad. La parte vertical del cable conectado al techo es fija, por lo que el punto de la polea izquierda en contacto con esa parte del cable también es fijo. Así, conocemos las velocidades de dos puntos de la polea izquierda. Usando esta información, podemos determinar su velocidad angular y luego la velocidad de su centro, que es igual a la velocidad v_L.

SOLUCIÓN

La velocidad del punto A de la polea izquierda de la Fig. (a) es $v_A = 36$ pulg/s, y la velocidad del punto B es cero. Con respecto a B, el punto A se mueve en una trayectoria circular con la velocidad angular ω de la polea izquierda, es decir,

$$v_A = 36 \text{ pulg/s} = (24 \text{ pulg})\omega,$$



(a) Análisis del movimiento de la polea izquierda.

y la velocidad angular de la polea izquierda es $\omega = 36/24 = 1.5$ rad/s. El punto C, que es el centro de la polea, también se mueve respecto a B en una trayectoria circular con velocidad angular ω, es decir,

$$v_C = v_L = (12 \text{ pulg})\omega = (12)(1.5) = 18 \text{ pulg/s}.$$

También podemos obtener este resultado con la Ec. (6.6). En el sistema coordenado de la Fig. (b), $\mathbf{v}_A = 36\mathbf{j}$ (pulg/s), $\mathbf{r}_{A/B} = 24\mathbf{i}$ (pulg), y el vector de velocidad angular de la polea es $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$. Por tanto

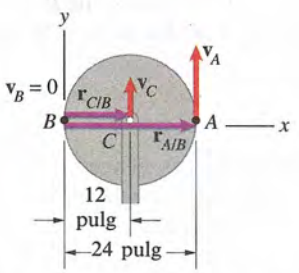
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}:$$

$$36\,\mathbf{j} = 0 + (\omega\,\mathbf{k}) \times (24\,\mathbf{i}) = 24\omega\,\mathbf{j}.$$

De esta ecuación obtenemos $\omega = 36/24 = 1.5$ rad/s. La velocidad del centro de la polea es

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/B}$$

$$= 0 + (1.5\,\mathbf{k}) \times (12\,\mathbf{i}) = 18\,\mathbf{j} \text{ (pulg/s)}.$$



(b) Vectores de posición $\mathbf{r}_{A/B}$ y $\mathbf{r}_{C/B}$.

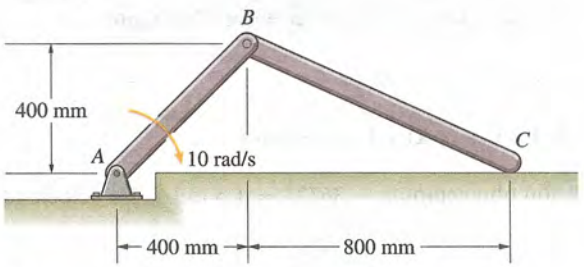
COMENTARIO

En este ejemplo, la geometría es tan sencilla que podemos relacionar con facilidad las velocidades del cable con las velocidades angulares de las poleas sin usar la Ec. (6.6). Esto no suele ser el caso. El siguiente ejemplo ilustra una situación que sería mucho más difícil de resolver sin usar la Ec. (6.6).

Ejemplo 6.3

La barra AB de la Fig. 6.18 gira con velocidad angular horaria de 10 rad/s. Determine la velocidad angular de la barra BC y la velocidad del punto C.

Figura 6.18



ESTRATEGIA

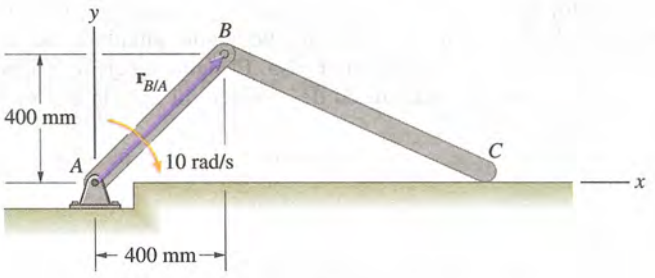
Como ya conocemos la velocidad angular de la barra AB y el punto A está fijo, podemos aplicar la Ec. (6.6) a los puntos A y B para determinar la velocidad de B. Luego, aplicando de nuevo la Ec. (6.6) para expresar la velocidad horizontal del punto C en función de la velocidad de B, obtenemos una ecuación vectorial con dos incógnitas: la velocidad de C y la velocidad angular de la barra BC.

SOLUCIÓN

En el sistema coordenado de la Fig. (a), el vector de posición de B respecto a A es $\mathbf{r}_{B/A} = 0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}$ (m). El vector de velocidad angular de la barra AB es $\omega_{AB} = -10\mathbf{k}$ (rad/s), por lo que la velocidad de B es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} = 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ 0.4 & 0.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} \text{ (m/s)}.$$



(a) Determinación de la velocidad de B.

Sea ω_{BC} la velocidad angular desconocida de la barra BC (Fig. b), por lo que su vector de velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}_{BC} = \omega_{BC}\,\mathbf{k}$. El vector de posición de C respecto a B es $\mathbf{r}_{C/B} = 0.8\mathbf{i} - 0.4\mathbf{j}$ (m). Aunque no conocemos la velocidad de C, sabemos que tiene dirección horizontal, por lo que podemos escribirla en la forma $\mathbf{v}_C = v_C\mathbf{i}$ (Fig. b). Expresamos la velocidad de C en función de la velocidad de B:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{B/C}.$$

Ahora sustituimos los valores de $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{r}_{B/C}$ y las expresiones para $\mathbf{v}_C$ y $\boldsymbol{\omega}_{BC}$ en esta ecuación, y obtenemos

$$v_C\,\mathbf{i} = 4\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ 0.8 & -0.4 & 0 \end{vmatrix}$$

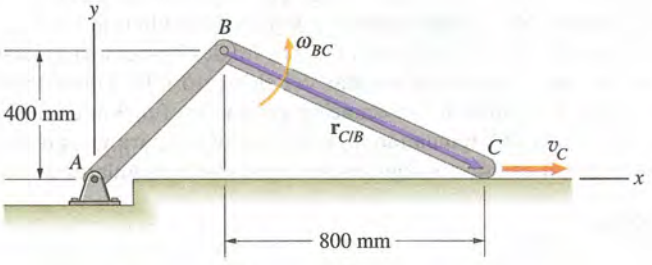
$$= 4\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 0.4\omega_{BC}\,\mathbf{i} + 0.8\omega_{BC}\,\mathbf{j}.$$

Igualando en esta ecuación las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ obtenemos dos ecuaciones:

$$v_C = 4 + 0.4\omega_{BC},$$

$$0 = -4 + 0.8\omega_{BC}.$$

Resolviéndolas obtenemos $\omega_{BC} = 5$ rad/s y $v_C = 6$ m/s.



(b) Expresión de $\mathbf{v}_C = v_C\mathbf{i}$ en función de $\mathbf{v}_B$.

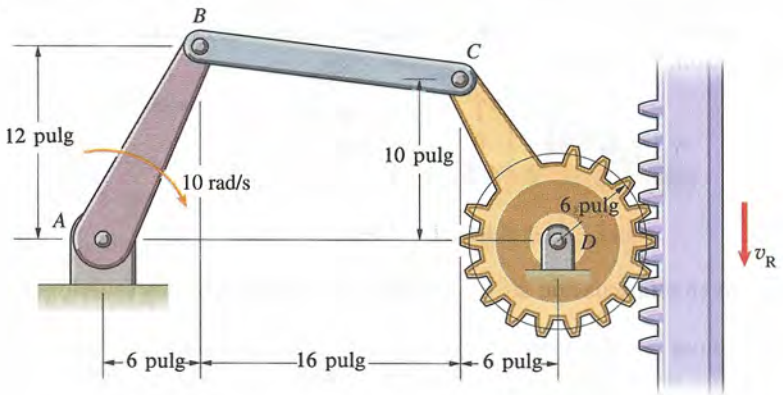
COMENTARIO

Expresando la velocidad de C en función de la velocidad de B, incluimos en la solución la condición de que el punto C se debe mover horizontalmente. Es decir, tomamos en cuenta la presencia del piso. El procedimiento en este ejemplo —aplicar sistemáticamente la Ec. (6.6) para relacionar las velocidades de las juntas con las velocidades angulares— es aplicable a muchos problemas en que se tienen que determinar velocidades y velocidades angulares de cuerpos rígidos conectados. Quizá se necesiten algunas pruebas de ensayo y error para encontrar las relaciones particulares requeridas.

Ejemplo 6.4

La barra AB de la Fig. 6.19 gira con una velocidad angular horaria de 10 rad/s. ¿Cuál es la velocidad vertical v_R de la cremallera del engrane de cremallera y piñón?

Figura 6.19



ESTRATEGIA

Para determinar la velocidad de la cremallera necesitamos la velocidad angular del elemento CD. Como conocemos la velocidad angular de la barra AB, podemos aplicar la Ec. (6.6) a los puntos A y B para determinar la velocidad de B. Luego podemos aplicar la Ec. (6.6) a C y D a fin de obtener una ecuación para $\mathbf{v}_C$ en función de la velocidad angular del elemento CD. También podemos aplicarla a B y C y obtener una ecuación para $\mathbf{v}_C$ en función de la velocidad angular de la barra BC. Igualando las dos expresiones para $\mathbf{v}_C$ obtenemos una ecuación vectorial con dos incógnitas: las velocidades angulares de BC y CD.

SOLUCIÓN

Primero aplicamos la Ec. (6.6) a los puntos A y B (Fig. a). En el sistema coordenado que se muestra, el vector de posición de B respecto a A es $\mathbf{r}_{B/A} = 0.5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ (pie), y el vector de velocidad angular de la barra AB es $\boldsymbol{\omega}_{AB} = -10\mathbf{k}$ (rad/s). La velocidad de B es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} = 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ 0.5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 10\mathbf{i} - 5\mathbf{j} \text{ (pie/s)}.$$

Aplicamos ahora la Ec. (6.6) a los puntos C y D. Sea ω_{CD} la velocidad angular desconocida del elemento CD (Fig. a). El vector de posición de C respecto a D es $\mathbf{r}_{C/D} = -0.500\mathbf{i} + 0.833\mathbf{j}$ (pies), y el vector de velocidad angular del elemento CD es $\boldsymbol{\omega}_{CD} = -\omega_{CD}\,\mathbf{k}$. La velocidad de C es

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega}_{CD} \times \mathbf{r}_{C/D} = 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\omega_{CD} \\ -0.500 & 0.833 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0.833\omega_{CD}\,\mathbf{i} + 0.500\omega_{CD}\,\mathbf{j}.$$

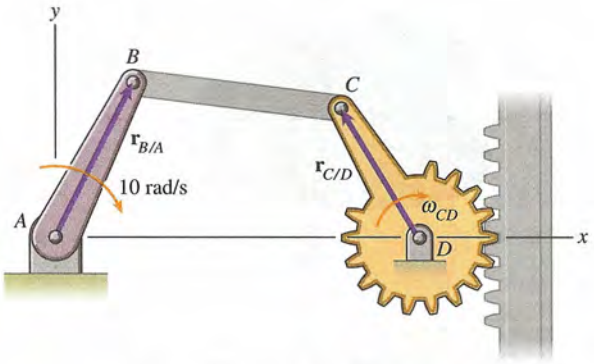
Ahora aplicamos la Ec. (6.6) a los puntos B y C (Fig. b). Denotamos con ω_{BC} la velocidad angular desconocida de la barra BC. El vector de posición de C respecto a B es $\mathbf{r}_{C/B} = 1.333\mathbf{i} - 0.167\mathbf{j}$ (pies), y el vector de velocidad angular de la barra BC es $\omega_{BC} = \omega_{BC}\,\mathbf{k}$. Expresando la velocidad de C en función de la velocidad de B obtenemos

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \omega_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} = \mathbf{v}_B + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ 1.333 & -0.167 & 0 \end{vmatrix}$$

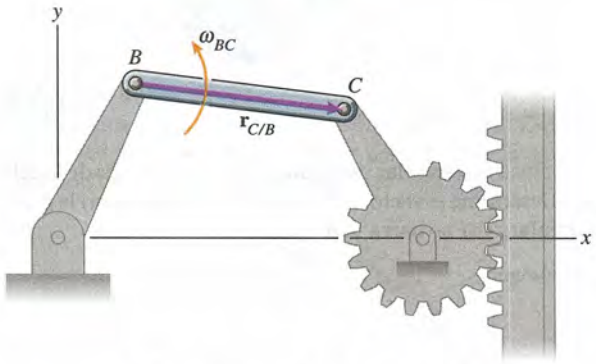
$$= \mathbf{v}_B + 0.167\omega_{BC}\,\mathbf{i} + 1.333\omega_{BC}\,\mathbf{j}.$$

Sustituyendo las expresiones para $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$ en esta ecuación, obtenemos

$$0.833\omega_{CD}\,\mathbf{i} + 0.500\omega_{CD}\,\mathbf{j} = 10\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 0.167\omega_{BC}\,\mathbf{i} + 1.333\omega_{BC}\,\mathbf{j}.$$



(a) Determinación de las velocidades de los puntos B y C.



(b) Expresión de la velocidad del punto C en función de la velocidad del punto B.

Igualando las componentes **i** y **j**, resultan dos ecuaciones que relacionan ω_{BC} con ω_{CD}:

$$0.833\omega_{CD} = 10 + 0.167\omega_{BC},$$

$$0.500\omega_{CD} = -5 + 1.333\omega_{BC}.$$

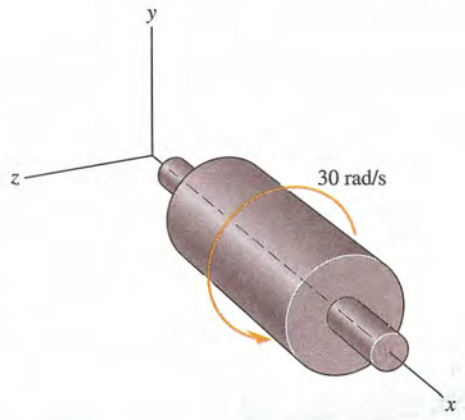
Resolviéndolas obtenemos $\omega_{BC} = 8.92$ rad/s y $\omega_{CD} = 13.78$ rad/s.

La velocidad vertical de la cremallera es igual a la velocidad del engrane en el punto en que éste se halla en contacto con la cremallera:

$$v_R = (0.5 \text{ pies})\omega_{CD} = (0.5)(13.78) = 6.89 \text{ pie/s}.$$

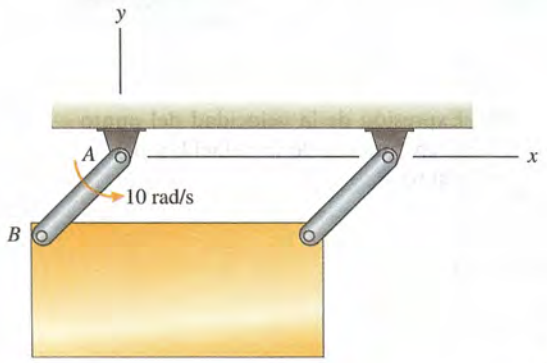
Problemas

6.12 Una turbina gira a 30 rad/s alrededor de un eje fijo que coincide con el eje x. ¿Cuál es el vector de velocidad angular?



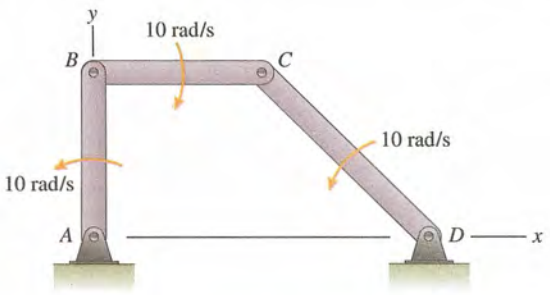
P6.12

6.13 La placa rectangular mostrada oscila con brazos de igual longitud. Determine el vector de velocidad angular de (a) la placa rectangular; (b) la barra AB.



P6.13

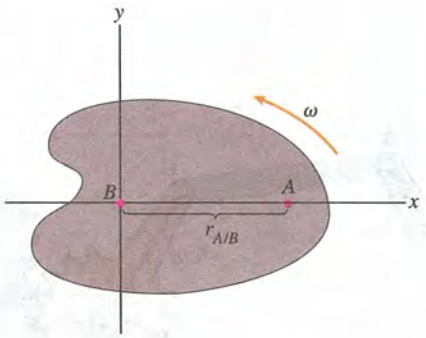
6.14 ¿Cuáles son los vectores de velocidad angular de cada barra del mecanismo mostrado?



P6.14

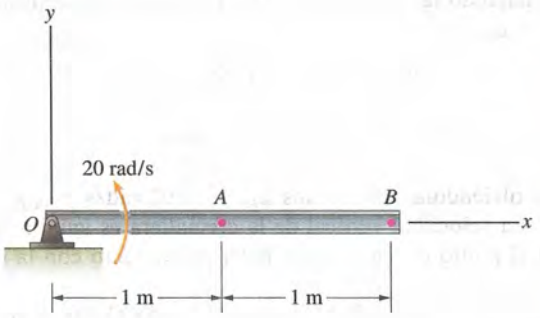
6.15 Si la Tierra se modela como un cuerpo rígido, ¿cuál es la magnitud de su vector de velocidad angular ω_E? ¿Apunta ω_E hacia el norte o hacia el sur?

6.16 El cuerpo rígido gira alrededor del eje z con velocidad angular ω antihoraria.
(a) ¿Cuál es su vector de velocidad angular?
(b) Use la Ec. (6.6) para determinar la velocidad del punto A respecto al punto B.



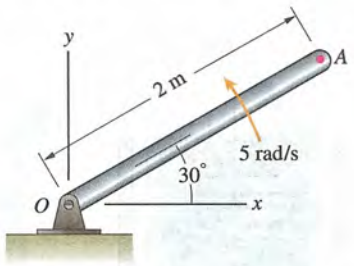
P6.16

6.17 (a) ¿Cuál es el vector de velocidad angular de la barra mostrada?
(b) Use la Ec. (6.6) para determinar la velocidad del punto B respecto al punto O.
(c) Use la Ec. (6.6) para determinar la velocidad del punto A respecto al punto B.



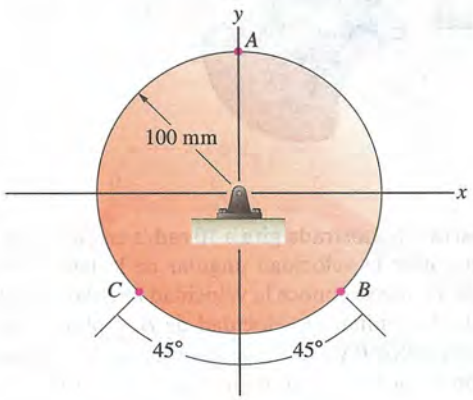
P6.17

6.18 (a) ¿Cuál es el vector de velocidad angular de la barra mostrada?
(b) Use la Ec. (6.6) para determinar la velocidad del punto A.



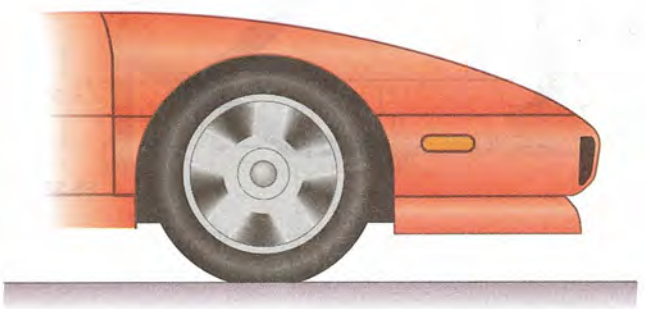
P6.18

6.19 En la Fig. P6.19 el disco gira respecto al eje z a 50 rad/s en dirección horaria. Use la Ec. (6.6) para determinar las velocidades de los puntos A, B y C.



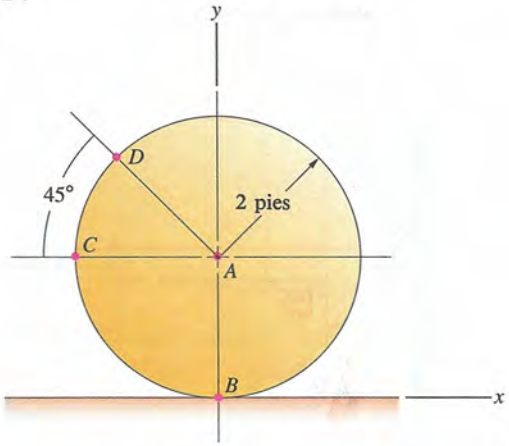
P6.19

6.20 El automóvil de la figura se mueve hacia la derecha a 100 km/h y sus neumáticos tienen 600 mm de diámetro.
(a) ¿Cuál es la velocidad angular de sus neumáticos?
(b) ¿Qué punto sobre el neumático tiene la máxima velocidad respecto al camino, y cuál es la magnitud de esa velocidad?



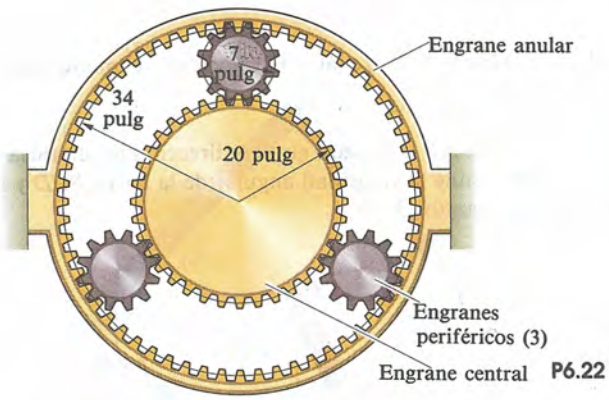
P6.20

6.21 El disco mostrado rueda sobre la superficie plana. El punto A se mueve hacia la derecha a 6 pie/s.
(a) ¿Cuál es el vector de velocidad angular del disco?
(b) Use la Ec. (6.6) para determinar las velocidades de los puntos B, C y D.



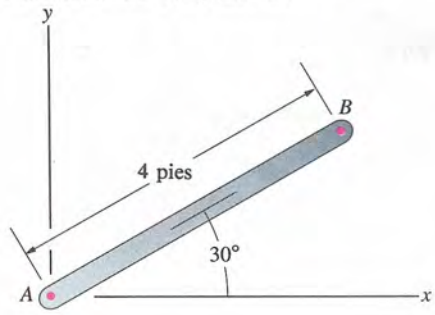
P6.21

6.22 En la Fig. P6.22 el engrane anular está fijo y el engrane central gira a 120 rpm en dirección antihoraria. Determine la velocidad angular de los engranes periféricos y la magnitud de la velocidad de sus puntos centrales.



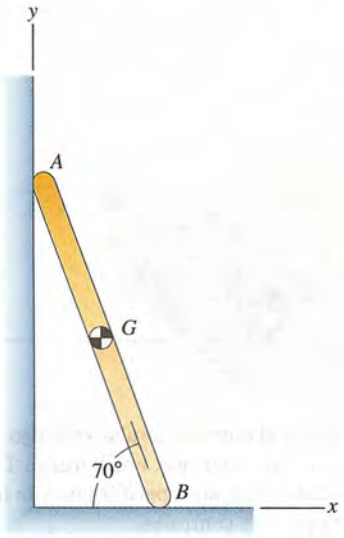
P6.22

6.23 La barra de la figura se halla en movimiento bidimensional en el plano x-y. La velocidad del punto A es $8\mathbf{i}$ (pie/s). La componente x de la velocidad del punto B es 6 pie/s.
(a) ¿Cuál es el vector de velocidad angular de la barra?
(b) ¿Cuál es la velocidad del punto B?



P6.23

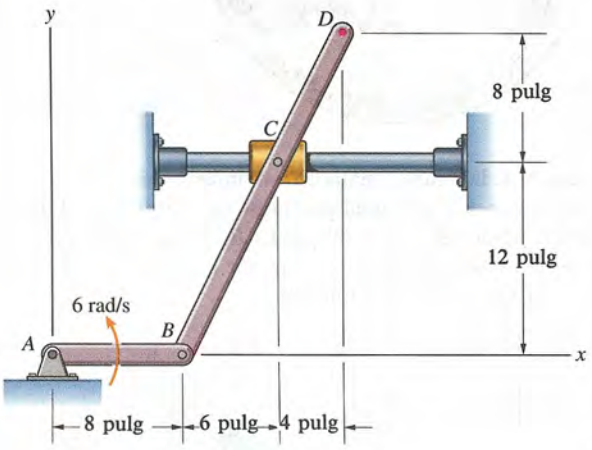
6.24 Los puntos A y B de la barra de 1 m mostrada se deslizan sobre las superficies planas. La velocidad del punto B es $2\mathbf{i}$ (m/s).
(a) ¿Cuál es el vector de velocidad angular de la barra?
(b) ¿Cuál es la velocidad del punto A?



P6.24

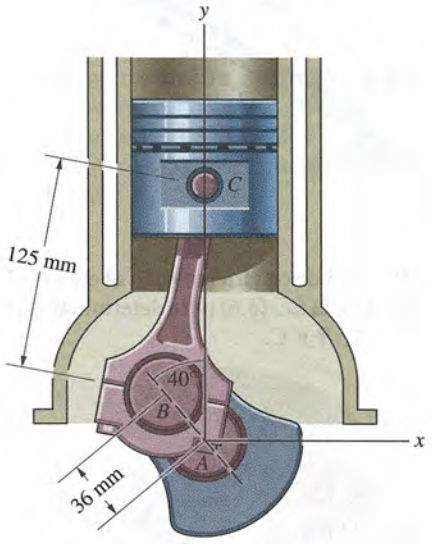
6.25 En el Prob. 6.24, ¿cuál es la velocidad del punto medio G de la barra?

6.26 La barra AB mostrada gira en dirección antihoraria a 6 rad/s. Determine la velocidad angular de la barra BCD y la velocidad del punto D.



P6.26

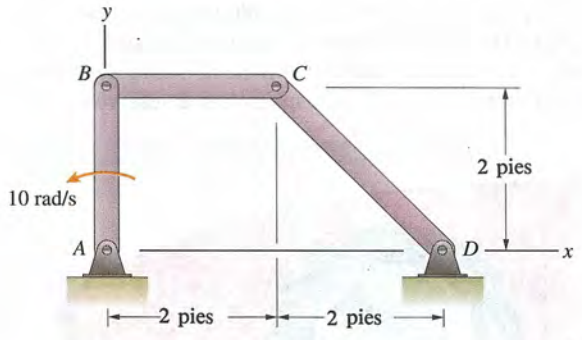
6.27 Si el cigüeñal AB de la figura gira a 6000 rpm en dirección antihoraria, ¿cuál es la velocidad del pistón en el instante mostrado?



P6.27

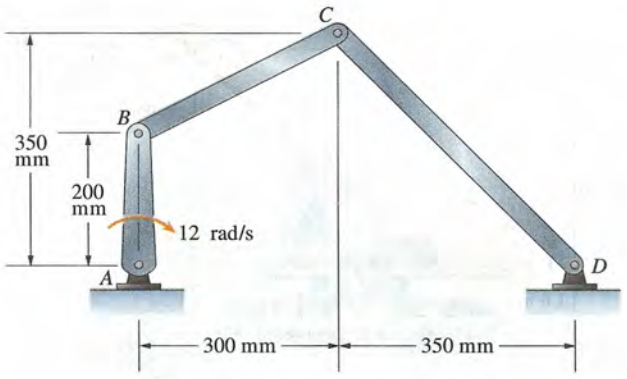
6.28 La barra AB mostrada gira a 10 rad/s en dirección antihoraria. Determine la velocidad angular de la barra CD.

Estrategia: Como se conoce la velocidad angular de la barra AB, se puede determinar la velocidad de B. Aplique luego la Ec. (6.6) a los puntos B y C a fin de obtener una ecuación para $\mathbf{v}_C$ en función de la velocidad angular de la barra BC, y aplíquela a los puntos C y D a fin de obtener una ecuación para $\mathbf{v}_C$ en función de la velocidad angular de la barra CD. Igualando las dos expresiones se obtiene una ecuación vectorial con dos incógnitas: las velocidades angulares de las barras BC y CD.



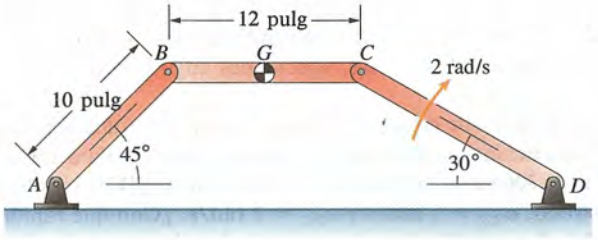
P6.28

6.29 La barra AB mostrada gira a 12 rad/s en dirección horaria. Determine las velocidades angulares de las barras BC y CD.



P6.29

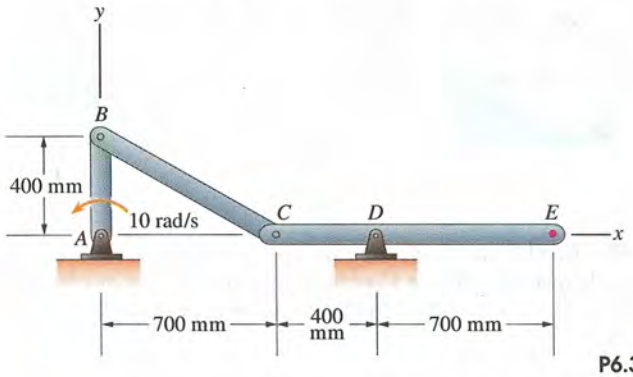
6.30 La barra CD mostrada gira a 2 rad/s en dirección horaria. Determine las velocidades angulares de las barras AB y BC.



P6.30

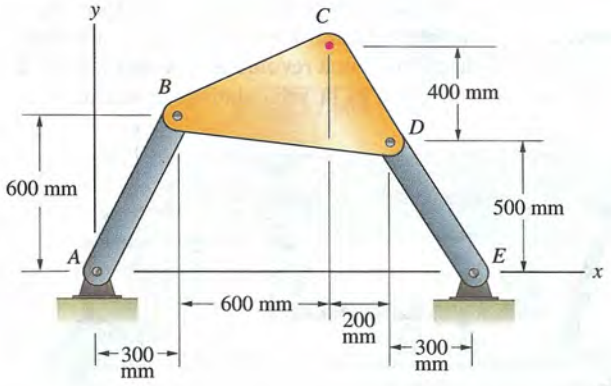
6.31 En el Prob. 6.30, ¿cuál es la magnitud de la velocidad del punto medio G de la barra BC?

6.32 La barra AB mostrada gira a 10 rad/s en dirección antihoraria. Determine la velocidad del punto E.



P6.32

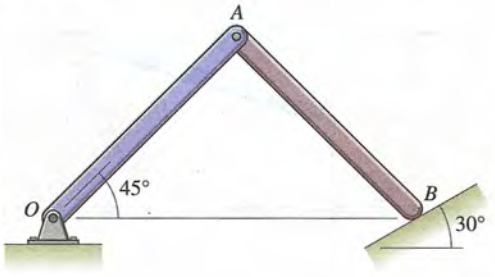
6.33 La barra AB mostrada gira a 4 rad/s en dirección antihoraria. Determine la velocidad del punto C.



P6.33

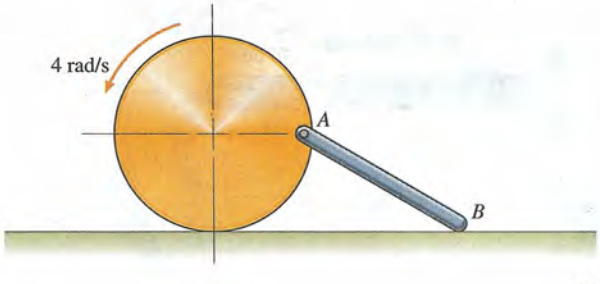
6.34 En el sistema del Prob. 6.33, si la magnitud de la velocidad del punto C es $|\mathbf{v}_C| = 2$ m/s, ¿cuáles son las magnitudes de las velocidades angulares de las barras AB y DE?

6.35 Cada una de las barras OA y AB de la figura tiene 2 pies de longitud. El punto B se desliza hacia arriba sobre la superficie inclinada a 10 pie/s. Determine las velocidades angulares de las barras.



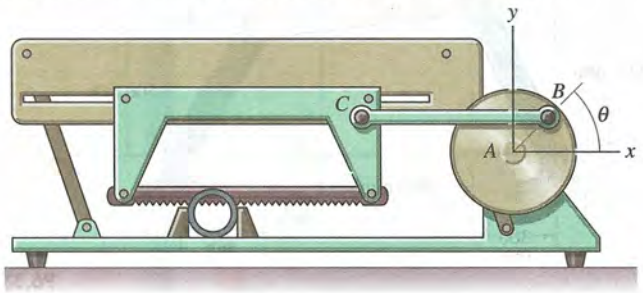
P6.35

6.36 En la Fig. P6.36, el diámetro del disco es de 1 m y la longitud de la barra AB es de 1 m. El disco está rodando y el punto B se desliza sobre la superficie plana. Determine la velocidad angular de la barra AB y la velocidad del punto B.



P6.36

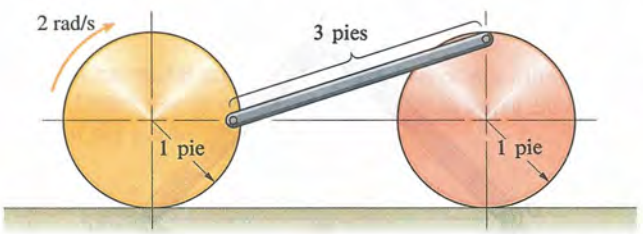
6.37 En la Fig. P6.37, un motor hace girar al disco montado en A, dando a la sierra un movimiento de vaivén. (La sierra está soportada por una ranura horizontal de modo que C se mueve horizontalmente.) El radio AB es de 4 pulg y el eslabón BC de 14 pulg. En la posición mostrada, $\theta = 45°$ y BC está en posición horizontal. Si el disco gira a una revolución por segundo en dirección antihoraria, ¿cuál es la velocidad de la sierra?



P6.37

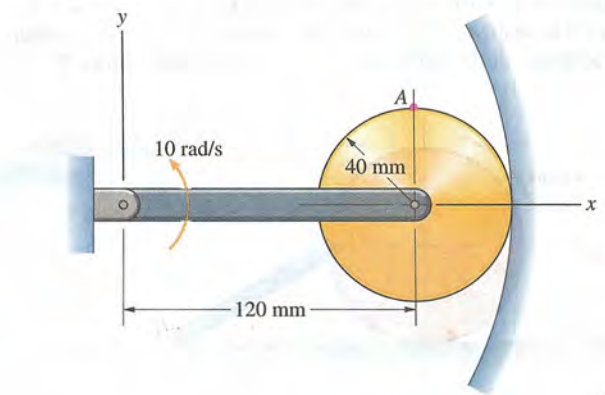
6.38 En el Prob. 6.37, si la velocidad angular del disco es de una revolución por segundo en dirección antihoraria y $\theta = 270°$, ¿cuál es la velocidad de la sierra?

6.39 Los discos mostrados ruedan sobre la superficie plana. La velocidad angular del disco izquierdo es de 2 rad/s en dirección horaria. ¿Cuál es la velocidad angular del disco derecho?



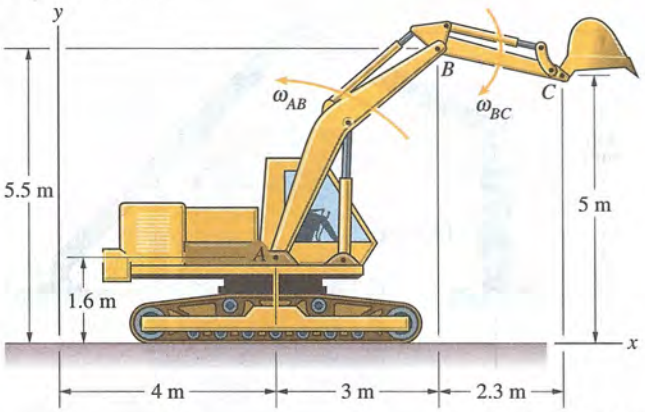
P6.39

6.40 El disco de la figura rueda sobre la superficie curva. La barra gira a 10 rad/s en dirección antihoraria. Determine la velocidad del punto A.



P6.40

6.41 En la Fig. P6.41, si $\omega_{AB} = 2$ rad/s y $\omega_{BC} = 4$ rad/s, ¿cuál es la velocidad del punto C, donde el cubo de la excavadora está conectado?

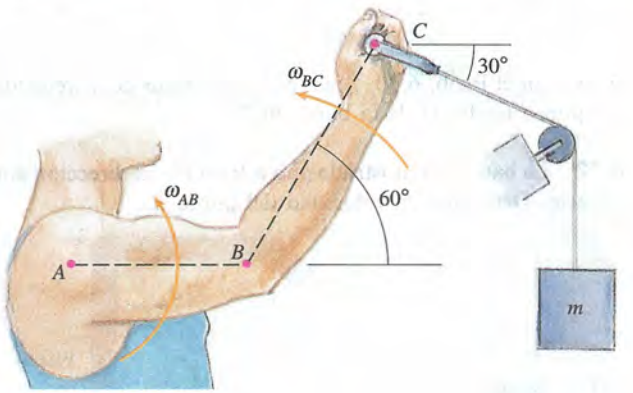


P6.41

6.42 En el Prob. 6.41, si $\omega_{AB} = 2$ rad/s, ¿qué velocidad angular horaria ω_{BC} hará que la componente vertical de la velocidad del punto C sea cerò? ¿Cuál es la velocidad resultante de C?

6.43 En Prob. 6.41, si la velocidad del punto C es $\mathbf{v}_C = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (m/s), ¿cuáles son las velocidades angulares ω_{AB} y ω_{BC}?

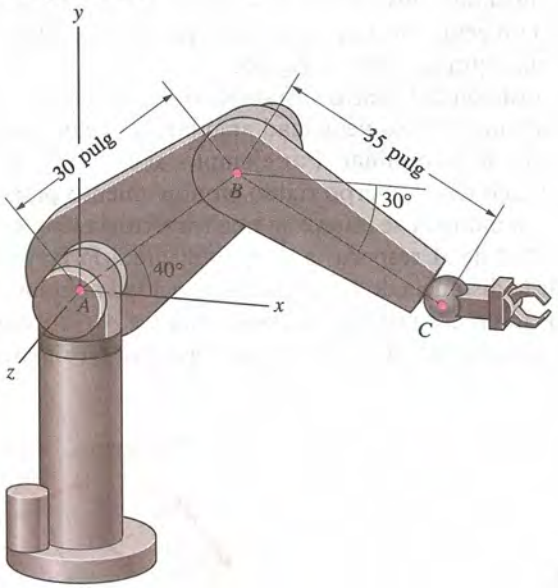
6.44 El atleta de la figura ejercita su brazo levantando la masa m. La articulación del hombro A está en reposo. La distancia AB es de 300 mm y la distancia BC es de 400 mm. En el instante mostrado, $\omega_{AB} = 1$ rad/s y $\omega_{BC} = 2$ rad/s. ¿Con qué rapidez se eleva la masa?



P6.44

6.45 En el Prob. 6.44, suponga que la distancia AB es de 12 pulg, la distancia BC de 16 pulg, $\omega_{AB} = 0.6$ rad/s y que la masa m se eleva a 24 pulg/s. ¿Cuál es la velocidad angular ω_{BC}?

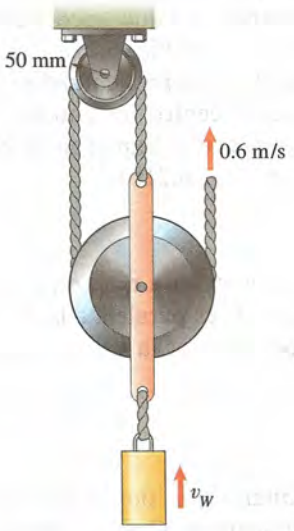
6.46 En la Fig. P6.46, los puntos B y C están en el plano x-y. Los vectores de velocidad angular de los brazos AB y AC son $\omega_{AB} = -0.2\mathbf{k}$ (rad/s) y $\omega_{BC} = 0.4\mathbf{k}$ (rad/s). Determine la velocidad del punto C.



P6.46

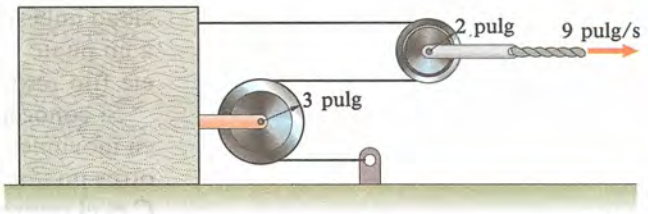
6.47 En el Prob. 6.46, si la velocidad del punto C es $\mathbf{v}_C = 10\mathbf{j}$ (pulg/s), ¿cuáles son los vectores de velocidad angular de los brazos AB y BC?

6.48 Determine la velocidad v_W y la velocidad angular de la polea pequeña de la figura.



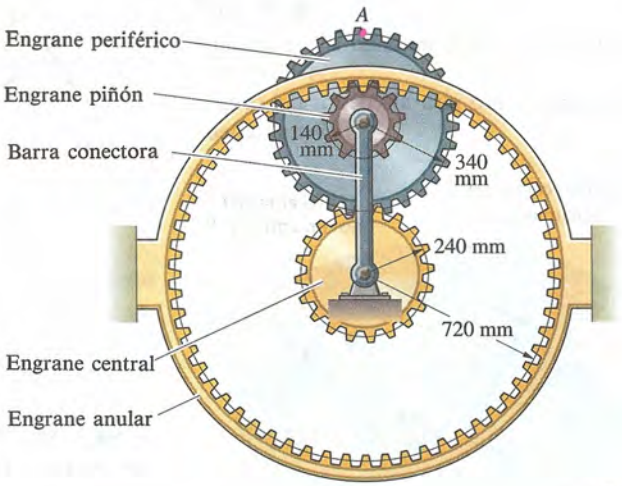
P6.48

6.49 Determine la velocidad del bloque y la velocidad angular de la polea pequeña de la figura.



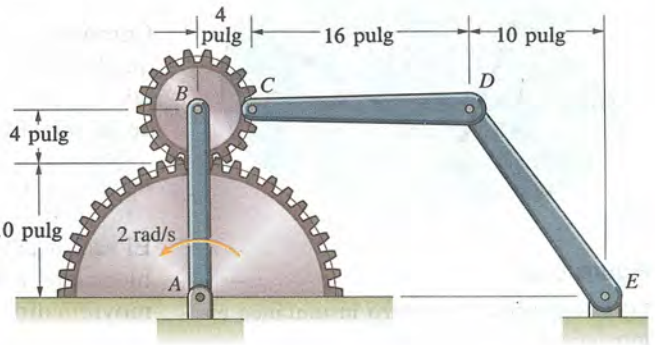
P6.49

6.50 En la Fig. P6.50 el engrane anular está fijo y los engranes piñón y periférico están unidos. La barra conectora gira en dirección antihoraria a 60 rpm. Determine la velocidad angular del engrane central y la magnitud de la velocidad del punto A.



P6.50

6.51 En la Fig. P6.51 la rueda dentada grande está fija. La barra AB tiene una velocidad angular antihoraria de 2 rad/s. ¿Cuáles son las velocidades angulares de las barras CD y DE?



P6.51

Centros instantáneos

El **centro instantáneo** es un punto de un cuerpo rígido cuya velocidad es cero en un momento dado. "Instantáneo" significa que podría tener velocidad nula *sólo* en el instante considerado, si bien nos referimos también a un punto fijo como un centro instantáneo, por ejemplo el punto de un eje fijo respecto al cual gira un cuerpo rígido.

Si conocemos la posición del centro instantáneo de un cuerpo rígido en movimiento plano y también su velocidad angular, las velocidades de otros puntos son fáciles de determinar. Por ejemplo, si en la Fig. 6.20(a) C es el centro instantáneo de un cuerpo rígido en movimiento plano con velocidad angular ω, un punto A se mueve en una trayectoria circular respecto a C. La velocidad de A respecto a C es tangente a la trayectoria e igual al producto de la distancia de C a A por la velocidad angular. Pero como C es estacionario en ese instante, la velocidad de A respecto a C es la velocidad de A, y cada punto del cuerpo gira respecto a C (Fig. 6.20b).

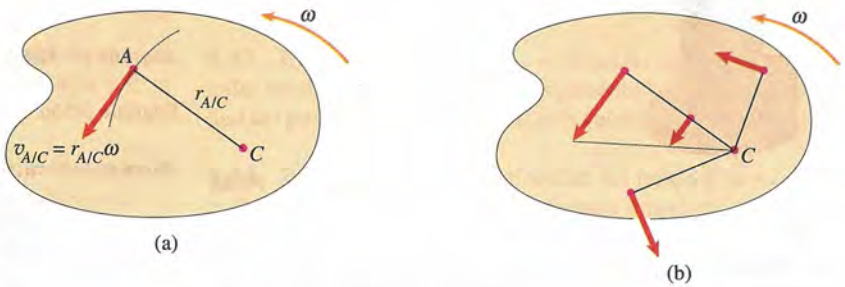
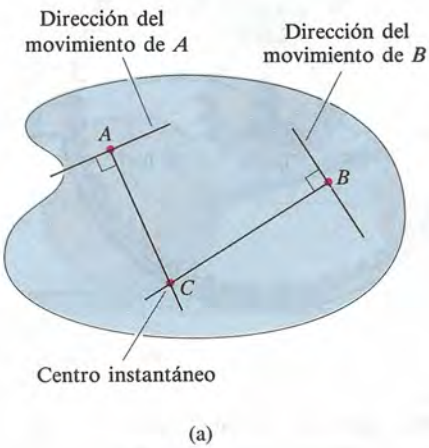


Figura 6.20
(a) Un centro instantáneo C y un punto A diferente.
(b) Cada punto gira alrededor del centro instantáneo.



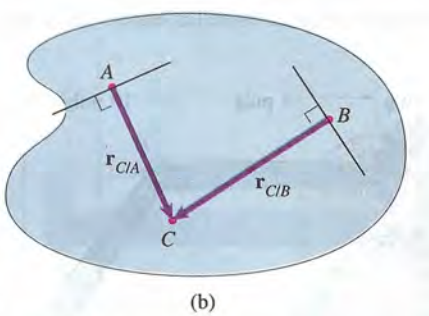


Figura 6.21
(a) Localización del centro instantáneo en movimiento plano.
(b) Demostración de que $\mathbf{v}_C = 0$.

Suele ser fácil localizar el centro instantáneo de un cuerpo rígido en movimiento bidimensional. Supongamos que se conocen las direcciones de los movimientos de los puntos A y B (Fig. 6.21a). Si se dibujan líneas por A y B perpendiculares a sus direcciones de movimiento, el punto C, donde se intersecan las líneas, es el centro instantáneo.

Para demostrar que esto es verdadero, expresemos la velocidad de C en función de la velocidad de A (Fig. 6.21b):

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/A}.$$

Como el vector $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/A}$ es perpendicular a $\mathbf{r}_{C/A}$, esta ecuación establece que la dirección del movimiento de C es paralela a la dirección del movimiento de A. También podemos expresar la velocidad de C en función de la velocidad de B:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/B}.$$

El vector $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/B}$ es perpendicular a $\mathbf{r}_{C/B}$, por lo que esta ecuación establece que la dirección del movimiento de C es paralela a la dirección del movimiento de B. Sin embargo, C no puede moverse paralelamente a A y a B, por lo que esas ecuaciones son contradictorias entre sí a menos que $\mathbf{v}_C = 0$.

El centro instantáneo puede no ser un punto del cuerpo rígido (Fig. 6.22a). Esto significa sencillamente que en este instante el cuerpo rígido gira respecto a un punto externo. Es conveniente imaginar el cuerpo rígido extendido de modo que quede incluido el centro instantáneo (Fig. 6.22b). En este instante, la velocidad del punto C del cuerpo extendido sería cero.

En la Fig. 6.22(a) observe que si se modifican las direcciones del movimiento de A y B de modo que las líneas perpendiculares a sus direcciones de movimiento resulten paralelas, C se desplaza al infinito. En este caso el cuerpo rígido está en traslación: su velocidad angular es cero.

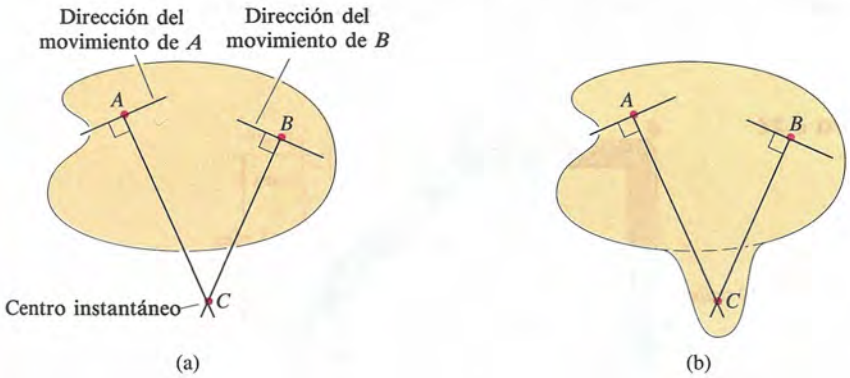


Figura 6.22
(a) Centro instantáneo externo al cuerpo rígido.
(b) Cuerpo hipotéticamente extendido. El punto C sería estacionario.

Volviendo de nuevo a nuestro ejemplo del disco de radio R que rueda con velocidad angular ω (Fig. 6.23a), en ese instante el punto C en contacto con el piso está fijo, o sea, es el centro instantáneo del disco. Por tanto, la velocidad de cualquier otro punto es perpendicular a la línea de C al punto y su magnitud equivale al producto de ω por la distancia de C al punto. En el sistema coordenado que se muestra en la Fig. 6.23(b), la velocidad del punto A es

$$\mathbf{v}_A = -\sqrt{2}R\omega \cos 45^\circ\, \mathbf{i} + \sqrt{2}R\omega \operatorname{sen} 45^\circ\, \mathbf{j}$$

$$= -R\omega\mathbf{i} + R\omega\mathbf{j}.$$

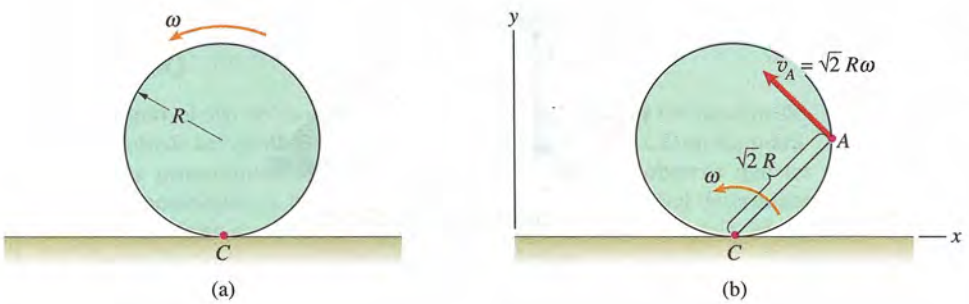


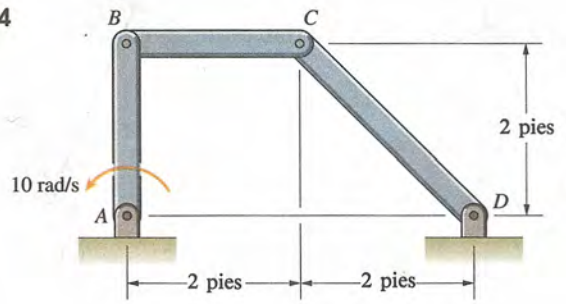
Figura 6.23
(a) El punto C es el centro instantáneo del disco rodante.
(b) Determinación de la velocidad del punto A.

En el siguiente ejemplo usamos los centros instantáneos para analizar el movimiento de un mecanismo. Identificando el centro instantáneo de un cuerpo rígido en movimiento plano, se pueden expresar las velocidades de sus puntos como productos de sus distancias desde el centro instantáneo por la velocidad angular del cuerpo rígido.

Ejemplo 6.5

La barra AB de la Fig. 6.24 gira con velocidad angular antihoraria de 10 rad/s. ¿Cuáles son las velocidades angulares de las barras BC y CD?

Figura 6.24



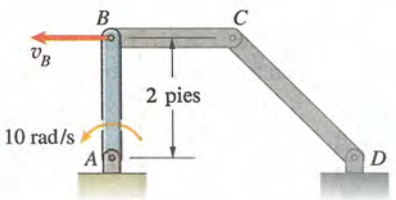
ESTRATEGIA

Como las barras AB y CD giran respecto a ejes fijos, conocemos las direcciones del movimiento de los puntos B y C y por tanto podemos localizar el centro instantáneo de la barra BC. Comenzando con la barra AB (porque conocemos su velocidad angular), podemos usar los centros instantáneos de las barras para determinar las velocidades de los puntos en que ellas se conectan, así como sus velocidades angulares.

SOLUCIÓN

La velocidad de B debida a la rotación de la barra AB respecto a A (Fig. a) es

$$v_B = (2 \text{ pies})(10 \text{ rad/s}) = 20 \text{ pie/s}.$$



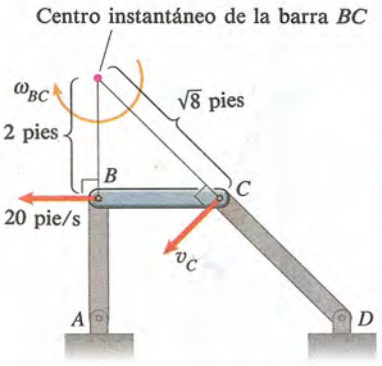
(a) Determinación de v_B.

Dibujando líneas perpendiculares a las direcciones del movimiento de B y C, localizamos el centro instantáneo de la barra BC (Fig. b). La velocidad de B es igual al producto de su distancia desde el centro instantáneo de la barra BC por la velocidad angular ω_{BC},

$$v_B = 20 \text{ pie/s} = (2 \text{ pies})\omega_{BC},$$

por lo que $\omega_{BC} = 10$ rad/s (observe que la barra BC gira en dirección horaria). Usando el centro instantáneo de la barra BC y su velocidad angular ω_{BC}, podemos determinar la velocidad del punto C:

$$v_C = (\sqrt{8} \text{ pies})\omega_{BC} = 10\sqrt{8} \text{ pie/s}.$$

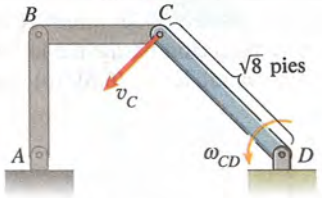


(b) Determinación de ω_{BC} y v_C.

El último paso es usar la velocidad del punto C para determinar la velocidad angular de la barra CD respecto al punto D (Fig. c),

$$v_C = 10\sqrt{8} \text{ pie/s} = (\sqrt{8} \text{ pies})\omega_{CD},$$

de donde se obtiene $\omega_{CD} = 10$ rad/s antihoraria.



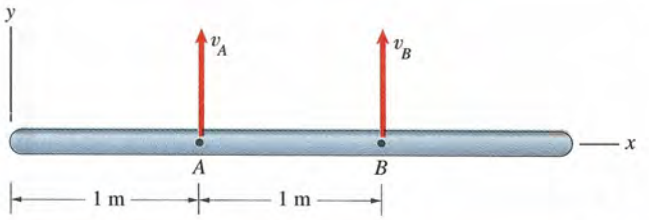
(c) Determinación de ω_{CD}.

COMENTARIO

En este ejemplo, el uso de los centros instantáneos simplificó en forma considerable el cálculo de las velocidades angulares de las barras BC y CD en comparación con los procedimientos usados antes. Sin embargo, observe que las longitudes y posiciones de las barras eran tales que fue muy fácil determinar el centro instantáneo de la barra BC. Si la geometría es muy compleja, el uso de los centros instantáneos puede resultar impráctico.

Problemas

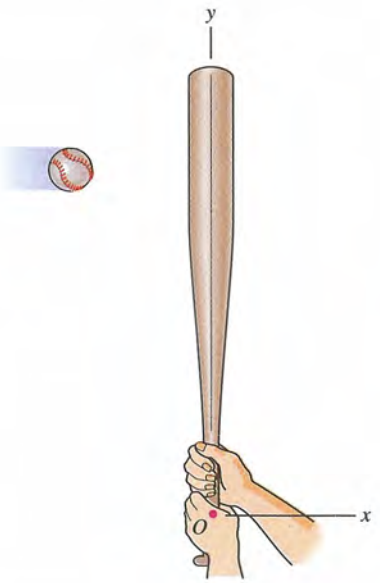
6.52 Si la barra mostrada tiene una velocidad angular horaria de 10 rad/s y $v_A = 20$ m/s, ¿cuáles son las coordenadas de su centro instantáneo y el valor de v_B?



P6.52

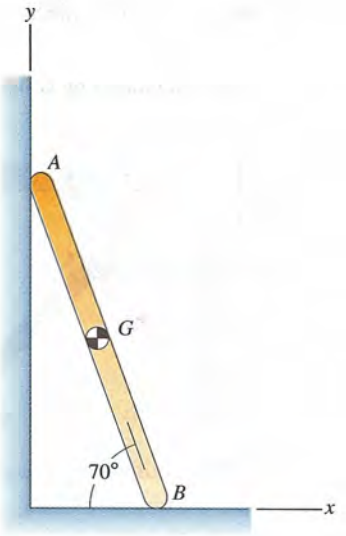
6.53 En el Prob. 6.52, si $v_A = 24$ m/s y $v_B = 36$ m/s, ¿cuáles son las coordenadas del centro instantáneo de la barra y su velocidad angular?

6.54 En la Fig. P6.54 la velocidad del punto O del bate es $\mathbf{v}_0 = -6\mathbf{i} - 1.4\mathbf{j}$ (pie/s), y el bate gira alrededor del eje z con una velocidad angular antihoraria de 4 rad/s. ¿Cuáles son las coordenadas x y y de su centro instantáneo?



P6.54

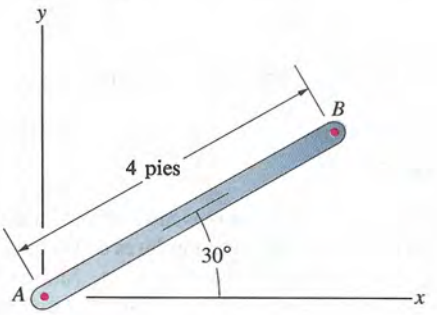
6.55 Los puntos A y B de la barra de 1 m mostrada resbalan sobre las superficies planas. La velocidad de B es $\mathbf{v}_B = 2\mathbf{i}$ (m/s).
(a) ¿Cuáles son las coordenadas del centro instantáneo?
(b) Use el centro instantáneo para determinar la velocidad de A.



P6.55

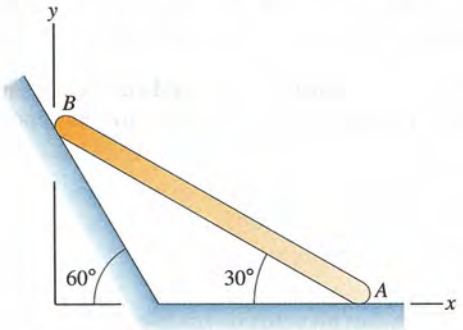
6.56 En el Prob. 6.55 use el centro instantáneo para determinar la velocidad del punto medio G de la barra.

6.57 La barra mostrada tiene un movimiento bidimensional en el plano x-y. La velocidad del punto A es $\mathbf{v}_A = 8\mathbf{i}$ (pie/s), y B se mueve en la dirección paralela a la barra. Determine la velocidad de B (a) usando la Ec. (6.6); (b) usando el centro instantáneo.



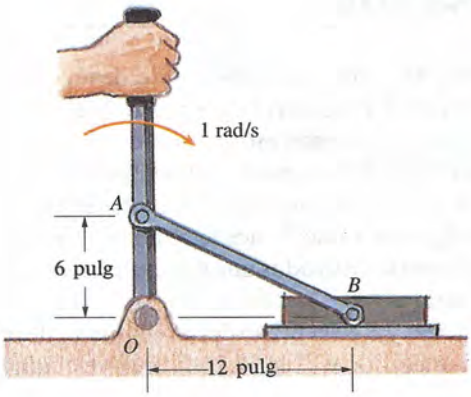
P6.57

6.58 Los puntos A y B de la barra de 4 pies mostrada resbalan sobre las superficies planas. El punto B se desliza hacia abajo sobre la superficie inclinada a 2 pie/s.
(a) ¿Cuáles son las coordenadas del centro instantáneo?
(b) Use el centro instantáneo para determinar la velocidad de A.



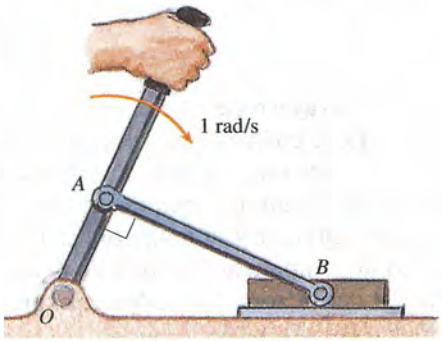
P6.58

6.59 Use centros instantáneos para determinar la velocidad horizontal del punto B de la figura.



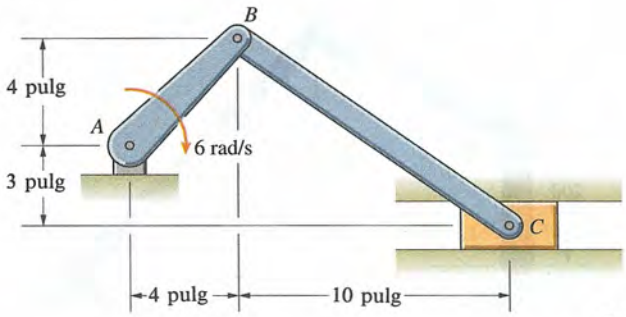
P6.59

6.60 Cuando el mecanismo del Prob. 6.59 está en esta posición, use centros instantáneos para determinar la velocidad horizontal de B.



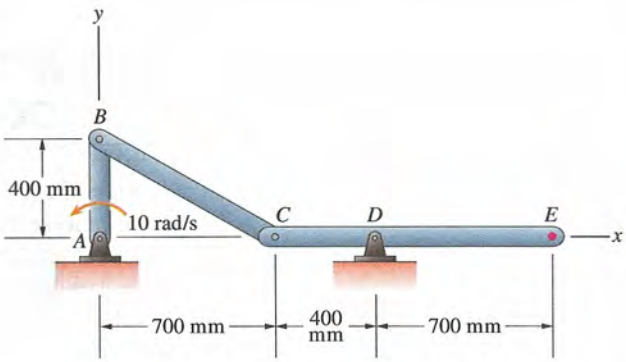
P6.60

6.61 La barra AB mostrada gira a 6 rad/s en dirección horaria. Use centros instantáneos para determinar la velocidad angular de la barra BC.



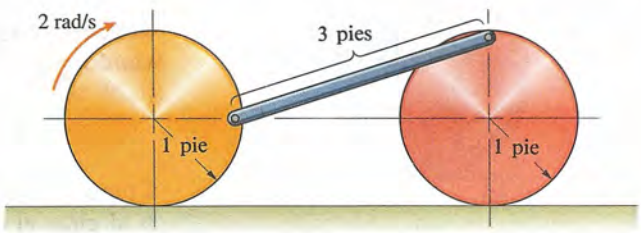
P6.61

6.62 La barra AB de la figura gira a 10 rad/s en dirección antihoraria. Use centros instantáneos para determinar la velocidad del punto E.



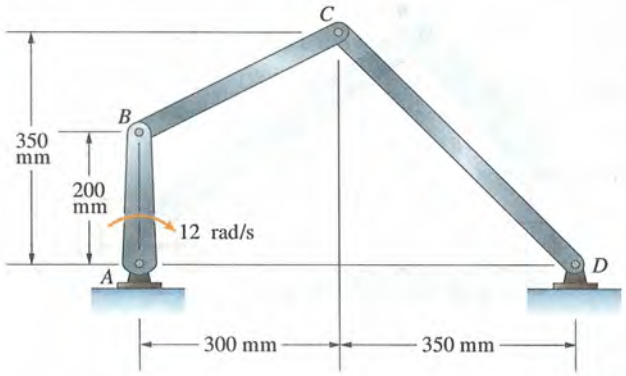
P6.62

6.63 Los discos ruedan sobre la superficie plana. El izquierdo gira a 2 rad/s en dirección horaria. Use centros instantáneos y calcule las velocidades angulares de la barra y del disco derecho.



P6.63

6.64 La barra AB mostrada gira a 12 rad/s en dirección horaria. Use centros instantáneos para determinar las velocidades angulares de las barras BC y CD.



P6.64

6.65 Un cuerpo rígido se encuentra en movimiento plano. Un punto A con coordenadas $x = 200$ mm, $y = 600$ mm se mueve paralelamente al vector unitario $-0.970\mathbf{i} + 0.243\mathbf{j}$, y un punto B con coordenadas $x = 800$ mm, $y = 400$ mm se mueve paralelamente al vector unitario $-0.832\mathbf{i} + 0.555\mathbf{j}$.
(a) ¿Cuáles son las coordenadas del centro instantáneo?
(b) Determine $|\mathbf{v}_A|/|\mathbf{v}_B|$.

6.66 Demuestre que si un cuerpo rígido en movimiento plano tiene dos centros instantáneos, se encuentra en reposo en ese instante.

6.4 Movimientos generales: aceleraciones

En el Cap. 7 nos interesará determinar el movimiento de un cuerpo rígido cuando se conozcan las fuerzas y los pares externos que actúan sobre él. Las ecuaciones que lo rigen se expresan en función de la aceleración del centro de masa del cuerpo rígido y de su aceleración angular. Para resolver tales problemas, es necesario entender las relaciones entre las aceleraciones de puntos de un cuerpo rígido y su aceleración angular. En esta sección extendemos a las aceleraciones los métodos que hemos usado para analizar velocidades de cuerpos rígidos.

Consideremos los puntos A y B en el plano del movimiento de un cuerpo rígido en movimiento bidimensional (Fig. 6.25a). Sus velocidades están relacionadas por

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B},$$

donde $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ son velocidades respecto a un punto de referencia O. Derivando respecto al tiempo esta ecuación, obtenemos

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}.$$

Como el punto A se mueve en una trayectoria circular respecto al punto B al girar el cuerpo rígido, $\mathbf{a}_{A/B}$ tiene componentes normal y tangencial (Fig. 6.25b). El valor de la componente tangencial es el producto de $|\mathbf{r}_{A/B}|$ y la aceleración angular α del cuerpo rígido. La componente normal apunta hacia el centro de la trayectoria circular y su magnitud es $|\mathbf{v}_{A/B}|^2/|\mathbf{r}_{A/B}| = \omega^2|\mathbf{r}_{A/B}|$. Observe que, como la componente normal de la aceleración apunta en dirección opuesta a la del vector $\mathbf{r}_{A/B}$, podemos expresarla como un vector escribiendo $-\omega^2\mathbf{r}_{A/B}$.

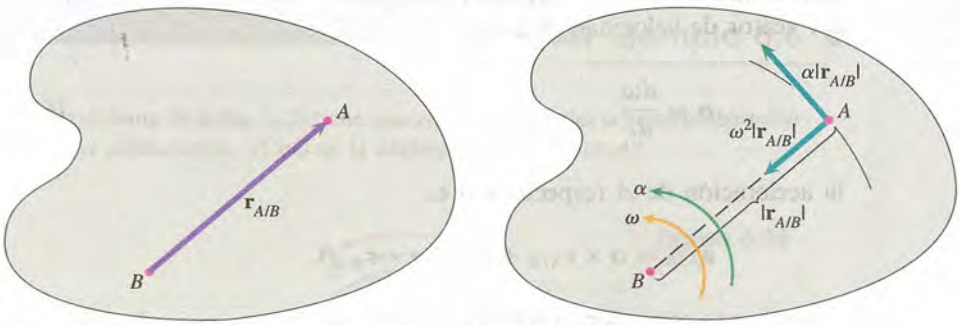


Figura 6.25
(a) Puntos de un cuerpo rígido en movimiento plano.
(b) Componentes de la aceleración de A respecto a B.

Consideremos un disco circular de radio R que rueda sobre una superficie plana fija con velocidad angular ω antihoraria y aceleración angular α antihoraria (Fig. 6.26a). El centro B del disco se mueve en una línea recta con velocidad $R\omega$. Su velocidad es hacia la izquierda si ω es positiva. La aceleración del centro B es $d/dt(R\omega) = R\alpha$. Su aceleración es hacia la izquierda si α es positiva. *La magnitud de la aceleración del centro de un cuerpo redondo que rueda sobre una superficie fija es el producto del radio por la aceleración angular.*

Ahora que conocemos la aceleración del centro del disco, determinemos la aceleración del punto C en contacto con la superficie (Fig. 6.26b). En el sistema coordenado de la Fig. 6.26(c), la aceleración del centro B es $-R\alpha\mathbf{i}$. Respecto a B, el punto C se mueve en una trayectoria circular de radio R. La componente tangencial de la aceleración de C respecto a B es $R\alpha\mathbf{i}$ y la componente normal es $R\omega^2\mathbf{j}$. Por tanto, la aceleración de C es

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B} = -R\alpha\,\mathbf{i} + R\alpha\,\mathbf{i} + R\omega^2\,\mathbf{j}$$

$$= R\omega^2\,\mathbf{j}.$$

La aceleración del punto C paralela a la superficie es cero, pero tiene una aceleración normal a la superficie.

Expresar la aceleración de un punto A respecto a un punto B en función de la trayectoria circular de A respecto a B, como lo hemos hecho, ayuda a visualizarla y a entenderla. Sin embargo, como lo hicimos en el caso de la velocidad relativa, podemos obtener $\mathbf{a}_{A/B}$ en una forma más conveniente para las aplicaciones usando el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. La velocidad de A respecto a B está dada en función de $\boldsymbol{\omega}$ por la Ec. (6.5):

$$\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}.$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo obtenemos

$$\mathbf{a}_{A/B} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A/B}$$

$$= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}).$$

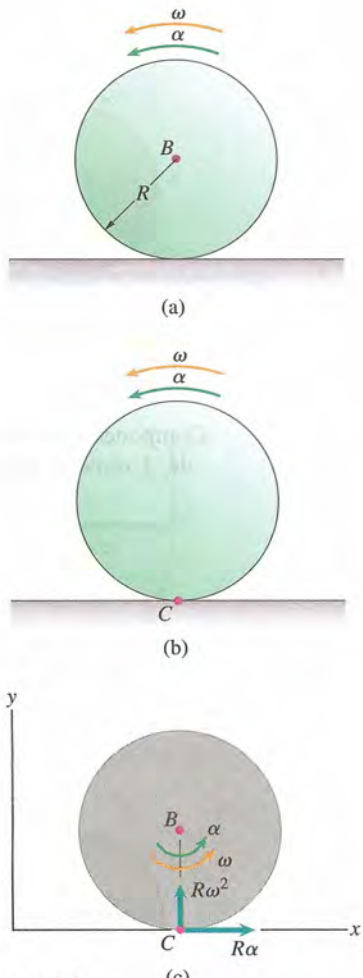


Figura 6.26
(a) Disco que rueda con velocidad angular ω y aceleración angular α.
(b) El punto C está en contacto con la superficie.
(c) Determinación de la aceleración de C respecto a B.

Definiendo el **vector de aceleración angular** α como la razón de cambio del vector de velocidad angular,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \tag{6.7}$$

la aceleración de A respecto a B es

$$\mathbf{a}_{A/B} = \alpha \times \mathbf{r}_{A/B} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{A/B}).$$

Usando esta expresión, podemos escribir ecuaciones que relacionen las velocidades y aceleraciones de dos puntos de un cuerpo rígido en función de su velocidad y su aceleración angulares:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{A/B}, \tag{6.8}$$

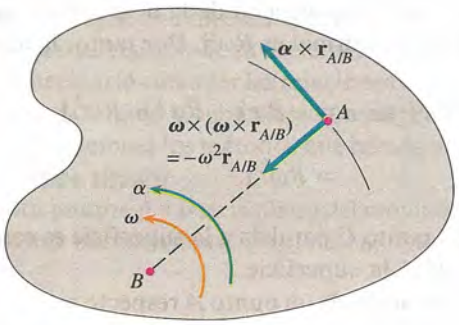
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \alpha \times \mathbf{r}_{A/B} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{A/B}). \tag{6.9}$$

En el movimiento bidimensional, el término $\alpha \times \mathbf{r}_{A/B}$ de la Ec. (6.9) es la componente tangencial de la aceleración de A respecto a B y $\omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{A/B})$ es la componente normal (Fig. 6.27). Por tanto, para el movimiento bidimensional podemos escribir la Ec. (6.9) en la forma más sencilla

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \alpha \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/B}. \tag{6.10}$$

Figura 6.27

Componentes vectoriales de la aceleración de A respecto a B en movimiento plano.



En los siguientes ejemplos usaremos las Ecs. (6.8)-(6.10) para analizar los movimientos de cuerpos rígidos. Para determinar las aceleraciones de puntos y las aceleraciones angulares de cuerpos rígidos, por lo general se deben determinar primero las velocidades de los puntos y las velocidades angulares de los cuerpos rígidos, porque las Ecs. (6.9) y (6.10) contienen la velocidad angular. Cuando encontremos una secuencia de pasos usando la Ec. (6.8) que determina las velocidades y las velocidades angulares, la misma secuencia de pasos usando la Ec. (6.9) o la (6.10) determinará las aceleraciones y las aceleraciones angulares.

Ejemplo 6.6

El disco rodante de la Fig. 6.28 tiene una velocidad angular ω y una aceleración angular α antihorarias. ¿Cuál es la aceleración del punto A?

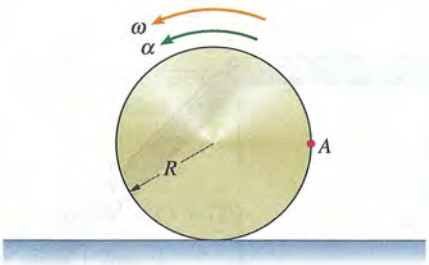


Figura 6.28

ESTRATEGIA

Sabemos que la magnitud de la aceleración del centro del disco es el producto del radio por la aceleración angular. Por tanto, podemos expresar la aceleración de A como la suma de la aceleración del centro y la aceleración de A respecto al centro. Lo haremos por inspección y usando la Ec. (6.10).

SOLUCIÓN

En el sistema coordenado de la Fig. (a), la aceleración del centro B es $\mathbf{a}_B = -\alpha R\mathbf{i}$. El movimiento de A en una trayectoria circular de radio R respecto a B da como resultado las componentes tangencial y normal de la aceleración relativa mostradas en la Fig. (b):

$$\mathbf{a}_{A/B} = -\omega^2 R\,\mathbf{i} + \alpha R\,\mathbf{j}.$$

Por tanto, la aceleración de A es

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} = -\alpha R\,\mathbf{i} - \omega^2 R\,\mathbf{i} + \alpha R\,\mathbf{j}$$

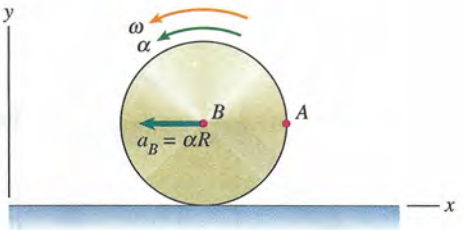
$$= (-\alpha R - \omega^2 R)\,\mathbf{i} + \alpha R\,\mathbf{j}.$$

Solución alternativa: El vector de aceleración angular del disco es $\alpha = \alpha\mathbf{k}$, y la posición de A respecto a B es $\mathbf{r}_{A/B} = R\mathbf{i}$ (Fig. c). De la Ec. (6.10), la aceleración de A es

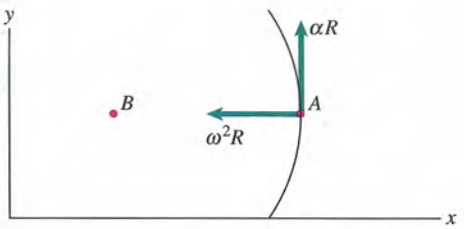
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \alpha \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/B}$$

$$= -\alpha R\,\mathbf{i} + (\alpha\,\mathbf{k}) \times (R\,\mathbf{i}) - \omega^2 (R\,\mathbf{i})$$

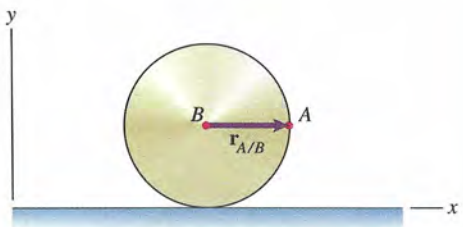
$$= (-\alpha R - \omega^2 R)\,\mathbf{i} + \alpha R\,\mathbf{j}.$$



(a) Aceleración del centro del disco.



(b) Componentes de la aceleración de A respecto a B.

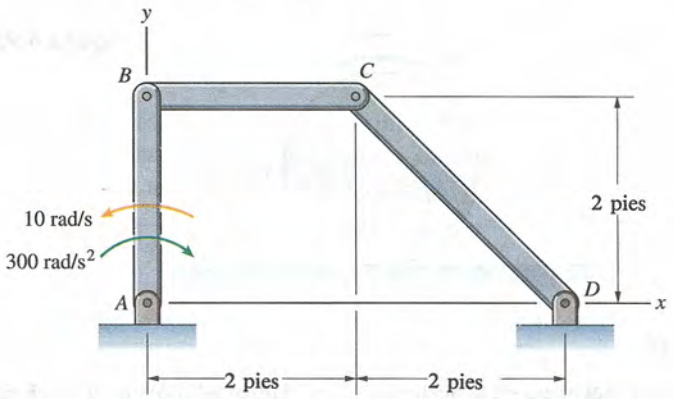


(c) Posición de A respecto a B.

Ejemplo 6.7

La barra AB de la Fig. 6.29 tiene una velocidad angular antihoraria de 10 rad/s y una aceleración angular horaria de 300 rad/s^2. ¿Cuáles son las aceleraciones angulares de las barras BC y CD?

Figura 6.29



ESTRATEGIA

Como conocemos la velocidad angular de la barra AB, podemos determinar la velocidad del punto B y luego aplicar la Ec. (6.8) a los puntos C y D a fin de obtener una ecuación para $\mathbf{v}_C$ en función de la velocidad angular de la barra CD. También podemos aplicarla a B y C a fin de obtener una ecuación para $\mathbf{v}_C$ en función de la velocidad angular de la barra BC. Igualando las dos expresiones para $\mathbf{v}_C$ obtenemos una ecuación vectorial con dos incógnitas: las velocidades angulares de BC y CD. Siguiendo la misma secuencia de pasos con la Ec. (6.10), obtenemos las aceleraciones angulares de las barras BC y CD.

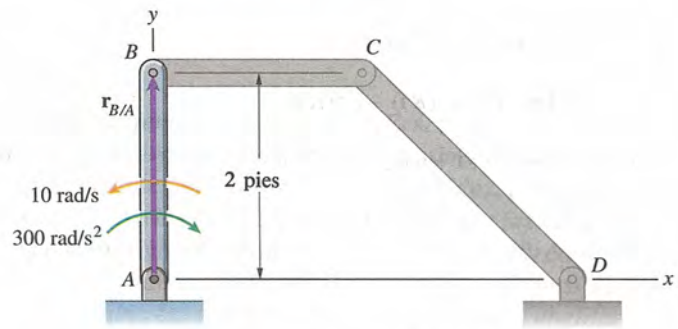
SOLUCIÓN

La velocidad de B es (Fig. a)

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$= 0 + (10\,\mathbf{k}) \times (2\,\mathbf{j})$$

$$= -20\,(\text{pie/s}).$$



(a) Determinación del movimiento de B.

Sea ω_{CD} la velocidad angular desconocida de la barra CD (Fig. b). La velocidad de C en función de la velocidad de D es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega}_{CD} \times \mathbf{r}_{C/D}\\ &= 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_{CD} \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}\\ &= -2\omega_{CD}\,\mathbf{i} - 2\omega_{CD}\,\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Denotando la velocidad angular de la barra BC con ω_{BC} (Fig. c), la velocidad de C en función de la velocidad de B es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}\\ &= -20\,\mathbf{i} + (\omega_{BC}\,\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i})\\ &= -20\,\mathbf{i} + 2\omega_{BC}\,\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones para $\mathbf{v}_C$,

$$-2\omega_{CD}\,\mathbf{i} - 2\omega_{CD}\,\mathbf{j} = -20\,\mathbf{i} + 2\omega_{BC}\,\mathbf{j},$$

e igualando las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ obtenemos $\omega_{CD} = 10$ rad/s y $\omega_{BC} = -10$ rad/s.

Podemos usar la misma secuencia de pasos para determinar las aceleraciones angulares. La aceleración de B es (Fig. a)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_{B/A}\\ &= 0 + (-300\,\mathbf{k}) \times (2\,\mathbf{j}) - (10)^2(2\,\mathbf{j})\\ &= 600\,\mathbf{i} - 200\,\mathbf{j}\ (\text{pie/s}^2).\end{aligned}$$

La aceleración de C en función de la aceleración de D es (Fig. b)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_D + \boldsymbol{\alpha}_{CD} \times \mathbf{r}_{C/D} - \omega_{CD}^2 \mathbf{r}_{C/D}\\ &= 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha_{CD} \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} - (10)^2(-2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j})\\ &= (200 - 2\alpha_{CD})\,\mathbf{i} - (200 + 2\alpha_{CD})\,\mathbf{j}.\end{aligned}$$

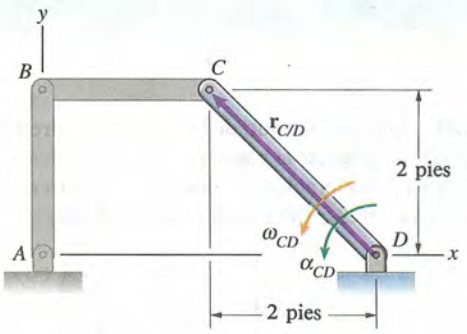
La aceleración de C en función de la aceleración de B es (Fig. c)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \mathbf{r}_{C/B}\\ &= 600\,\mathbf{i} - 200\,\mathbf{j} + (\alpha_{BC}\,\mathbf{k}) \times (2\,\mathbf{i}) - (-10)^2(2\,\mathbf{i})\\ &= 400\,\mathbf{i} - (200 - 2\alpha_{BC})\,\mathbf{j}.\end{aligned}$$

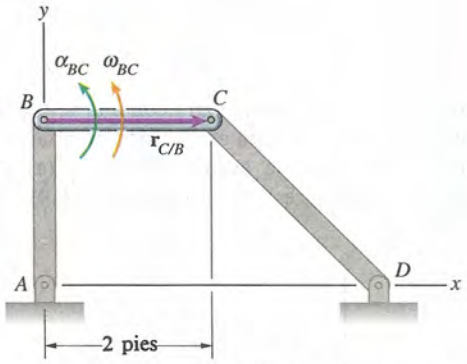
Igualando las expresiones para $\mathbf{a}_C$ obtenemos

$$(200 - 2\alpha_{CD})\,\mathbf{i} - (200 + 2\alpha_{CD})\,\mathbf{j} = 400\,\mathbf{i} - (200 - 2\alpha_{BC})\,\mathbf{j},$$

e igualando las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ obtenemos las aceleraciones angulares $\alpha_{BC} = 100$ rad/s^2 y $\alpha_{CD} = -100$ rad/s^2.



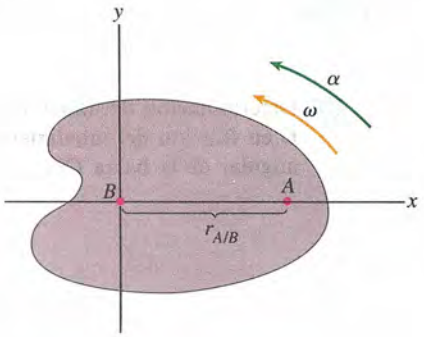
(b) Determinación del movimiento de C en función del movimiento angular de la barra CD.



(c) Determinación del movimiento de C en función del movimiento angular de la barra BC.

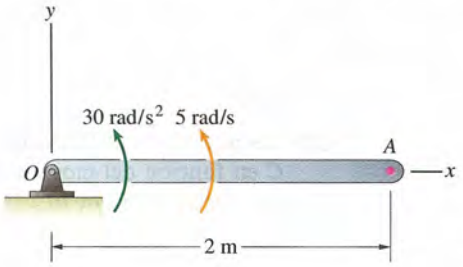
Problemas

6.67 El cuerpo rígido de la figura gira alrededor del eje z con velocidad angular ω y aceleración angular α antihorarias. Determine la aceleración del punto A respecto al punto B (a) usando la Ec. (6.9); (b) usando la Ec. (6.10).



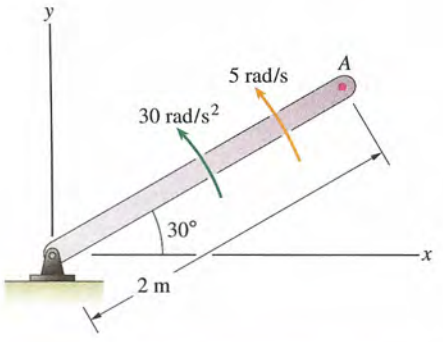
P6.67

6.68 La barra mostrada gira con una velocidad angular antihoraria de 5 rad/s y una aceleración angular antihoraria de 30 rad/s^2. Determine la aceleración de A (a) expresándola en coordenadas polares; (b) usando la Ec. (6.9); (c) usando la Ec. (6.10).



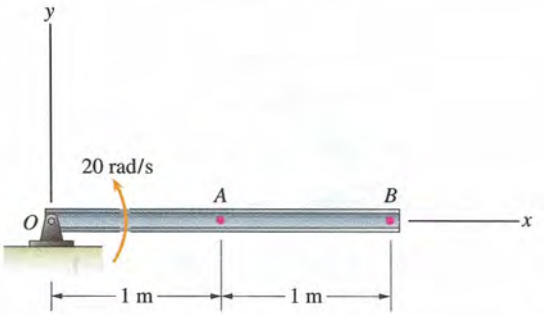
P6.68

6.69 La barra mostrada gira con una velocidad angular antihoraria de 5 rad/s y una aceleración angular antihoraria de 30 rad/s^2. Determine la aceleración de A usando (a) la Ec. (6.9), (b) la Ec. (6.10).



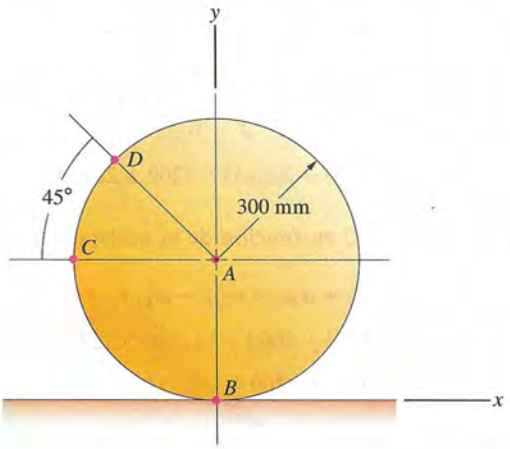
P6.69

6.70 La barra mostrada gira con una velocidad angular constante de 20 rad/s en dirección antihoraria.
(a) Determine la aceleración del punto B.
(b) Use el resultado de la parte (a) y la Ec. (6.10) para determinar la aceleración del punto A.



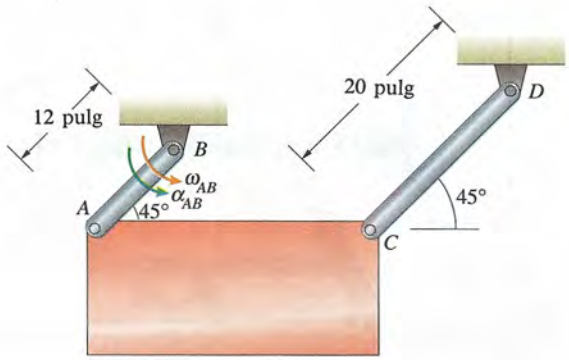
P6.70

6.71 El disco de la Fig. P6.71 rueda sobre la superficie plana. La velocidad del punto A es de 6 m/s hacia la derecha, y su aceleración es de 20 m/s^2 hacia la derecha.
(a) ¿Cuál es el vector de aceleración angular del disco?
(b) Determine las aceleraciones de los puntos B, C y D.



P6.71

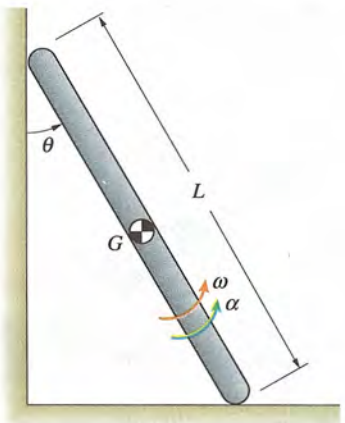
6.72 La velocidad y la aceleración angulares de la barra AB mostrada son $\omega_{AB} = 2$ rad/s, $\alpha_{AB} = 10$ rad/s^2. Las dimensiones de la placa rectangular son 12 pulg × 24 pulg. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración angulares de la placa rectangular?



P6.72

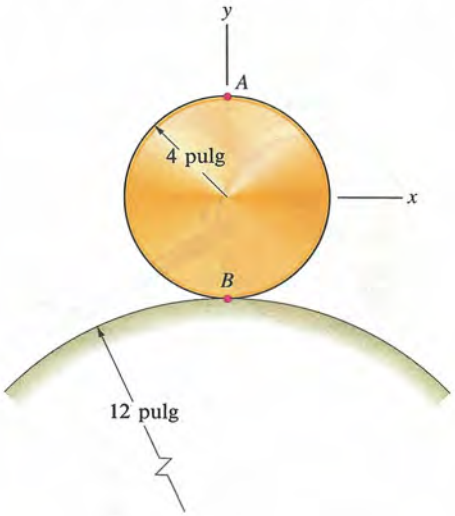
6.73 Los puntos extremos de la barra mostrada resbalan sobre las superficies planas. Demuestre que la aceleración del punto medio G está relacionada con la velocidad y la aceleración angulares de la barra por

$$\mathbf{a}_G = \frac{1}{2}L[\alpha \cos\theta - \omega^2 \operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} - (\alpha \operatorname{sen}\theta + \omega^2 \cos\theta)\mathbf{j}].$$



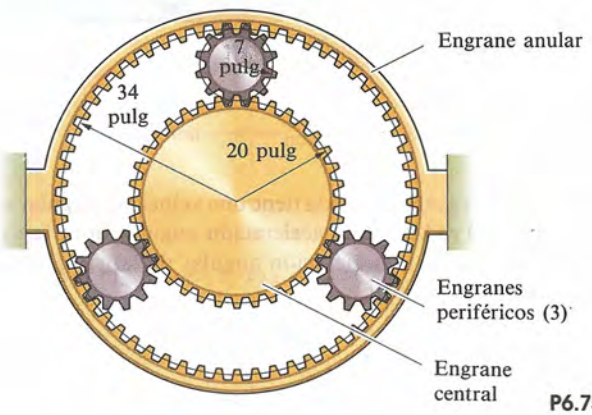
P6.73

6.74 El disco de la Fig. P6.74 rueda sobre la superficie circular con una velocidad angular constante horaria de 1 rad/s. ¿Cuáles son las aceleraciones de los puntos A y B?



P6.74

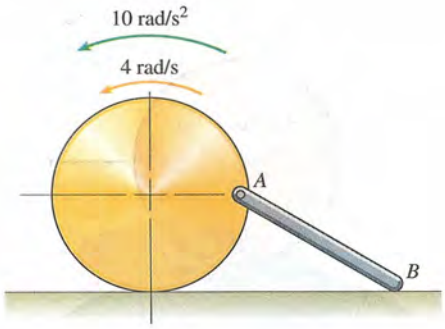
6.75 El engrane anular está fijo y el engrane central tiene una aceleración angular de 10 rad/s^2 en dirección antihoraria. Determine la aceleración angular de los engranes periféricos.



P6.75

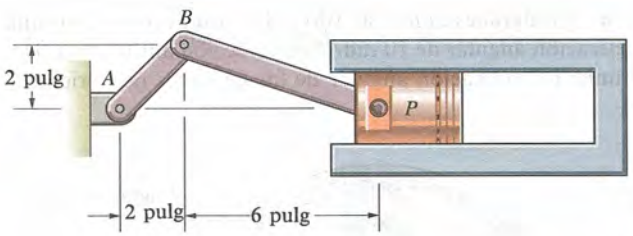
6.76 El engrane central del Prob. 6.75 tiene una velocidad angular antihoraria de 4 rad/s y una aceleración angular horaria de 12 rad/s^2. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de los puntos centrales de los engranes periféricos?

6.77 El disco de 1 m de diámetro mostrado rueda y el punto B de la barra de 1 m de largo se desliza sobre la superficie plana. Determine la aceleración angular de la barra y la aceleración del punto B.



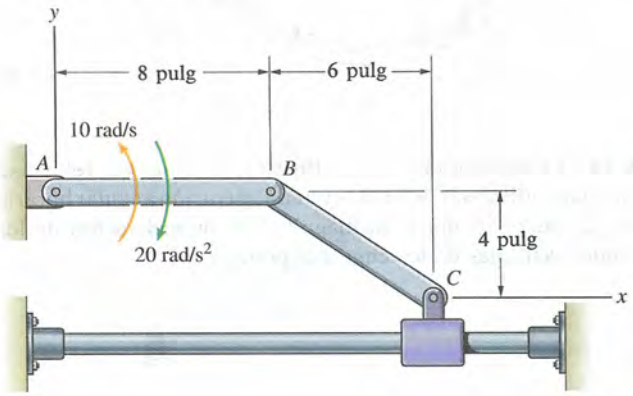
P6.77

6.78 La barra AB mostrada tiene una velocidad angular constante horaria de 200 rpm. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración del pistón P?



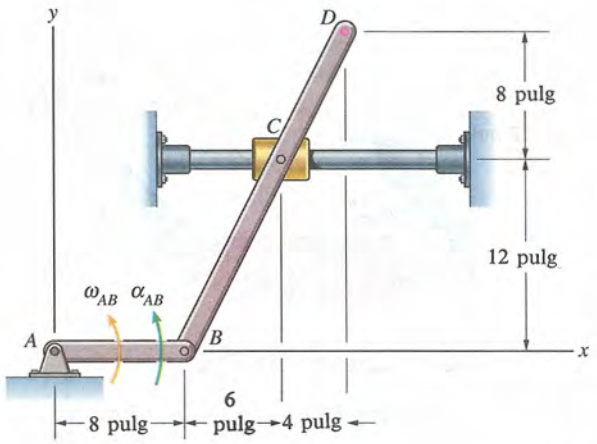
P6.78

6.79 La barra AB mostrada tiene una velocidad angular antihoraria de 10 rad/s y una aceleración angular horaria de 20 rad/s². Determine la aceleración angular de la barra BC y la aceleración del punto C.



P6.79

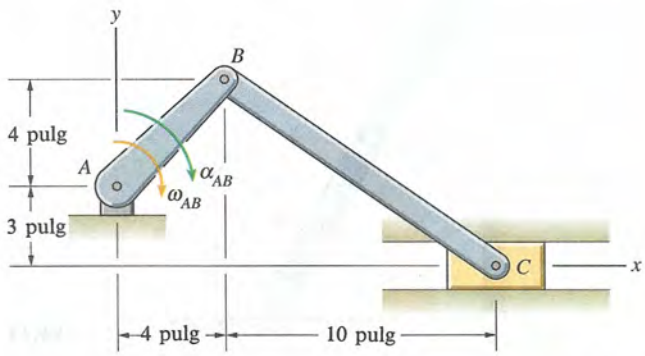
6.80 La velocidad y la aceleración angulares de la barra AB mostrada son $\omega_{AB} = 2$ rad/s y $\alpha_{AB} = 6$ rad/s². ¿Cuáles son la velocidad angular y la aceleración angular de la barra BD?



P6.80

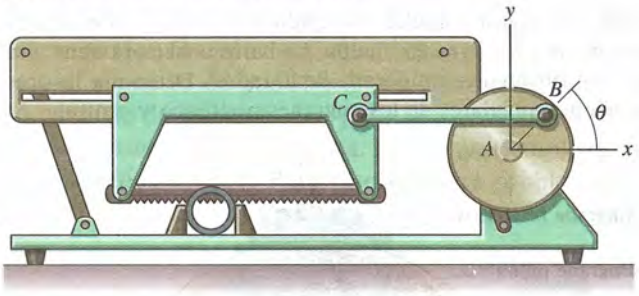
6.81 En el Prob. 6.80, si la velocidad y la aceleración angulares de la barra AB son $\omega_{AB} = 2$ rad/s y $\alpha_{AB} = -10$ rad/s², ¿cuáles son la velocidad y la aceleración del punto D?

6.82 Si $\omega_{AB} = 6$ rad/s y $\alpha_{AB} = 20$ rad/s², ¿cuáles son la velocidad y la aceleración del punto C?



P6.82

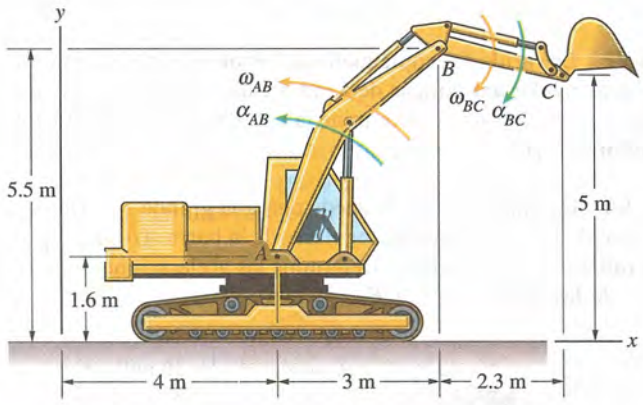
6.83 En la Fig. P6.83, un motor hace girar el disco circular montado en A, moviendo la sierra en vaivén (la sierra está soportada por una ranura horizontal de manera que el punto C se mueve horizontalmente). El radio AB es de 4 pulg y el eslabón BC tiene 14 pulg de largo. En la posición mostrada, $\theta = 45°$ y el eslabón BC está horizontal. Si el disco tiene una velocidad angular constante de una revolución por segundo antihoraria, ¿cuál es la aceleración de la sierra?



P6.83

6.84 En el Prob. 6.83, si el disco tiene una velocidad angular constante de una revolución por segundo antihoraria y $\theta = 180°$, ¿cuál es la aceleración de la sierra?

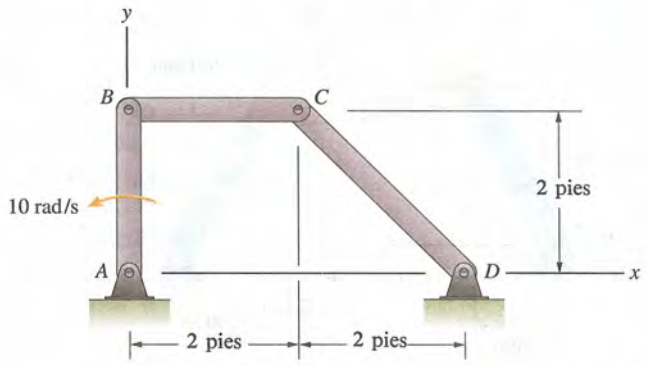
6.85 En la Fig. P6.85, si $\omega_{AB} = 2$ rad/s, $\alpha_{AB} = 2$ rad/s^2, $\omega_{BC} = 1$ rad/s, y $\alpha_{BC} = 4$ rad/s^2, ¿cuál es la aceleración del punto C donde se conecta el cucharón de la excavadora?



P6.85

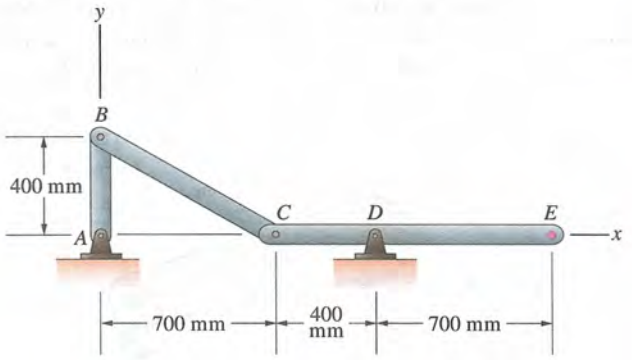
6.86 Si la velocidad del punto C de la excavadora del Prob. 6.85 es $\mathbf{v}_C = 4\mathbf{i}$ (m/s) y es constante en el instante mostrado, ¿cuáles son ω_{AB}, α_{AB}, ω_{BC} y α_{BC}?

6.87 La barra AB mostrada gira en dirección antihoraria con una velocidad angular constante de 10 rad/s. ¿Cuáles son las aceleraciones angulares de las barras BC y CD?



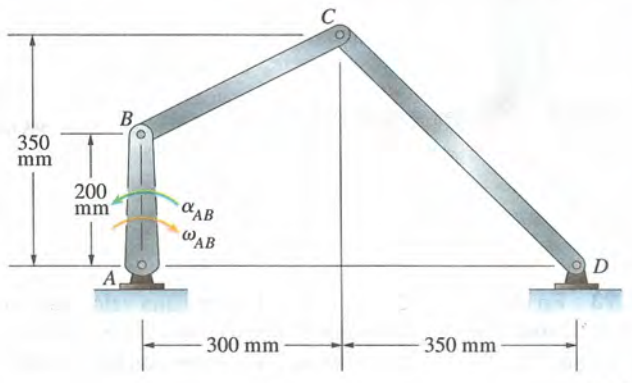
P6.87

6.88 En el instante mostrado, la barra AB no tiene velocidad angular pero sí una aceleración angular antihoraria de 10 rad/s^2. Determine la aceleración del punto E.



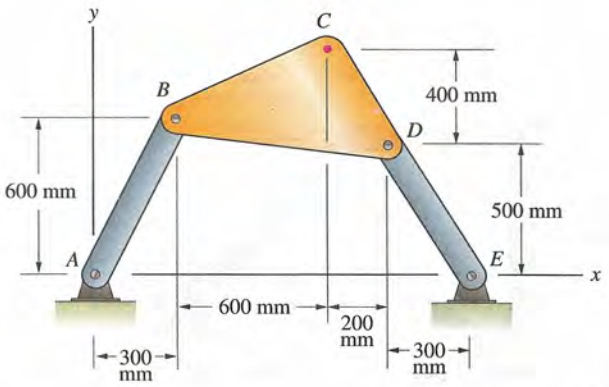
P6.88

6.89 En la Fig. P6.89, si $\omega_{AB} = 12$ rad/s y $\alpha_{AB} = 100$ rad/s^2, ¿cuáles son las aceleraciones angulares de las barras BC y CD?



P6.89

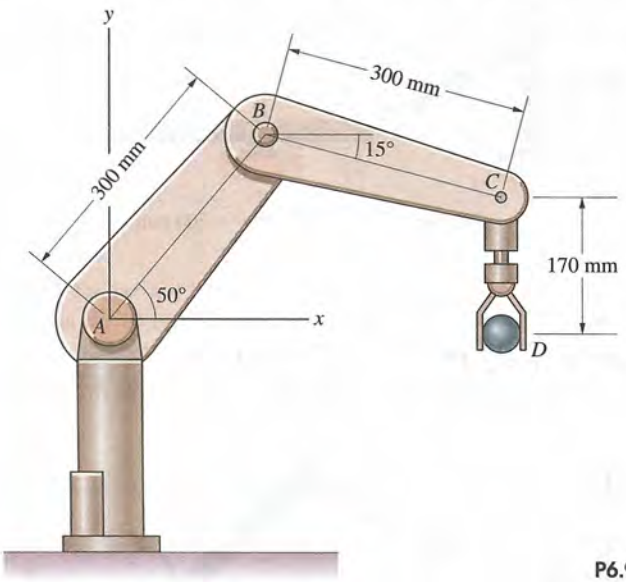
6.90 En la Fig. P6.90, si $\omega_{AB} = 4$ rad/s antihoraria y $\alpha_{AB} = 12$ rad/s^2 antihoraria, ¿cuál es la aceleración del punto C?



P6.90

6.91 En el Prob. 6.90, si $\omega_{AB} = 6$ rad/s horaria y $\alpha_{DE} = 0$, ¿cuál es la aceleración del punto C?

6.92 Si el brazo AB de la Fig. P6.92 tiene una velocidad angular constante horaria de 0.8 rad/s, el brazo BC tiene una velocidad angular constante horaria de 0.2 rad/s, y el brazo CD permanece vertical, ¿cuál es la aceleración de la parte D?



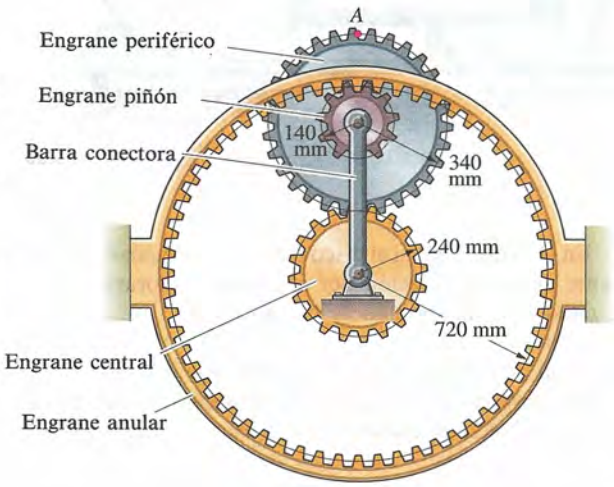
P6.92

6.93 En el Prob. 6.92, si el brazo AB tiene una velocidad angular constante horaria de 0.8 rad/s y se quiere que la parte D tenga velocidad y aceleración nulas, ¿cuáles son las velocidades angulares y aceleraciones angulares necesarias de los brazos BC y CD?

6.94 En el Prob. 6.92, si se quiere que el brazo CD permanezca vertical y que la parte D tenga velocidad $\mathbf{v}_D = 1.0\mathbf{i}$ (m/s) y aceleración nula, ¿cuáles son las velocidades angulares y aceleraciones angulares necesarias de los brazos AB y BC?

6.95 Si la velocidad del punto C de la excavadora del Prob. 6.85 es cero y su aceleración es $\mathbf{a}_C = 4\mathbf{i}$ (m/s^2) en el instante mostrado, ¿cuáles son ω_{AB}, α_{AB}, ω_{BC} y α_{BC}?

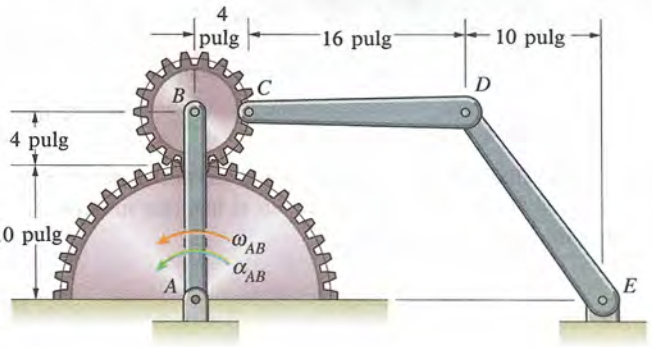
6.96 El engrane anular mostrado está fijo y los engranes piñón y periférico están unidos. La barra conectora tiene una aceleración angular antihoraria de 10 rad/s^2. Determine las aceleraciones angulares de los engranes periférico y central.



P6.96

6.97 La varilla de acoplamiento del Prob. 6.96 tiene una velocidad angular antihoraria de 4 rad/s y una aceleración angular horaria de 12 rad/s^2. Determine la magnitud de la aceleración del punto A.

6.98 En la Fig. P6.98, la rueda dentada grande está fija. La velocidad y la aceleración angulares de la barra AB son $\omega_{AB} = 2$ rad/s y $\alpha_{AB} = 4$ rad/s^2. Determine las aceleraciones angulares de las barras CD y DE.



P6.98

6.5 Contactos deslizantes

Aquí consideraremos un tipo de problema superficialmente similar a los que ya hemos analizado en este capítulo, pero que requiere un método de solución diferente. Por ejemplo, supongamos que conocemos la velocidad y la aceleración angulares de la barra AB de la Fig. 6.30 y que queremos determinar la velocidad y la aceleración angulares de la barra AC. No podemos usar la ecuación $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{A/B}$ para expresar la velocidad del punto A en función de la velocidad angular de AB, porque la dedujimos bajo el supuesto de que A y B son puntos del mismo cuerpo rígido. A no es parte de la barra AB, pero se mueve respecto a ella conforme el pasador se desliza por la ranura. Éste es un ejemplo de **contacto deslizante** entre cuerpos rígidos. Para resolver tales problemas, debemos volver a deducir las Ecs. (6.8)-(6.10) sin suponer que A es un punto del cuerpo.

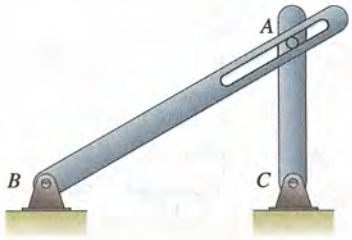


Figura 6.30
Eslabón con un contacto deslizante.

En la Fig. 6.31 suponemos que el sistema coordenado está fijo al cuerpo y que B es un punto del cuerpo rígido, pero *no* suponemos que A es un punto del cuerpo rígido. La posición de A respecto a O es

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \underbrace{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}_{\mathbf{r}_{A/B}},$$

donde x, y y z son las coordenadas de A en el sistema coordenado fijo al cuerpo. El siguiente paso es derivar respecto al tiempo esta expresión a fin de obtener una ecuación para la velocidad de A. Al hacerlo así recono-

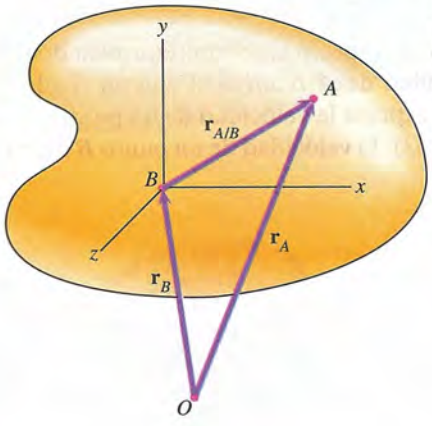


Figura 6.31
Punto B de un cuerpo rígido, sistema coordenado fijo al cuerpo y punto arbitrario A.

cemos que los vectores unitarios **i**, **j** y **k** no son constantes ya que giran con el sistema coordenado fijo al cuerpo:

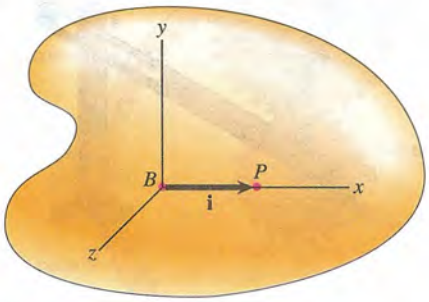
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

¿Cuáles son las derivadas respecto al tiempo de los vectores unitarios? En la Sec. 6.3 mostramos que si $\mathbf{r}_{P/B}$ es la posición de un punto P de un cuerpo rígido respecto a otro punto B del mismo cuerpo rígido, $d\mathbf{r}_{P/B}/dt = \mathbf{v}_{P/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/B}$. Puesto que podemos considerar al vector unitario **i** como el vector posición de un punto P del cuerpo rígido (Fig. 6.32), su derivada respecto al tiempo es $d\mathbf{i}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}$. Aplicando el mismo razonamiento a los vectores unitarios **j** y **k** obtenemos

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}.$$

Figura 6.32

Interpretación de **i** como vector de posición de un punto P respecto a B.



Usando esas expresiones podemos escribir la velocidad del punto A como

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \underbrace{\mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}}_{\mathbf{v}_{A/B}}, \tag{6.11}$$

donde

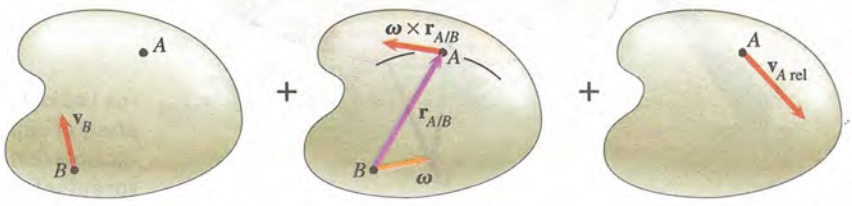
$$\mathbf{v}_{A\,\text{rel}} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{6.12}$$

es la velocidad de A respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo. Esto es, $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ es la velocidad de A *relativa* al cuerpo rígido.

La Ec. (6.11) expresa la velocidad de un punto A como la suma de tres términos (Fig. 6.33): la velocidad de un punto B del cuerpo rígido, la velo-

Figura 6.33

Expresión de la velocidad de A en función de la velocidad de un punto B del cuerpo rígido.



cidad $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$ de A respecto a B debido a la rotación del cuerpo rígido, y la velocidad $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ de A respecto al cuerpo rígido.

Para obtener una ecuación de la aceleración del punto A, derivamos respecto al tiempo la Ec. (6.11) y usamos la Ec. (6.12). El resultado es

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \underbrace{\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})}_{\mathbf{a}_{A/B}}, \tag{6.13}$$

donde

$$\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \tag{6.14}$$

es la aceleración de A respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo.

Los términos $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$ son la velocidad y la aceleración del punto A respecto a un sistema coordenado sin giro que es fijo respecto al punto O. Los términos $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ y $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}$ son la velocidad y la aceleración del punto A medidas por un observador que se mueve con el cuerpo rígido (Fig. 6.34). Si A es un punto del cuerpo rígido, $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ y $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}$ son cero, y las Ecs. (6.11) y (6.13) son idénticas a las Ecs. (6.8) y (6.9).

En el caso del movimiento bidimensional podemos expresar la Ec. (6.13) en la forma más sencilla

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \underbrace{\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/B}}_{\mathbf{a}_{A/B}}. \tag{6.15}$$

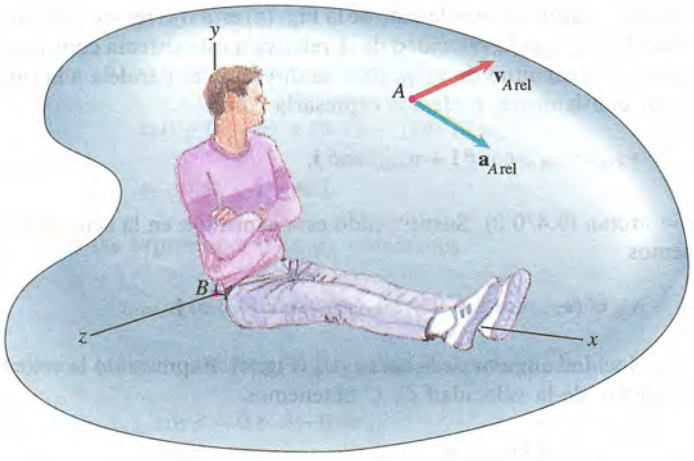


Figura 6.34
Imagínese a usted mismo en reposo respecto al cuerpo rígido.

En los siguientes ejemplos analizaremos los movimientos de eslabones con contactos deslizantes. Se puede usar el mismo método que aplicamos a sistemas de cuerpos rígidos articulados, empezando con puntos cuyas velocidades y aceleraciones se conocen y aplicando las Ecs. (6.11) y (6.15).

Ejemplo 6.8

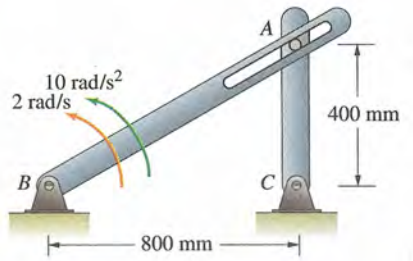


Figura 6.35

La barra AB de la Fig. 6.35 tiene una velocidad angular antihoraria de 2 rad/s y una aceleración angular antihoraria de 10 rad/s^2.
(a) Determine la velocidad angular de la barra AC y la velocidad del pasador A respecto a la ranura de la barra AB.
(b) Determine la aceleración angular de la barra AC y la aceleración del pasador A respecto a la ranura en la barra AB.

ESTRATEGIA

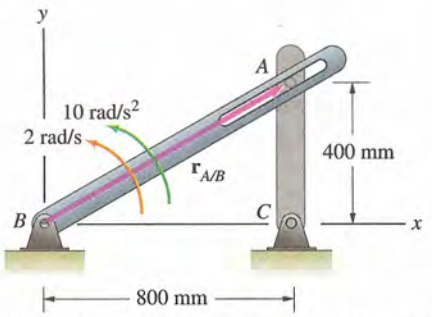
Podemos usar la Ec. (6.11) para expresar $\mathbf{v}_A$ en función de la velocidad de A respecto a la ranura en la barra y la velocidad angular conocida de la barra AB. A y C son puntos de la barra AC, por lo que podemos también expresar $\mathbf{v}_A$ en función de la velocidad angular de AC de la manera usual. Igualando las expresiones resultantes para $\mathbf{v}_A$, obtenemos una ecuación vectorial en función de la velocidad de A respecto a la ranura y de la velocidad angular de AC. Luego, procediendo igual pero esta vez usando la Ec. (6.15), obtenemos la aceleración de A respecto a la ranura y la aceleración angular de la barra AC.

SOLUCIÓN

(a) Aplicando la Ec. (6.11) a la barra AB (Fig. a), la velocidad de A es

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$= 0 + \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0.8 & 0.4 & 0 \end{vmatrix}.$$



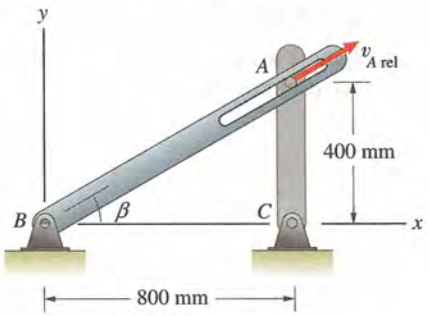
(a) Expresión de la velocidad y la aceleración de A en función de la velocidad y la aceleración angulares de la barra AB.

Suponiendo que el sistema coordenado de la Fig. (a) está fijo respecto a la barra AB, la velocidad $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ es la velocidad de A relativa a este sistema coordenado. No conocemos la magnitud de $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$, pero su dirección es paralela a la ranura (Fig. b). Por consiguiente, podemos expresarla como

$$\mathbf{v}_{A\,\text{rel}} = v_{A\,\text{rel}} \cos\beta\,\mathbf{i} + v_{A\,\text{rel}} \operatorname{sen}\beta\,\mathbf{j},$$

donde $\beta = \arctan(0.4/0.8)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación para $\mathbf{v}_A$ obtenemos

$$\mathbf{v}_A = (v_{A\,\text{rel}} \cos\beta - 0.8)\,\mathbf{i} + (v_{A\,\text{rel}} \operatorname{sen}\beta + 1.6)\,\mathbf{j}.$$



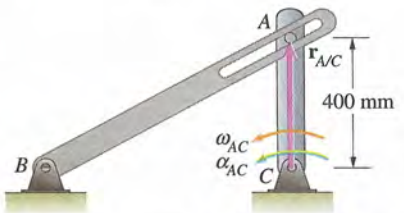
(b) Dirección de la velocidad de A respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo.

Sea ω_{AC} la velocidad angular de la barra AC (Fig. c). Expresando la velocidad de A en función de la velocidad de C obtenemos

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{AC} \times \mathbf{r}_{A/C}$$

$$= 0 + (\omega_{AC}\,\mathbf{k}) \times (0.4\,\mathbf{j})$$

$$= -0.4\omega_{AC}\,\mathbf{i}.$$



(c) Expresión de la velocidad y la aceleración de A en función de la velocidad y la aceleración angulares de la barra AC.

Observe que no aparece ningún término de velocidad relativa porque A es un punto de la barra AC. Igualando las dos expresiones para $\mathbf{v}_A$ obtenemos

$$(v_{A\,\text{rel}} \cos\beta - 0.8)\,\mathbf{i} + (v_{A\,\text{rel}} \operatorname{sen}\beta + 1.6)\,\mathbf{j} = -0.4\omega_{AC}\,\mathbf{i}.$$

Igualando las componentes **i** y **j** resultan las dos ecuaciones

$$v_{A\,\text{rel}} \cos\beta - 0.8 = -0.4\omega_{AC},$$

$$v_{A\,\text{rel}} \operatorname{sen}\beta + 1.6 = 0.$$

Resolviéndolas obtenemos $v_{A\,\text{rel}} = -3.58$ m/s y $\omega_{AC} = 10$ rad/s. En este instante, el pasador A se está moviendo respecto a la ranura a 3.58 m/s hacia B. El vector $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ es

$$\mathbf{v}_{A\,\text{rel}} = -3.58(\cos\beta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\beta\mathbf{j}) = -3.2\mathbf{i} - 1.6\mathbf{j}\ \text{(m/s)}.$$

(b) Aplicando la Ec. (6.15) a la barra AB (Fig. b), la aceleración de A es

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_{A/B}$$

$$= 0 + \mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -3.2 & -1.6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 0.8 & 0.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-(2)^2(0.8\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}).$$

La aceleración de A relativa al sistema coordenado de cuerpo fijo es paralela a la ranura (Fig. d), por lo que podemos escribirla como lo hicimos para $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$:

$$\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} = a_{A\,\text{rel}} \cos\beta\,\mathbf{i} + a_{A\,\text{rel}} \operatorname{sen}\beta\,\mathbf{j}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación para $\mathbf{a}_A$ resulta

$$\mathbf{a}_A = (a_{A\,\text{rel}} \cos\beta - 0.8)\,\mathbf{i} + (a_{A\,\text{rel}} \operatorname{sen}\beta - 6.4)\,\mathbf{j}.$$

Expresando la aceleración de A en función de la aceleración de C (Fig. c) tenemos obtain

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha}_{AC} \times \mathbf{r}_{A/C} - \omega_{AC}^2 \mathbf{r}_{A/C}$$

$$= 0 + (\alpha_{AC}\,\mathbf{k}) \times (0.4\,\mathbf{j}) - (10)^2(0.4\,\mathbf{j})$$

$$= -0.4\alpha_{AC}\,\mathbf{i} - 40\,\mathbf{j}.$$

Igualando las expresiones para $\mathbf{a}_A$ obtenemos

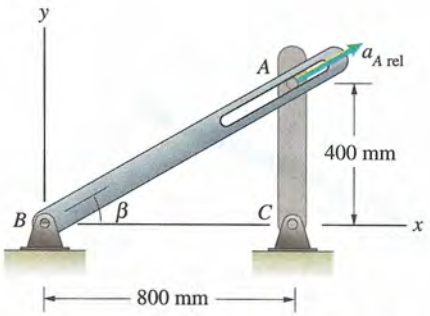
$$(a_{A\,\text{rel}} \cos\beta - 0.8)\,\mathbf{i} + (a_{A\,\text{rel}} \operatorname{sen}\beta - 6.4)\,\mathbf{j} = -0.4\alpha_{AC}\,\mathbf{i} - 40\,\mathbf{j}.$$

Igualando las componentes **i** y **j** resultan las dos ecuaciones

$$a_{A\,\text{rel}} \cos\beta - 0.8 = -0.4\alpha_{AC},$$

$$a_{A\,\text{rel}} \operatorname{sen}\beta - 6.4 = -40.$$

Resolviéndolas obtenemos $a_{A\,\text{rel}} = -75.13$ m/s^2 y $\alpha_{AC} = 170$ rad/s^2. En este instante, el pasador A está acelerando respecto a la ranura a 75.13 m/s^2 hacia B.



(d) Dirección de la aceleración de A respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo.

Ejemplo 6.9

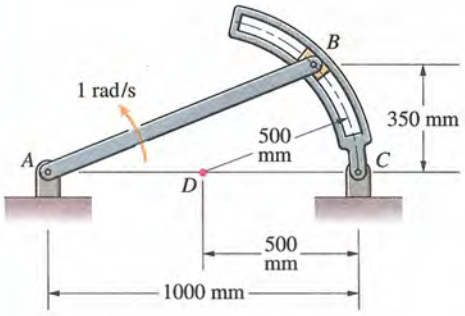


Figura 6.36

La barra AB de la Fig. 6.36 gira con velocidad angular antihoraria constante de 1 rad/s. El bloque B se desliza en una ranura circular en la barra curva BC. En el instante mostrado, el centro de la ranura circular está en D. Determine la velocidad y la aceleración angulares de la barra BC.

ESTRATEGIA

Como conocemos la velocidad angular de la barra AB, podemos determinar la velocidad del punto B. Como B no es un punto de la barra BC, debemos aplicar la Ec. (6.11) a los puntos B y C. Igualando las expresiones para $\mathbf{v}_B$, podemos despejar la velocidad angular de la barra BC. Luego, siguiendo la misma secuencia de pasos pero esta vez usando la Ec. (6.15), podemos determinar la aceleración angular de la barra BC.

SOLUCIÓN

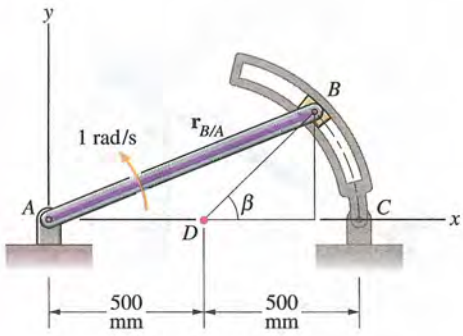
Para determinar la velocidad de B, la expresamos en función de la velocidad de A y la velocidad angular de la barra AB: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A}$. En el sistema coordenado de la Fig. (a), el vector de posición de B respecto a A es

$$\mathbf{r}_{B/A} = (0.500 + 0.500\cos\beta)\,\mathbf{i} + 0.350\,\mathbf{j} = 0.857\,\mathbf{i} + 0.350\,\mathbf{j}\ \text{(m)},$$

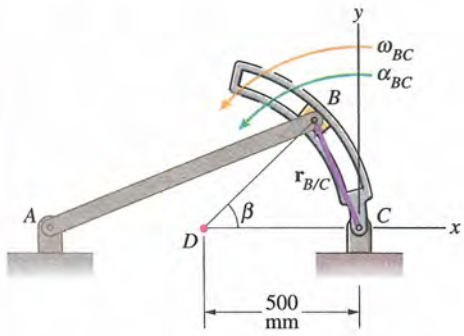
donde β = arcsen (350/500) = 44.4°. Por tanto, la velocidad de B es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} = 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.857 & 0.350 & 0 \end{vmatrix} \tag{6.16}$$

$$= -0.350\,\mathbf{i} + 0.857\,\mathbf{j}\ \text{(m/s)}.$$



(a) Determinación de la velocidad del punto B.



(b) Sistema coordenado fijo con respecto a la barra curva.

Para aplicar la Ec. (6.11) a los puntos B y C, introducimos un sistema coordenado con su origen en C que gire con la barra curva (Fig. b). La velocidad de B es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B\,\text{rel}} + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{B/C}. \tag{6.17}$$

El vector de posición de B respecto a C es

$$\mathbf{r}_{B/C} = -(0.500 - 0.500\cos\beta)\,\mathbf{i} + 0.350\,\mathbf{j} = -0.143\,\mathbf{i} + 0.350\,\mathbf{j}\ \text{(m)}.$$

Con respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo, el punto B se mueve en una trayectoria circular alrededor del punto D (Fig. c). En función del ángulo β, el vector $\mathbf{v}_{B\,\text{rel}}$ es

$$\mathbf{v}_{B\,\text{rel}} = -v_{B\,\text{rel}}\,\text{sen}\,\beta\,\mathbf{i} + v_{B\,\text{rel}}\cos\beta\,\mathbf{j}.$$

Sustituimos estas expresiones para $\mathbf{r}_{B/C}$ y $\mathbf{v}_{B\,\text{rel}}$ en la Ec. (6.17), y obtenemos

$$\mathbf{v}_B = -v_{B\,\text{rel}}\,\text{sen}\,\beta\,\mathbf{i} + v_{B\,\text{rel}}\cos\beta\,\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ -0.143 & 0.350 & 0 \end{vmatrix}$$

Igualando esta expresión para $\mathbf{v}_B$ con su valor dado en la Ec. (6.16) resultan las ecuaciones

$$-v_{B\,\text{rel}} \operatorname{sen} \beta - 0.350\omega_{BC} = -0.350,$$

$$v_{B\,\text{rel}} \cos \beta - 0.143\omega_{BC} = 0.857.$$

Resolviéndolas obtenemos $v_{B\,\text{rel}} = 1.0$ m/s y $\omega_{BC} = -1.0$ rad/s.

Seguimos la misma secuencia de pasos para determinar la aceleración angular de la barra BC. La aceleración del punto B es

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \alpha_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_{B/A} \\ &= 0 + 0 - (1)^2(0.857\,\mathbf{i} + 0.350\,\mathbf{j}) \qquad (6.18) \\ &= -0.857\,\mathbf{i} - 0.350\,\mathbf{j}\ (\text{m/s}^2).\end{aligned}$$

Como el movimiento del punto B respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo es una trayectoria circular alrededor del punto D, existe una componente tangencial de aceleración, que llamamos a_{Bt}, y una componente normal de aceleración $v^2_{B\,\text{rel}}/(0.5\text{ m})$. Estas componentes se muestran en la Fig. (d). En función del ángulo β, el vector $\mathbf{a}_{B\,\text{rel}}$ es

$$\mathbf{a}_{B\,\text{rel}} = -a_{Bt} \operatorname{sen} \beta\mathbf{i} + a_{Bt} \cos \beta\mathbf{j}$$

$$-(v^2_{B\,\text{rel}}/0.5) \cos \beta\mathbf{i} - (v^2_{B\,\text{rel}}/0.5) \operatorname{sen} \beta\mathbf{j}.$$

Aplicando la Ec. (6.15) a los puntos B y C, la aceleración de B es

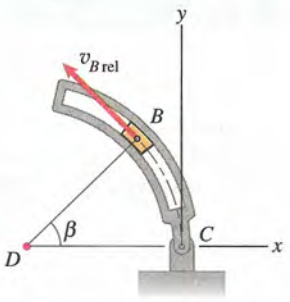
$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{B\,\text{rel}} + 2\omega_{BC} \times \mathbf{v}_{B\,\text{rel}} \\ &\quad + \alpha_{BC} \times \mathbf{r}_{B/C} - \omega_{BC}^2 \mathbf{r}_{B/C} \\ &= 0 - a_{Bt} \operatorname{sen} \beta\mathbf{i} + a_{Bt} \cos \beta\mathbf{j} \\ &\quad -[(1)^2/0.5] \cos \beta\mathbf{i} - [(1)^2/0.5] \operatorname{sen} \beta\mathbf{j} \\ &\quad + 2\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ -(1) \operatorname{sen} \beta & (1) \cos \beta & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha_{BC} \\ -0.143 & 0.350 & 0 \end{vmatrix} - (-1)^2(-0.143\mathbf{i} + 0.350\mathbf{j}).\end{aligned}$$

Igualando esta expresión para $\mathbf{a}_B$ con su valor dado en la Ec. (6.18) resultan las ecuaciones

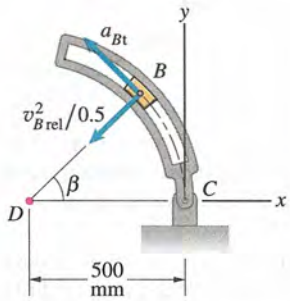
$$-a_{Bt} \operatorname{sen} \beta - 0.350\alpha_{BC} + 0.143 = -0.857,$$

$$a_{Bt} \cos \beta - 0.143\alpha_{BC} - 0.350 = -0.350.$$

Resolviéndolas obtenemos $a_{Bt} = 0.408$ m/s^2 y $\alpha_{BC} = 2.040$ rad/s^2.



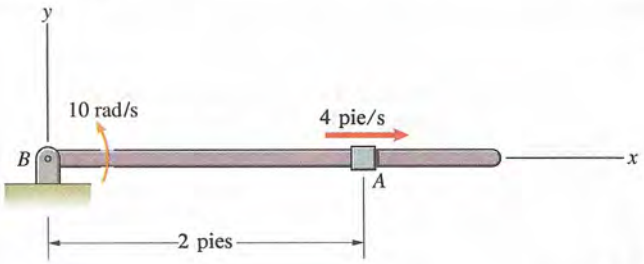
(c) Velocidad de B respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo.



(d) Aceleración de B respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo.

Problemas

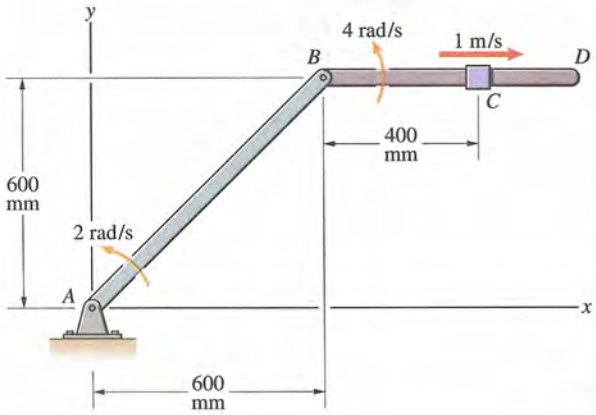
6.99 La barra mostrada gira con velocidad angular constante antihoraria de 10 rad/s y el manguito A se desliza a 4 pie/s con respecto a la barra. Use la Ec. (6.11) para determinar la velocidad de A.



P6.99

6.100 El manguito A del Prob. 6.99 se desliza con respecto a la barra a una velocidad constante de 4 pie/s. Use la Ec. (6.15) para determinar la aceleración de A.

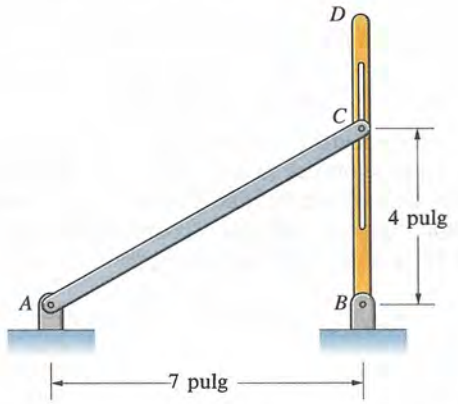
6.101 El manguito C mostrado se desliza a 1 m/s con respecto a la barra BD. ¿Cuál es su velocidad?



P6.101

6.102 En el Prob. 6.101 las aceleraciones angulares de las dos barras son cero y el manguito C se desliza con una velocidad constante de 1 m/s con respecto a la barra BD. ¿Cuál es la aceleración del manguito C?

6.103 La barra AC tiene una velocidad angular de 2 rad/s en dirección antihoraria que está disminuyendo a razón de 4 rad/s^2. El pasador en C se desliza en la ranura de la barra BD.
(a) Determine la velocidad angular de la barra BD y la velocidad del pasador respecto a la ranura.
(b) Determine la aceleración angular de la barra BD y la aceleración del pasador respecto a la ranura.

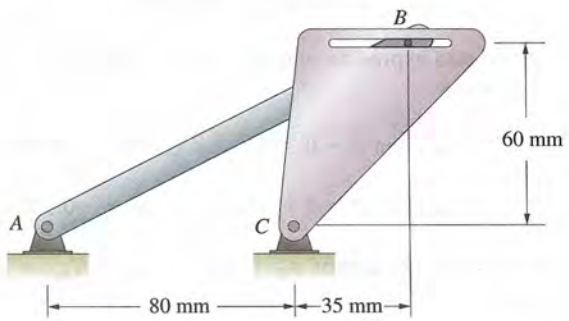


P6.103

6.104 En el sistema del Prob. 6.103, la velocidad del pasador C respecto a la ranura es de 21 pulg/s hacia arriba y disminuye a razón de 42 pulg/s^2. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración angulares de la barra AC?

6.105 En el sistema del Prob. 6.103, ¿cuáles deberían ser la velocidad y la aceleración angulares de la barra AC si se quiere que la velocidad y la aceleración angulares de la barra BD sean de 4 rad/s antihoraria y de 24 rad/s^2 antihoraria, respectivamente?

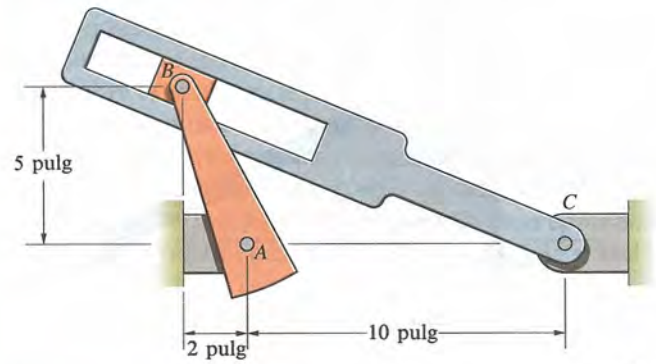
6.106 La barra AB mostrada tiene una velocidad angular de 4 rad/s en dirección horaria. ¿Cuál es la velocidad del pasador B respecto a la ranura?



P6.106

6.107 En el sistema del Prob. 6.106, la barra AB tiene una velocidad angular de 4 rad/s en dirección horaria y una aceleración angular de 10 rad/s^2 en dirección antihoraria. ¿Cuál es la aceleración del pasador B respecto a la ranura?

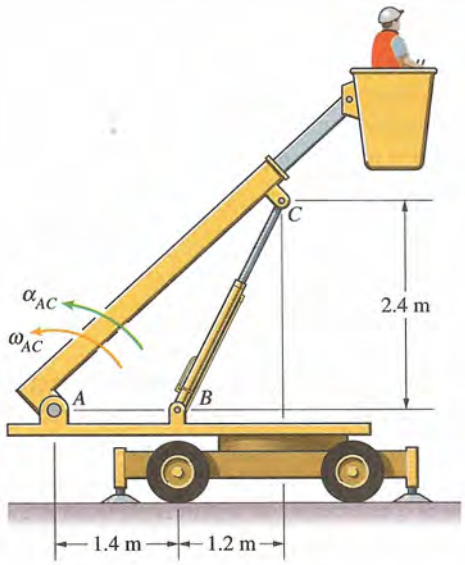
6.108 El brazo AB mostrado gira a 4 rad/s en dirección horaria. Determine la velocidad angular del brazo BC y la velocidad del punto B respecto a la ranura en el brazo BC.



P6.108

6.109 El brazo AB del Prob. 6.108 gira con una velocidad angular constante de 4 rad/s en dirección horaria. Determine la aceleración angular del brazo BC y la aceleración del punto B con respecto a la ranura en el brazo BC.

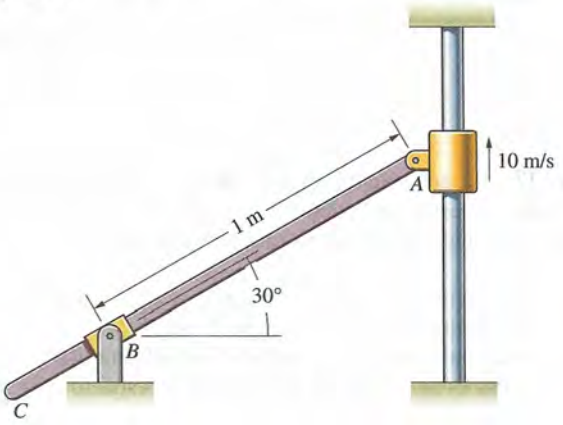
6.110 La velocidad angular $\omega_{AC} = 5°/s$. Determine la velocidad angular del actuador hidráulico BC y la razón a la que se extiende.



P6.110

6.111 En el Prob. 6.110, si la velocidad angular $\omega_{AC} = 5°/s$ y la aceleración angular $\alpha_{AC} = -2°/s^2$, determine la aceleración angular del actuador hidráulico BC y la razón de cambio de su razón de extensión.

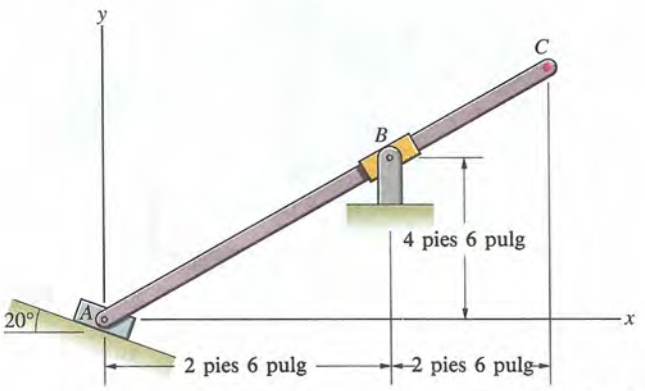
6.112 El manguito en el punto A de la figura se desliza hacia arriba con velocidad constante de 10 m/s. La barra AC se desliza a través del manguito en B. Determine la velocidad angular de la barra AC y la velocidad con que se desliza respecto al manguito en B.



P6.112

6.113 En el Prob. 6.112, el manguito en A se desliza hacia arriba con velocidad constante de 10 m/s. Determine la aceleración angular de la barra AC y la razón de cambio de la velocidad con que se desliza respecto al manguito en B.

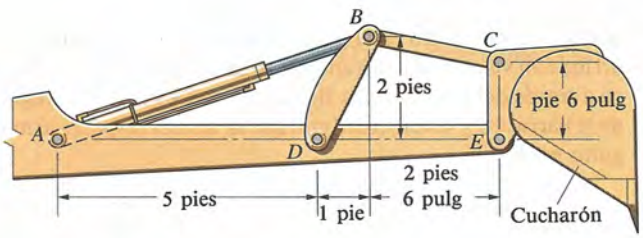
6.114 El bloque A mostrado se desliza hacia arriba sobre la superficie inclinada a 2 pie/s. Determine la velocidad angular de la barra AC y la velocidad del punto C.



P6.114

6.115 En el Prob. 6.114, el bloque A se desliza hacia arriba sobre la superficie inclinada a una velocidad constante de 2 pie/s. Determine la aceleración angular de la barra AC y la aceleración del punto C.

6.116 La velocidad angular del cucharón mostrado es de 1.0 rad/s horaria. Determine la razón a la que se está extendiendo el actuador hidráulico AB.



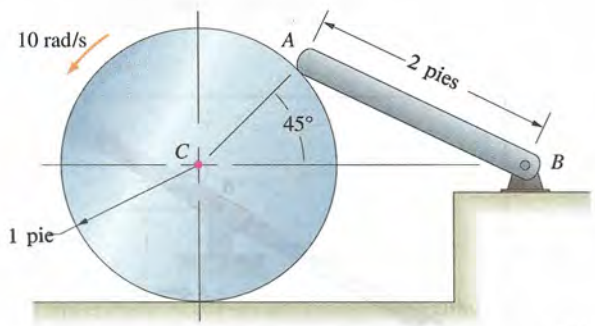
P6.116

6.117 La aceleración angular del cucharón del Prob. 6.116 es cero. Determine la razón de cambio de la razón a la que el actuador hidráulico AB se está extendiendo.

6.118 Suponga que la barra curva del Ej. 6.9 gira con una velocidad angular antihoraria de 2 rad/s.
(a) ¿Cuál es la velocidad angular de la barra AB?
(b) ¿Cuál es la velocidad del bloque B respecto a la ranura?

6.119 Suponga que la barra curva del Ej. 6.9 tiene una velocidad angular horaria de 4 rad/s y una aceleración angular antihoraria de 10 rad/s^2. ¿Cuál es la aceleración angular de la barra AB?

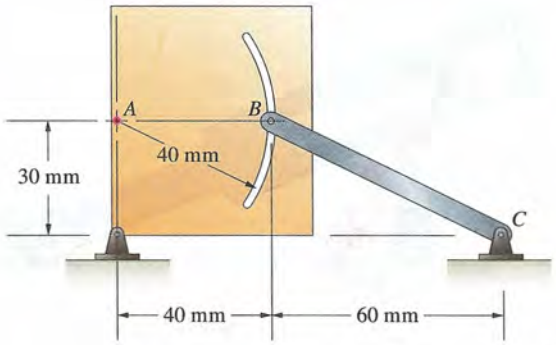
6.120 El disco mostrado rueda sobre la superficie plana con una velocidad angular antihoraria de 10 rad/s. La barra AB se desliza sobre la superficie del disco en A. Determine la velocidad angular de la barra AB.



P6.120

6.121 En el Prob. 6.120, el disco rueda sobre la superficie plana con una velocidad angular antihoraria constante de 10 rad/s. Determine la aceleración angular de la barra AB.

6.122 La barra BC de la figura gira con una velocidad angular antihoraria de 2 rad/s. Un pasador en B se desliza en una ranura circular de la placa rectangular. Determine la velocidad angular de la placa y la velocidad a la que el pasador se desliza respecto a la ranura circular.



P6.122

6.123 La barra BC del Prob. 6.122 gira con una velocidad angular antihoraria constante de 2 rad/s. Determine la aceleración angular de la placa.

6.124 Derivando respecto al tiempo la Ec. (6.11) y usando la Ec. (6.12), deduzca la Ec. (6.13).

6.6 Sistemas coordenados en rotación

En esta sección veremos de nuevo el movimiento de un punto y la segunda ley de Newton, estudiados en los Caps. 2 y 3. En algunos casos es conveniente describir el movimiento de un punto usando un sistema coordenado que gira. Por ejemplo, para medir el movimiento de un punto respecto a un vehículo en movimiento, se puede usar un sistema coordenado que se mueva y gire con el vehículo. Aquí mostramos cómo están relacionadas la velocidad y la aceleración de un punto respecto a sus valores en un sistema coordenado en rotación. En el Cap. 3 mencionamos el ejemplo de jugar tenis sobre la cubierta de un barco. Si el barco se traslada con velocidad constante, se puede usar la ecuación $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ expresada en un sistema coordenado fijo relativo al barco para analizar el movimiento de la pelota. No se puede hacer así si el barco gira o modifica su rapidez. Sin embargo, *se puede* aplicar la segunda ley usando sistemas coordenados que aceleran y giran si se toman en cuenta la aceleración y la rotación. Explicaremos cómo se hace esto.

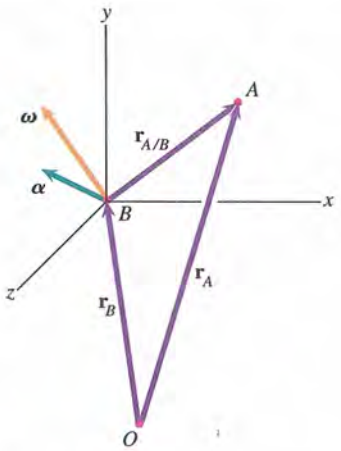


Figura 6.37
Sistema coordenado en rotación con origen en B y punto arbitrario A.

Movimiento de un punto respecto a un sistema coordenado en rotación

Las Ecs. (6.11) y (6.13) dan la velocidad y la aceleración de un punto arbitrario A respecto a un punto B de un cuerpo rígido en un sistema coordenado fijo al cuerpo:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}, \tag{6.19}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}). \tag{6.20}$$

Sin embargo, estos resultados no requieren que supongamos que el sistema coordenado está conectado a algún cuerpo rígido. Se aplican a cualquier sistema coordenado que gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ (Fig. 6.37). Los términos $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$ son la velocidad y la aceleración de A respecto a un sistema coordenado sin giro fijo respecto a O. Los términos $\mathbf{v}_{A\text{rel}}$ y $\mathbf{a}_{A\text{rel}}$ son la velocidad y la aceleración de A respecto al sistema coordenado en rotación. Es decir, son la velocidad y la aceleración medidas por un "observador" que se mueve con el sistema coordenado en rotación (Fig. 6.38).

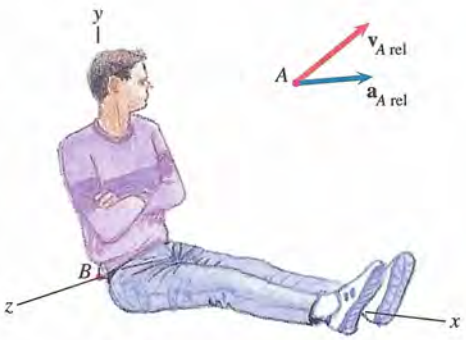


Figura 6.38
Imagínese en reposo respecto al sistema coordenado en rotación.

Los siguientes ejemplos muestran aplicaciones de sistemas coordenados en rotación. Si se conoce el movimiento de un punto A en un sistema coordenado en rotación, se pueden usar las Ecs. (6.19) y (6.20) para determinar v_A y a_A. En otros casos, si se conocen v_A y a_A se pueden usar las Ecs. (6.19) y (6.20) para determinar la velocidad y la aceleración de A respecto a un sistema coordenado en rotación.

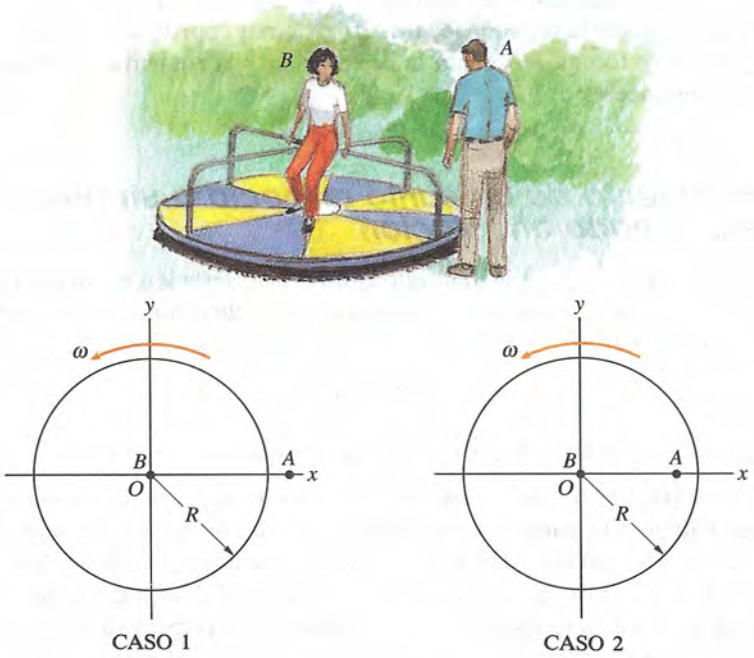
Ejemplo 6.10

El tiovivo de la Fig. 6.39 gira con velocidad angular constante ω. Suponga que usted está en el centro en B y observa el movimiento de una segunda persona A, usando un sistema coordenado que gira con el tiovivo. Considere dos casos.

Caso 1 La persona A no está sobre el tiovivo, sino de pie en el terreno próximo a él. En el instante mostrado, ¿cuáles son su velocidad y aceleración respecto a su sistema coordenado?

Caso 2 La persona A está en el borde del tiovivo y se mueve con él. ¿Cuáles son su velocidad y aceleración respecto a la Tierra?

Figura 6.39



ESTRATEGIA

Este simple ejemplo aclara la diferencia entre los términos $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$ y los términos $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$, $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}$ en las Ecs. (6.19) y (6.20). En el caso 1 la velocidad y aceleración de A respecto a la Tierra, $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, son conocidas: él está en reposo. Podemos usar las Ecs. (6.19) y (6.20) para determinar $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ y $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}$, que son su velocidad y su aceleración relativas a su sistema coordenado en rotación. En el caso 2 se conocen, $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ y $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}$: A está fijo respecto a su sistema coordenado. Podemos usar las Ecs. (6.19) y (6.20) para determinar $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$.

SOLUCIÓN

Caso 1 A está de pie en el terreno, por lo que su velocidad respecto a la Tierra es $\mathbf{v}_A = 0$. El vector de velocidad angular de su sistema coordenado es $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, y en el instante mostrado $\mathbf{r}_{A/B} = R\mathbf{i}$. De la Ec. (6.19),

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}:$$

$$0 = 0 + \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + (\omega\mathbf{k}) \times (R\mathbf{i}).$$

Encontramos que $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}} = -\omega R\mathbf{j}$. Aunque A está fijo respecto a la Tierra, $\mathbf{v}_{A\text{rel}}$ no es cero. ¿Qué representa este término? Al sentarse B en el centro del tiovivo, ve a A moviéndose a su alrededor en una trayectoria circular. *Respecto a su sistema coordenado en rotación*, A se mueve en una trayectoria circular de R en dirección horaria con velocidad de magnitud constante ωR. En el instante mostrado, la velocidad de A respecto al sistema coordenado de B es $-\omega R\mathbf{j}$.

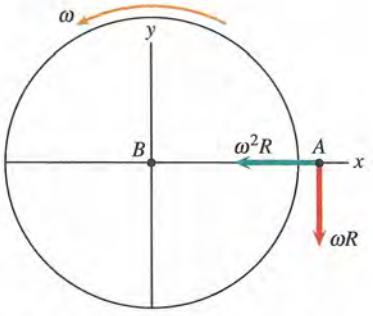
Sabemos que un punto que se mueve en una trayectoria circular de radio R con velocidad v tiene una componente normal de aceleración igual a v^2/R. Respecto al sistema coordenado de B, la persona A se mueve en una trayectoria circular de radio R con velocidad ωR. Por tanto, con *respecto al sistema coordenado de B*, A tiene una componente normal de aceleración $(\omega R)^2/R = \omega^2 R$. En el instante mostrado, la aceleración normal señala en la dirección x negativa. Por tanto, concluimos que la aceleración de A respecto al sistema coordenado de B es $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} = -\omega^2 R\mathbf{i}$.

Podemos confirmar este resultado con la Ec. (6.20). La aceleración de A respecto a la Tierra es $\mathbf{a}_A = 0$. El vector de velocidad angular del sistema coordenado es constante, por lo que $\alpha = 0$. De la Ec. (6.20),

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}):$$

$$0 = 0 + \mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2(\omega\mathbf{k}) \times (-\omega R\mathbf{j}) + 0 + (\omega\mathbf{k}) \times [(\omega\mathbf{k}) \times (R\mathbf{i})].$$

Resolviendo esta ecuación para $\mathbf{a}_{A\text{rel}}$ obtenemos $\mathbf{a}_{A\text{rel}} = -\omega^2 R\mathbf{i}$. La velocidad y la aceleración de A respecto al sistema coordenado de B se muestran en la Fig. (a).



(a) Velocidad y aceleración de A respecto al sistema coordenado en rotación en el caso 1.

Caso 2 *Respecto al sistema coordenado de B*, A está en reposo, por lo que $\mathbf{v}_{A\text{rel}} = 0$ y $\mathbf{a}_{A\text{rel}} = 0$. De la Ec. (6.19), la velocidad de A respecto a la Tierra es

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B} = 0 + 0 + (\omega\mathbf{k}) \times (R\mathbf{i})$$

$$= \omega R\mathbf{j}.$$

En este caso, A se mueve en una trayectoria circular de radio R con velocidad constante de magnitud ωR respecto a la Tierra.

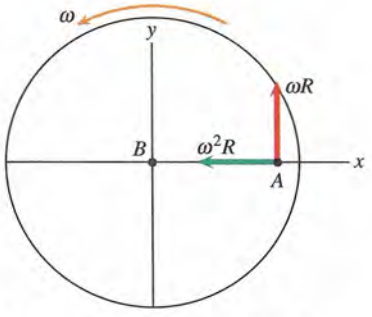
De la Ec. (6.20), la aceleración de A respecto a la Tierra es

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + (\omega\mathbf{k}) \times [(\omega\mathbf{k}) \times (R\mathbf{i})]$$

$$= -\omega^2 R\mathbf{i}.$$

Ésta es la aceleración de A respecto a la Tierra debido a su movimiento circular. La velocidad y la aceleración de A respecto a la Tierra se muestran en la Fig. (b).



(b) Velocidad y aceleración de A respecto a la Tierra en el caso 2.

Ejemplo 6.11

En el instante mostrado, el barco de la Fig. 6.40 se mueve hacia el norte con velocidad constante de 15.0 m/s respecto a la Tierra y está girando hacia el oeste a razón constante de 5.0°/s. Respecto al sistema coordenado fijo en el barco, su radar indica que la posición, velocidad y aceleración del helicóptero son

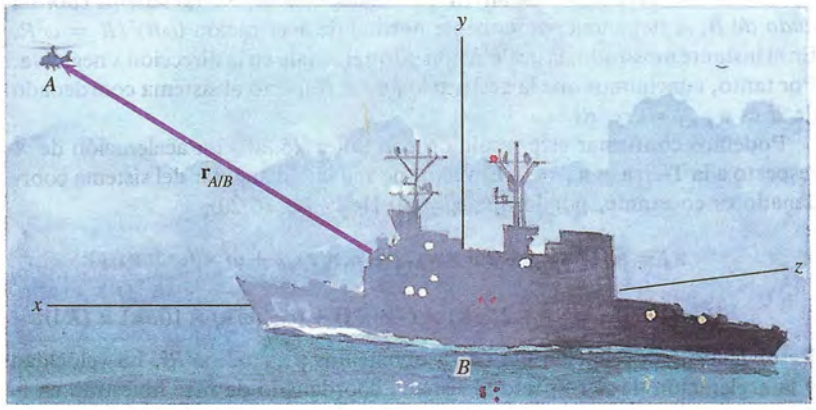
$$\mathbf{r}_{A/B} = 420.0\,\mathbf{i} + 236.2\,\mathbf{j} + 212.0\,\mathbf{k}\ \text{(m)},$$

$$\mathbf{v}_{A\,\text{rel}} = -53.5\,\mathbf{i} + 2.0\,\mathbf{j} + 6.6\,\mathbf{k}\ \text{(m/s)},$$

$$\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} = 0.4\,\mathbf{i} - 0.2\,\mathbf{j} - 13.0\,\mathbf{k}\ \text{(m/s}^2\text{)}.$$

¿Cuáles son la velocidad y la aceleración del helicóptero respecto a la Tierra?

Figura 6.40



ESTRATEGIA

Se tiene la velocidad del barco respecto a la Tierra y suficiente información para determinar su aceleración, velocidad angular y aceleración angular. Por tanto, podemos usar las Ecs. (6.19) y (6.20) para determinar la velocidad y la aceleración del helicóptero respecto a la Tierra.

SOLUCIÓN

En el sistema coordenado fijo al cuerpo, la velocidad del barco es $\mathbf{v}_B = 15.0\mathbf{i}$ (m/s). La velocidad angular del barco debido a su razón de giro es $\omega = (5.0/180)\pi = 0.0873$ rad/s. El barco está girando respecto al eje y. Si el arco de los dedos de la mano derecha señala en la dirección de la rotación del barco

alrededor del eje y, entonces el pulgar señala en la dirección y positiva, por lo que el vector de velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = 0.0873\mathbf{j}$ (rad/s). La velocidad del helicóptero relativa a la Tierra es

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

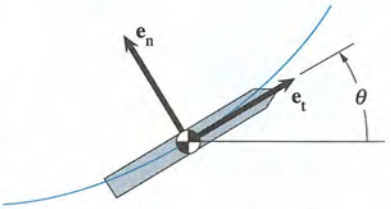
$$= 15.0\mathbf{i} + (-53.5\mathbf{i} + 2.0\mathbf{j} + 6.6\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.087 & 0 \\ 420.0 & 236.2 & 212.0 \end{vmatrix}$$

$$= -20.0\mathbf{i} + 2.0\mathbf{j} - 30.1\,\mathbf{k}\ \text{(m/s)}.$$

Podemos determinar la aceleración del barco expresándola en sus componentes normal y tangencial en la forma dada por la Ec. (2.37) (Fig. a):

$$\mathbf{a}_B = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_n = 0 + (15)(0.0873)\,\mathbf{e}_n$$

$$= 1.31\,\mathbf{e}_n\ (\text{m/s}^2).$$



(a) Determinación de la aceleración del barco.

El eje z es perpendicular a la trayectoria del barco y señala hacia su lado convexo (Fig. b). Por tanto, en el sistema coordenado fijo al cuerpo, la aceleración del barco es $\mathbf{a}_B = -1.31\mathbf{k}$ (m/s^2). El vector de la velocidad angular del barco es constante, por lo que $\alpha = 0$. La aceleración del helicóptero respecto a la Tierra es

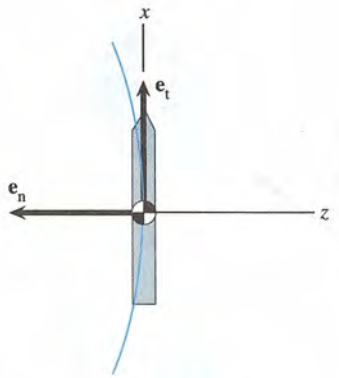
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$+ \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})$$

$$= -1.31\,\mathbf{k} + (0.4\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j} - 13.0\mathbf{k}) + 2\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.0873 & 0 \\ -53.5 & 2.0 & 6.6 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 + (0.0873\,\mathbf{j}) \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.0873 & 0 \\ 420.0 & 236.2 & 212.0 \end{vmatrix}$$

$$= -1.65\mathbf{i} - 0.20\mathbf{j} - 6.59\,\mathbf{k}\ (\text{m/s}^2).$$



(b) Correspondencia entre las componentes normal y tangencial y el sistema coordenado fijo al cuerpo.

COMENTARIO

Observe las considerables diferencias entre la velocidad y aceleración del helicóptero respecto a la Tierra y los valores que el barco mide usando su sistema coordenado fijo al cuerpo.

Marcos de referencia inerciales

Un marco de referencia es inercial si se puede usar para aplicar la segunda ley de Newton en la forma $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. ¿Por qué suele suponerse que un marco de referencia fijo a la Tierra es inercial, aun cuando ésta acelera y gira? ¿Cómo se puede aplicar la segunda ley de Newton usando un sistema coordenado que está fijo respecto a un barco o avión que está acelerando y girando? Ahora podemos responder esas preguntas.

Sistema coordenado sin rotación, con su origen en el centro de la Tierra Empezamos mostrando por qué un marco de referencia sin giro, fijo respecto al centro de la Tierra, puede suponerse inercial con el fin de describir movimientos de los cuerpos cerca de la Tierra. La Fig. 6.41(a) muestra un sistema coordenado hipotético sin giro y sin aceleración con origen en O, y otro **sistema coordenado** sin giro **con su centro en la Tierra**. La Tierra, y por consiguiente el sistema coordenado centrado en ella, acelera debido a las atracciones gravitatorias del Sol, la Luna, etc. Denotamos la aceleración de la Tierra con el vector $\mathbf{g}_B$.

Supongamos que queremos determinar el movimiento de un cuerpo A de masa m (Fig. 6.41b). A también está sometido a las atracciones gravitatorias del Sol, la Luna, etc., y denotamos la aceleración gravitatoria resultante con el vector $\mathbf{g}_A$. El vector $\Sigma\mathbf{F}$ es la suma de todas las *otras* fuerzas externas que actúan en A, incluyendo la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra. La fuerza externa total que actúa en A es $\Sigma\mathbf{F} + m\mathbf{g}_A$. Podemos aplicar la segunda ley de Newton a A, usando el sistema coordenado inercial hipotético:

$$\Sigma\mathbf{F} + m\mathbf{g}_A = m\mathbf{a}_A, \tag{6.21}$$

donde $\mathbf{a}_A$ es la aceleración de A respecto a O. Como el sistema coordenado centrado en la Tierra no gira, podemos usar la Ec. (6.20) para escribir

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A\,\mathrm{rel}},$$

donde $\mathbf{a}_{A\,\mathrm{rel}}$ es la aceleración de A respecto al sistema coordenado centrado en la Tierra. Usando esta relación y la definición de la aceleración de la Tierra $\mathbf{a}_B = \mathbf{g}_B$, la Ec. (6.21) se convierte en

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{A\,\mathrm{rel}} + m(\mathbf{g}_B - \mathbf{g}_A). \tag{6.22}$$

Si el cuerpo A está en la Tierra o cerca de ella, su aceleración gravitatoria $\mathbf{g}_A$ debida a la atracción del Sol, etc., es casi igual a la de la Tierra, $\mathbf{g}_B$. Si ignoramos la diferencia, la Ec. (6.22) se convierte en

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{A\,\mathrm{rel}}. \tag{6.23}$$

Así, se puede aplicar la segunda ley de Newton usando un marco de referencia sin giro centrado en la Tierra. Aun cuando este marco acelera, *virtualmente la misma aceleración gravitatoria actúa sobre el cuerpo*. Observe que esto no es válido si el cuerpo no está cerca de la Tierra. Por ejemplo, si se quisiera analizar el movimiento de una nave que viaja a otro planeta, se necesitaría usar un marco de referencia sin giro centrado en el Sol.

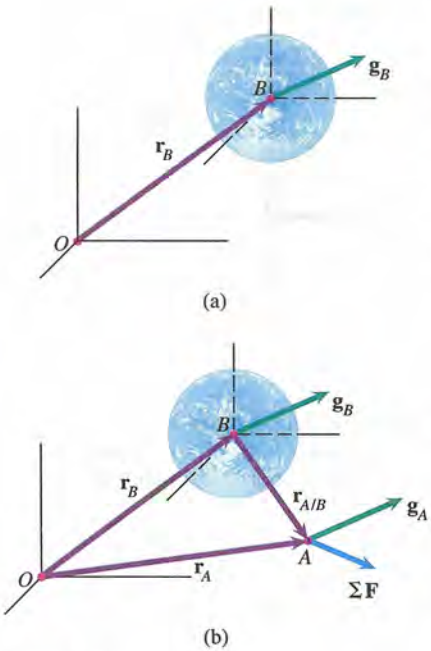


Figura 6.41

(a) Marco de referencia inercial y marco de referencia sin giro con su origen en el centro de la Tierra.
(b) Determinación del movimiento de un cuerpo A.

Sistema coordenado fijo a la Tierra En aplicaciones "mundanas", el mejor marco de referencia es un **sistema coordenado local fijo a la Tierra.** ¿Por qué podemos suponer que un sistema así es inercial? La Fig. 6.42 muestra un sistema coordenado sin giro con su origen en el centro O de la Tierra y uno fijo a la Tierra con su origen en un punto B. Como podemos suponer que el sistema sin giro centrado en la Tierra es inercial, escribimos la segunda ley de Newton para un cuerpo A de masa m como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_A, \tag{6.24}$$

donde $\mathbf{a}_A$ es la aceleración de A respecto a O. El marco de referencia fijo a la Tierra gira con la velocidad angular de ésta, que denotamos con ω_E. Podemos usar la Ec. (6.20) para escribir la Ec. (6.24) en la forma

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + m[\mathbf{a}_B + 2\omega_E \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \omega_E \times (\omega_E \times \mathbf{r}_{A/B})], \tag{6.25}$$

donde $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}$ es la aceleración de A respecto al sistema coordenado fijo a la Tierra. Si ignoramos los términos en corchetes de la Ec. (6.25), el sistema fijo a la Tierra es inercial. Consideremos cada término. (Recuerde, de la definición del producto vectorial, que $|\mathbf{U} \times \mathbf{V}| = |\mathbf{U}||\mathbf{V}|$ sen θ, donde θ es el ángulo entre los dos vectores. Por tanto, la magnitud del producto vectorial está limitada por el producto de las magnitudes de los vectores.)

- *El término* $\omega_E \times (\omega_E \times \mathbf{r}_{A/B})$**:** La velocidad angular de la Tierra ω_E es aproximadamente de una revolución por día $= 7.27 \times 10^{-5}$ rad/s. Por tanto, la magnitud de este término está limitada por $\omega^2_E\ |\mathbf{r}_{A/B}| = (5.29 \times 10^{-9})\ |\mathbf{r}_{A/B}|$. Por ejemplo, si la distancia $|\mathbf{r}_{A/B}|$ del origen del sistema coordenado fijo a la Tierra al cuerpo A es de 10 000 m, este término no es mayor que 5.3×10^{-5} m/s^2.
- *El término* $\mathbf{a}_B$: Es la aceleración del origen B del sistema coordenado fijo a la Tierra respecto al centro de ésta. B se mueve en una trayectoria circular debido a la rotación de la Tierra. Si B se encuentra en la superficie de la Tierra, este término está limitado por $\omega^2_E\ R_E$, donde R_E es el radio de la Tierra. Usando el valor $R_E = 6370$ km, $\omega^2_E\ R_E = 0.0337$ m/s^2. Este valor suele ser muy grande para ignorarlo, y normalmente se incluye el término como parte del valor local de la aceleración debida a la gravedad.
- *El término* $2\omega_E \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$: Es la **aceleración de Coriolis**. Su magnitud está limitada por $2\omega_E\ |\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}| = (1.45 \times 10^{-4})\ |\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}|$. Por ejemplo, si la magnitud de la velocidad de A respecto al sistema fijo a la Tierra es de 10 m/s, este término no es mayor que 1.45×10^{-3} m/s^2.

Vemos que en la mayoría de las aplicaciones los términos entre corchetes de la Ec. (6.25) pueden ignorarse, pero esto no siempre es posible. La aceleración de Coriolis es importante si la velocidad del cuerpo respecto a la Tierra es grande, y aun pequeñas aceleraciones son importantes si el movimiento tiene que predecirse en un periodo largo. En tales casos, aún se puede usar la Ec. (6.25), pero se deben retener los términos significativos. Los términos entre corchetes suelen pasarse al lado izquierdo:

$$\Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a}_B - 2m\omega_E \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} - m\omega_E \times (\omega_E \times \mathbf{r}_{A/B}) = m\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}. \tag{6.26}$$

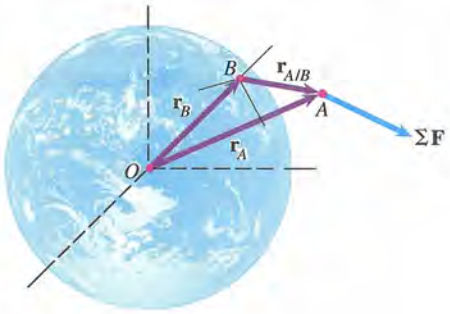


Figura 6.42
Marco de referencia sin giro centrado en la Tierra (origen O), marco de referencia fijo a la Tierra (origen B) y cuerpo A.

Escrita de esta manera, la ecuación tiene la forma usual de la segunda ley de Newton excepto que el lado izquierdo contiene "fuerzas" adicionales. Usamos comillas porque estos términos no son fuerzas, sino términos que surgen del movimiento del marco de referencia fijo a la Tierra.

El término $-2m\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{v}_{A\,rel}$ en la Ec. (6.26) se llama **fuerza de Coriolis**. Explica cierto número de fenómenos físicos que exhiben comportamientos diferentes en los hemisferios norte y sur, como la dirección en que un líquido tiende a girar al salir por un ducto, la dirección en que una viña tiende a crecer alrededor de un poste vertical, y la dirección de la rotación de un huracán. El vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_E$ de la Tierra apunta hacia el norte. Cuando un cuerpo en el hemisferio norte, que se está moviendo tangente a la superficie de la Tierra, viaja hacia el norte (Fig. 6.43a), el producto vectorial $\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{v}_{A\,rel}$ apunta hacia el oeste (Fig. 6.43b). Por tanto, la fuerza de Coriolis señala hacia el este, es decir, ocasiona que un cuerpo que se mueve hacia el norte se desvíe hacia la derecha (Fig. 6.43c). Si el cuerpo se está moviendo hacia el sur, la dirección de $\mathbf{v}_{A\,rel}$ se invierte y la fuerza de Coriolis apunta hacia el oeste, ocasionando que el cuerpo que se mueve hacia el sur gire a la derecha (Fig. 6.43c). Por ejemplo, en el hemisferio norte los vientos que convergen en un centro de baja presión tienden a girar alrededor de él en dirección antihoraria (Fig. 6.44a).

Cuando un cuerpo en el hemisferio sur viaja hacia el norte (Fig. 6.43d), el producto vectorial $\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{v}_{A\,rel}$ apunta hacia el este (Fig. 6.43e). La fuerza de Coriolis apunta hacia el oeste y ocasiona que el cuerpo gire hacia la izquierda (Fig. 6.43f). Si el cuerpo se está moviendo hacia el sur, la fuerza de Coriolis apunta hacia el este y ocasiona que el cuerpo gire hacia la izquierda (Fig. 6.43f). En el hemisferio sur, los vientos que convergen en un centro de baja presión tienden a girar alrededor de él en dirección horaria (Fig. 6.44b).

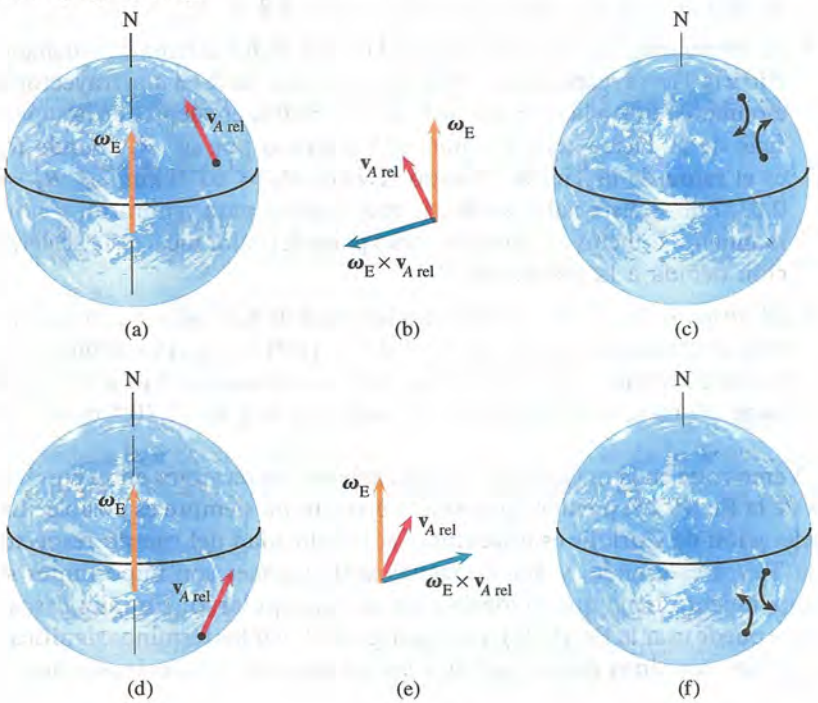
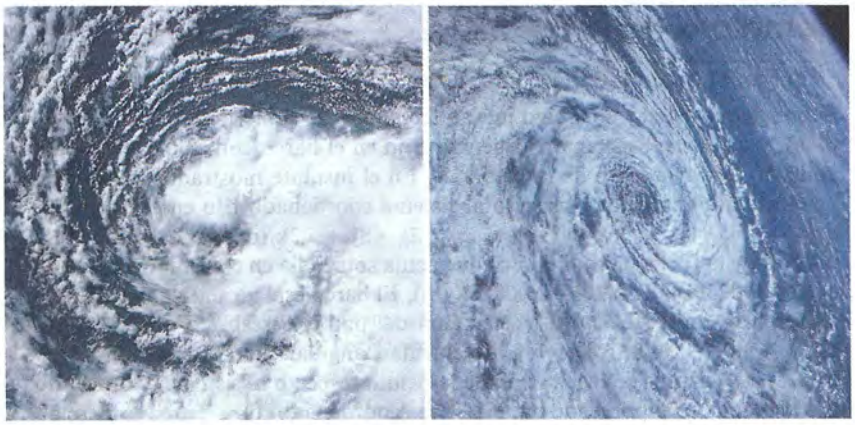


Figura 6.43

(a) Cuerpo en el hemisferio norte que se mueve hacia el norte.
(b) Producto vectorial de la velocidad angular de la Tierra y la velocidad del cuerpo.
(c) Efectos de la fuerza de Coriolis en el hemisferio norte.
(d) Cuerpo en el hemisferio sur que se mueve hacia el norte.
(e) Producto vectorial de la velocidad angular de la Tierra y la velocidad del cuerpo.
(f) Efectos de la fuerza de Coriolis en el hemisferio sur.



(a) (b)

Figura 6.44
Tormentas en (a) el hemisferio norte y (b) el hemisferio sur.

Sistema coordenado arbitrario ¿Cómo se analiza el movimiento de un cuerpo respecto a un sistema coordenado sometido a un movimiento arbitrario, como el sistema fijo a un vehículo en movimiento? Supongamos que el sistema coordenado con su origen en O en la Fig. 6.45 es inercial, y que el sistema coordenado con su origen en B sufre un movimiento arbitrario con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Podemos escribir la segunda ley de Newton para un cuerpo A de masa m como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_A, \tag{6.27}$$

donde $\mathbf{a}_A$ es la aceleración de A respecto a O. Usamos la Ec. (6.20) para escribir la Ec. (6.27) en la forma

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} - m[\mathbf{a}_B + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})] = m\mathbf{a}_{A\,\mathrm{rel}},} \tag{6.28}$$

donde $\mathbf{a}_{A\,\mathrm{rel}}$ es la aceleración de A respecto al sistema coordenado que sufre un movimiento arbitrario. Ésta es la segunda ley de Newton expresada en un marco de referencia sometido a un movimiento arbitrario respecto a un marco de referencia inercial: si se conocen las fuerzas que actúan sobre A y el movimiento del sistema coordenado, se puede usar esta ecuación para determinar $\mathbf{a}_{A\,\mathrm{rel}}$.

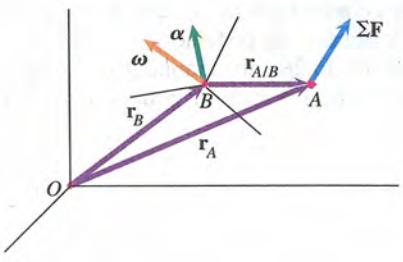
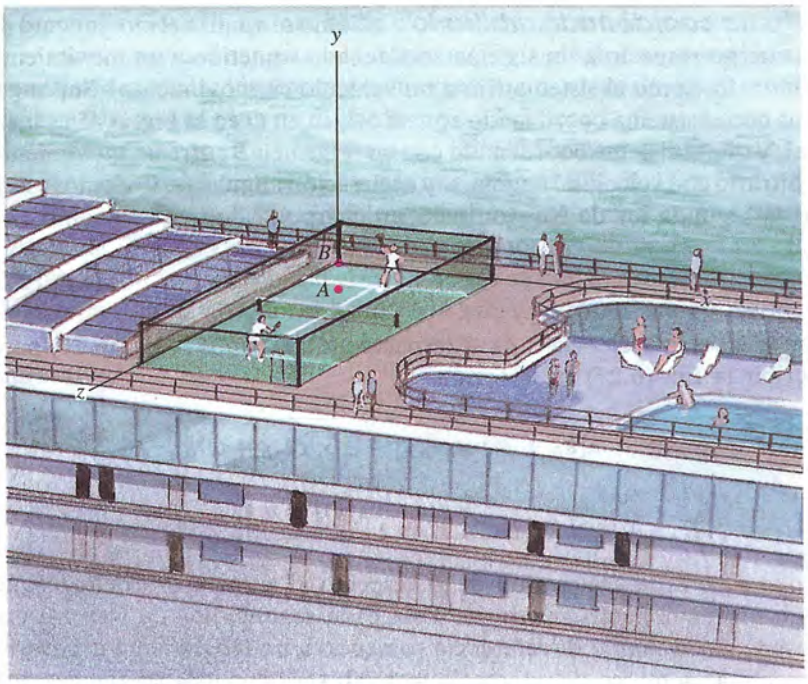


Figura 6.45
Marco de referencia inercial (origen O) y marco de referencia sometido a un movimiento arbitrario (origen B).

Ejemplo 6.12

Suponga que usted y un amigo juegan tenis sobre la cubierta de un barco (Fig. 6.46), y que usa el sistema coordenado fijo en el barco con origen en B para analizar el movimiento de la pelota A. En el instante mostrado, la posición y velocidad de la pelota respecto al sistema coordenado fijo en el barco son $\mathbf{r}_{A/B} = 15\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 36\mathbf{k}$ (pies) y $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ (pie/s). La pelota pesa 0.125 lb, y la fuerza aerodinámica que actúa sobre ella en el instante mostrado es $\mathbf{F} = 0.0250\mathbf{i} + 0.0010\mathbf{j} + 0.0025\mathbf{k}$ (lb). El barco está girando a razón constante y, en consecuencia, la aceleración del punto B respecto a la Tierra es $\mathbf{a}_B = -3.0\mathbf{i} + 0.2\mathbf{k}$ (pie/s^2) y la velocidad angular del barco es $\boldsymbol{\omega} = 0.1\mathbf{j}$ (rad/s). Determine la aceleración de la pelota respecto al sistema coordenado fijo al barco: (a) suponiendo que el sistema coordenado fijo al barco es inercial: (b) sin suponer que el sistema coordenado fijo al barco es inercial, pero suponiendo que un sistema coordenado local fijo a la Tierra es inercial.

Figura 6.46



ESTRATEGIA

En la parte (a) conocemos la masa de la pelota y las fuerzas externas que actúan sobre ella, por lo que podemos aplicar la segunda ley de Newton para determinar la aceleración. En la parte (b) podemos expresar la segunda ley de Newton en la forma dada por la Ec. (6.28), que se aplica a un sistema coordenado sometido a un movimiento arbitrario respecto a un sistema coordenado inercial.

SOLUCIÓN

(a) Suponiendo que el sistema coordenado fijo al barco es inercial, la segunda ley de Newton es

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}:$$

$$-0.125\,\mathbf{j} + (0.0250\,\mathbf{i} + 0.0010\,\mathbf{j} + 0.0025\,\mathbf{k}) = \left(\frac{0.125}{32.2}\right)\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos la aceleración de la pelota con base en la hipótesis de que el sistema coordenado fijo al barco es inercial:

$$\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} = 6.44\,\mathbf{i} - 31.94\,\mathbf{j} + 0.64\,\mathbf{k}\ (\text{pie/s}^2).$$

(b) Dividiendo la Ec. (6.28) entre m resulta

$$\left(\frac{1}{m}\right)\Sigma \mathbf{F} - \mathbf{a}_B - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) = \mathbf{a}_{A\,\text{rel}}:$$

$$\left[\frac{1}{(0.125/32.2)}\right]\left[-0.125\,\mathbf{j} + (0.0250\,\mathbf{i} + 0.0010\,\mathbf{j} + 0.0025\,\mathbf{k})\right]$$

$$-(-3.0\,\mathbf{i} + 0.2\,\mathbf{k}) - 2\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 2 & -8 & 22 \end{vmatrix} - 0$$

$$-(0.1\,\mathbf{j}) \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 15 & 8 & 36 \end{vmatrix} = \mathbf{a}_{A\,\text{rel.}}$$

La aceleración de la pelota, con base en la hipótesis de que el sistema coordenado fijo a la Tierra es inercial, es

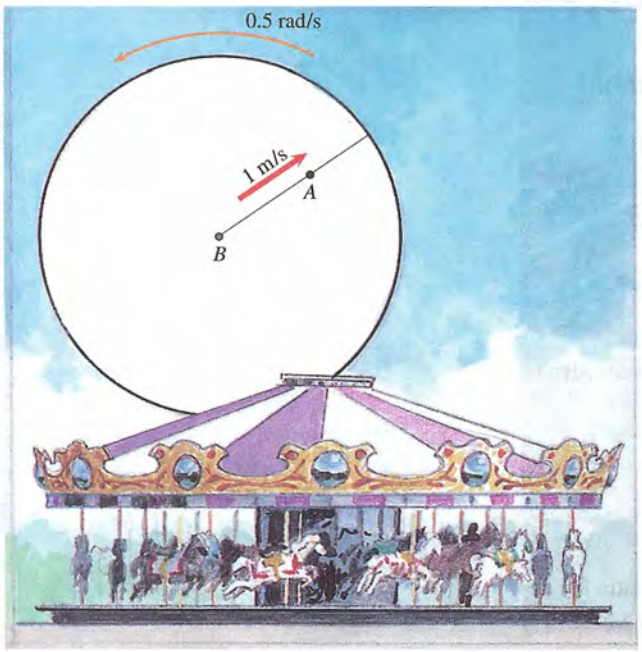
$$\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} = 5.19\,\mathbf{i} - 31.94\,\mathbf{j} + 1.20\,\mathbf{k}\ (\text{pie/s}^2).$$

COMENTARIO

Este ejemplo ilustra lo cuidadoso que hay que ser al aplicar la segunda ley de Newton. La aceleración obtenida al suponer que el sistema coordenado fijo al barco es inercial no se parece en nada al valor correcto.

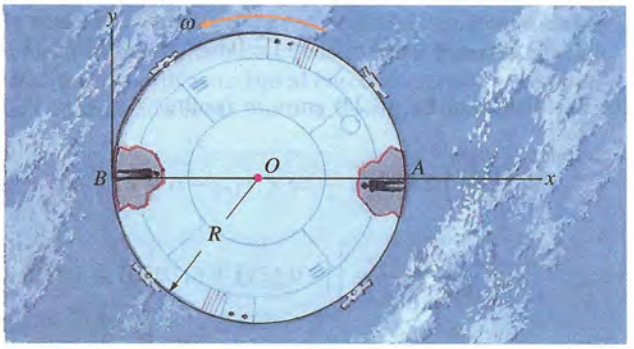
Problemas

6.125 Un carrusel gira a una velocidad angular constante de 0.5 rad/s. La persona A camina con una velocidad constante de 1 m/s a lo largo de una línea radial. Determine la velocidad y aceleración de A *respecto a la Tierra* cuando está a 2 m del centro del carrusel, usando dos métodos:
(a) Exprese velocidad y aceleración en coordenadas polares.
(b) Use las Ecs. (6.19) y (6.20) para expresar la velocidad y la aceleración en un sistema coordenado fijo al cuerpo con su eje x alineado con la línea a lo largo de la cual camina A y su eje z perpendicular al carrusel.



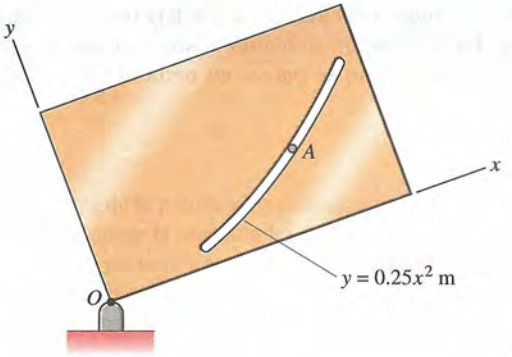
P6.125

6.126 Una estación espacial en forma de disco de radio R gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje perpendicular a la página. Dos personas están en reposo respecto a la estación en A y B, y O es el centro de la estación. Usando las Ecs. (6.19) y (6.20) y el sistema coordenado de cuerpo fijo mostrado, (a) determine la velocidad y la aceleración de A respecto a un marco de referencia sin giro con origen en O; (b) determine la velocidad y la aceleración de A respecto a un marco de referencia sin giro cuyo origen se mueve con el punto B.



P6.126

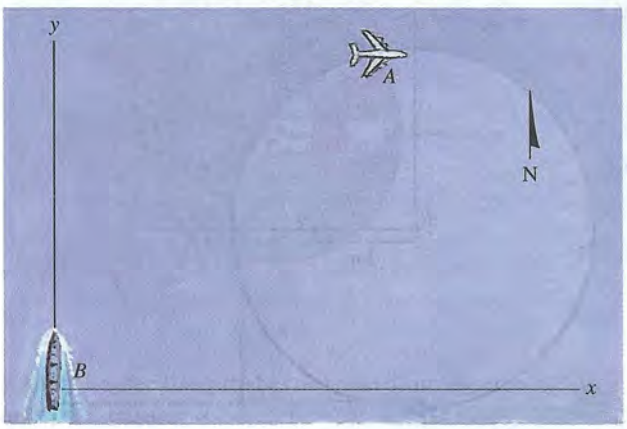
6.127 La placa metálica de la figura está unida a una junta esférica de soporte en O. El pasador A se desliza en una ranura de la placa. En el instante mostrado, $x_A = 1$ m, $dx_A/dt = 2$ m/s y $d^2x_A/dt^2 = 0$, y la velocidad y aceleración angulares son $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{k}$ (rad/s) y $\alpha = 0$. ¿Cuáles son las componentes x, y, z de la velocidad y aceleración de A respecto a un marco de referencia sin giro y en reposo respecto a O?



P6.127

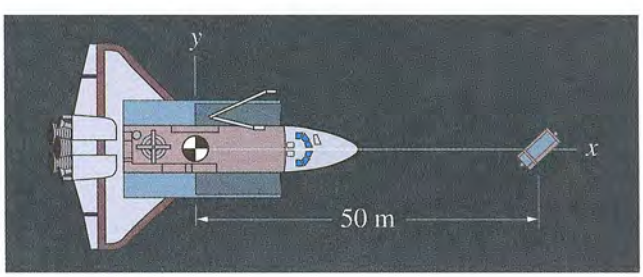
6.128 Suponga que en el instante mostrado en el Prob. 6.127, $x_A = 1$ m, $dx_A/dt = -3$ m/s, y $d^2x_A/dt^2 = 4$ m/s^2, y que la velocidad y la aceleración angulares de la placa son $\boldsymbol{\omega} = -4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (rad/s) y $\boldsymbol{\alpha} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ (rad/s^2). ¿Cuáles son las componentes x, y, z de la velocidad y aceleración de A respecto a un marco de referencia sin rotación que está en reposo respecto a O?

6.129 El sistema coordenado que se muestra está fijo al barco B, que se dirige hacia el norte a 10 pie/s respecto a la Tierra y con velocidad angular de 0.02 rad/s horaria. El avión vuela hacia el este a 400 pie/s respecto a la Tierra y su posición relativa a B es $\mathbf{r}_{A/B} = 2000\mathbf{i} + 2000\mathbf{j} + 1000\mathbf{k}$ (pies). Si el barco usa su radar para medir la velocidad del avión respecto a su sistema fijo al cuerpo, ¿qué valor obtiene?



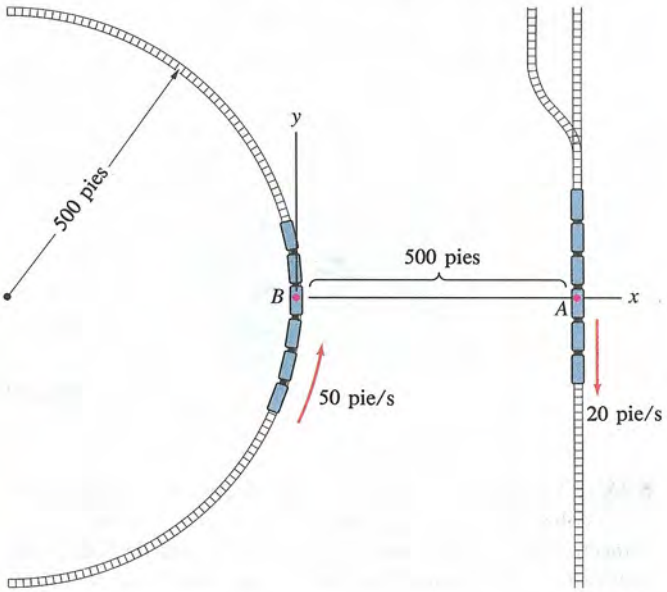
P6.129

6.130 Un transbordador espacial intenta recuperar un satélite para repararlo. En cierto momento, la posición del satélite respecto a un sistema coordenado fijo al transbordador es $50\mathbf{i}$ (m). Los giróscopos del transbordador indican que su velocidad angular es $0.05\mathbf{j} + 0.03\mathbf{k}$ (rad/s). El piloto mide la velocidad del satélite respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo y obtiene el valor $-2\mathbf{i} - 1.5\mathbf{j} + 2.5\mathbf{k}$ (m/s). ¿Cuáles son las componentes x, y, z de la velocidad del satélite respecto a un sistema coordenado sin giro con su origen en el transbordador?



P6.130

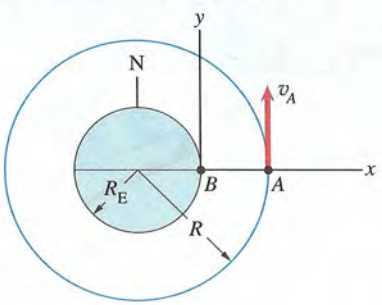
6.131 El tren sobre la vía circular de la figura viaja a una velocidad constante de 50 pie/s en la dirección mostrada. El tren sobre la vía recta viaja a 20 pie/s en la dirección mostrada e incrementa su velocidad a razón de 2 pie/s^2. Determine la velocidad del pasajero A que el pasajero B observa respecto al sistema que se muestra, el cual está fijo al vagón en que viaja B.



P6.131

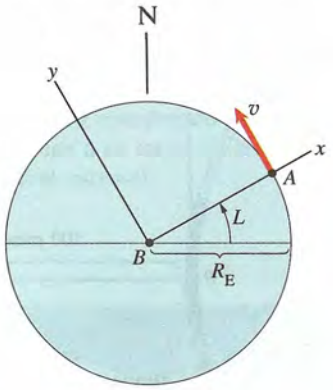
6.132 En el Prob. 6.131, determine la aceleración del pasajero A que el pasajero B observa respecto al sistema coordenado fijo al vagón en que viaja B.

6.133 El satélite A está en órbita circular polar (órbita que interseca los polos). El radio de la órbita es R, y la magnitud de la velocidad del satélite respecto a un marco de referencia sin giro con origen en el centro de la Tierra es v_A. En el instante mostrado, el satélite se encuentra sobre el ecuador. Un observador B sobre la Tierra directamente abajo del satélite mide su movimiento usando el sistema coordenado fijo a la Tierra mostrado. ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración del satélite respecto al sistema coordenado de B fijo a la Tierra? El radio de la Tierra es R_E y su velocidad angular es ω_E.



P6.133

6.134 Un automóvil A en latitud norte L viaja hacia el norte en una carretera con orientación norte-sur a una velocidad constante v. El radio de la Tierra es R_E y su velocidad angular es ω_E. Determine las componentes x, y, z de la velocidad y aceleración del automóvil (a) respecto al sistema coordenado fijo a la Tierra mostrado; (b) respecto a un sistema coordenado sin giro con su origen en el centro de la Tierra.

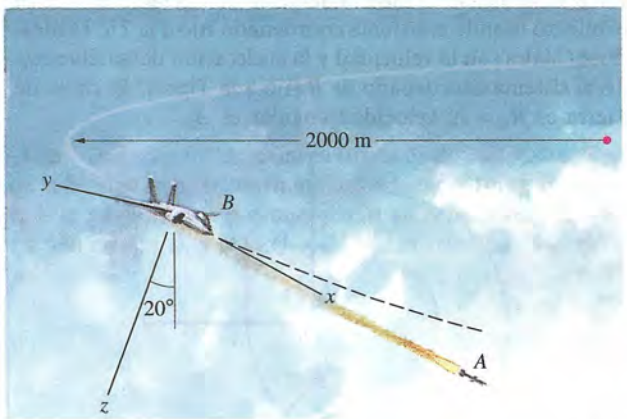


P6.134

6.135 En la Fig. P6.135 el avión B efectúa pruebas de vuelo de un cohete. En el instante mostrado, el avión viaja a 200 m/s respecto a la Tierra en una trayectoria circular de 2000 m de radio *en un plano horizontal*. El sistema coordenado está fijo respecto al avión. El eje x es tangente a la trayectoria y apunta hacia adelante. El eje y apunta hacia afuera del lado derecho del avión y el z hacia afuera del fondo del avión. La inclinación del eje z respecto a la vertical es constante e igual a 20°. *Respecto al sistema coordenado del avión*, el piloto mide la posición y velocidad del cohete y obtiene los valores $\mathbf{r}_{A/B} = 1000\mathbf{i}$ (m) y $\mathbf{v}_{A/B} = 100.0\mathbf{i} + 94.0\mathbf{j} + 34.2\mathbf{k}$ (m/s).

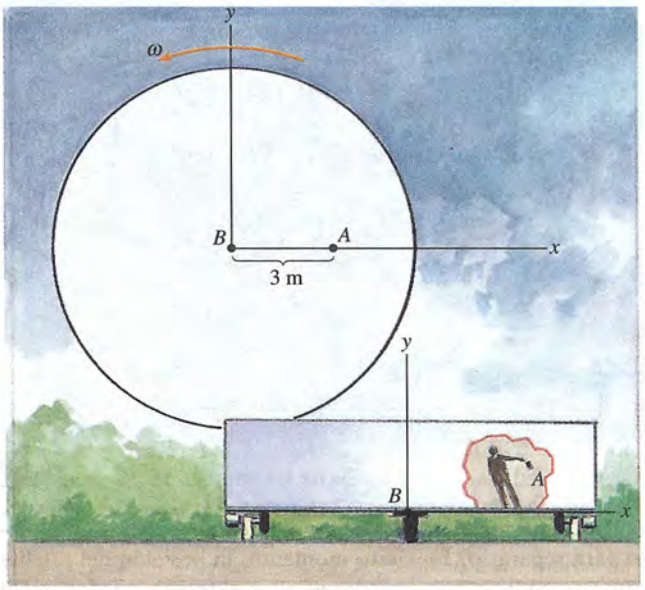
(a) ¿Cuáles son las componentes x, y, z del vector de velocidad angular del avión?

(b) ¿Cuáles son las componentes x, y, z de la velocidad del cohete respecto a la Tierra?



P6.135

6.136 Para llevar a cabo experimentos relacionados con vuelos espaciales de larga duración, se construye en la Tierra un laboratorio que gira alrededor del eje vertical en B con velocidad angular constante ω de 1 rev cada 6 s. Se establece un sistema coordenado fijo al laboratorio con su origen en B y el eje z dirigido hacia arriba. Un ingeniero sostiene un cuerpo en el punto A, a 3 m del eje de rotación, y lo suelta. En el instante en que suelta el cuerpo, determine su aceleración relativa al sistema coordenado fijo al laboratorio (a) suponiendo que este sistema es inercial; (b) sin suponer que este sistema es inercial, pero suponiendo que un sistema coordenado fijo a la Tierra con origen en B sí es inercial.



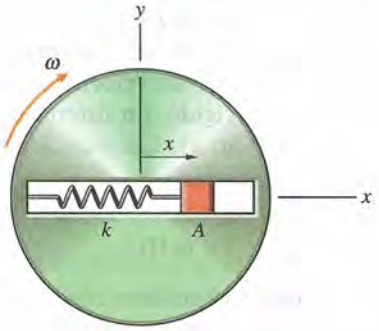
P6.136

6.137 Un disco *en un plano horizontal* gira alrededor de un eje fijo en el origen con velocidad angular constante ω. El deslizador A de masa m se mueve en una ranura lisa del disco. El resorte no está estirado cuando $x = 0$.

(a) Expresando la segunda ley de Newton en el sistema coordenado fijo al cuerpo, demuestre que el movimiento del deslizador está dado por la ecuación

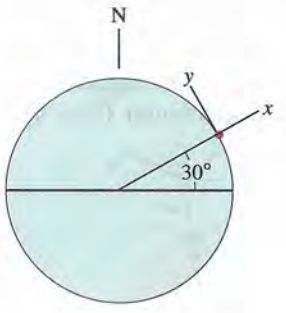
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = 0.$$

(b) El deslizador mostrado recibe una velocidad inicial $dx/dt = v_0$ en $x = 0$. Determine su velocidad en función de x.



P6.137

6.138 Se efectúan pruebas de vuelo de un cohete a 30° de latitud norte. Se mide el movimiento del cohete usando un sistema coordenado fijo a la Tierra con el eje x dirigido hacia arriba y el eje y hacia el norte. En un instante particular, la masa del cohete es de 4000 kg, su velocidad relativa al sistema coordenado es $2000\mathbf{i} + 2000\mathbf{j}$ (m/s) y la suma de las fuerzas ejercidas sobre el cohete por su empuje, peso y fuerzas aerodinámicas es $400\mathbf{i} + 400\mathbf{j}$ (N). Determine la aceleración del cohete respecto al sistema coordenado (a) suponiendo que el sistema coordenado fijo a la Tierra es inercial; (b) sin suponer que el sistema es inercial.

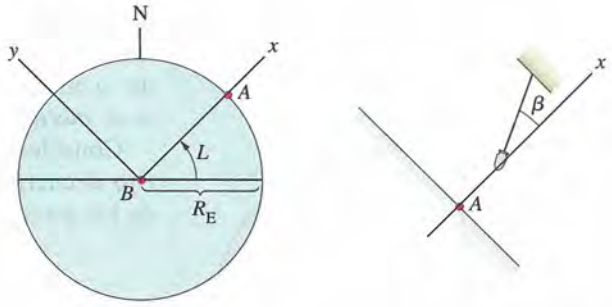


P6.138

6.139 Considere un punto A en la superficie de la Tierra con latitud norte L. El radio de la Tierra es R_E y su velocidad angular es ω_E. Una plomada suspendida justo sobre el terreno en A cuelga con un pequeño ángulo β respecto a la vertical debido a la rotación de la Tierra. Demuestre que β se relaciona con la latitud por

$$\tan\beta = \frac{\omega_E^2 R_E \operatorname{sen} L \cos L}{g - \omega_E^2 R_E \cos^2 L}.$$

Estrategia: Usando el sistema coordenado fijo a la Tierra que se muestra, exprese la segunda ley de Newton en la forma dada por la Ec. (6.25).



P6.139

6.140 Suponga que una estación espacial está en órbita alrededor de la Tierra y que dos astronautas dentro de ella se lanzan entre sí una pelota. Observan que la pelota parece viajar entre ellos en línea recta a velocidad constante.

(a) Escriba la segunda ley de Newton para la pelota al viajar entre ellos en un sistema coordenado sin giro estacionario respecto a la estación. ¿Qué es el término $\Sigma\mathbf{F}$? Use la ecuación para explicar el comportamiento de la pelota observado por los astronautas.

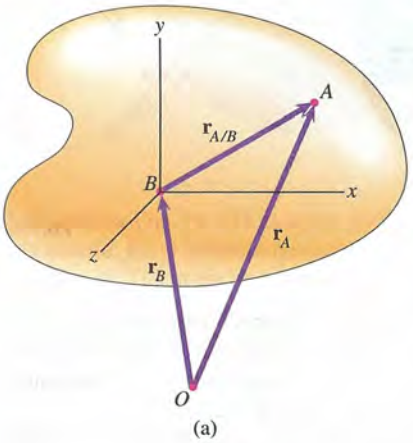
(b) Escriba la segunda ley de Newton para la pelota al viajar entre ellos en un sistema coordenado sin giro que sea estacionario respecto al centro de la Tierra. ¿Qué es el término $\Sigma\mathbf{F}$? Explique la diferencia entre esta ecuación y la obtenida en (a).

Resumen del capítulo

Un **cuerpo rígido** es un modelo idealizado de un cuerpo en el que la distancia entre cada par de puntos permanece constante. Si un cuerpo rígido en movimiento no gira, se dice que está en **traslación**. Si el centro de masa se mueve en un plano fijo y un eje de un sistema coordenado fijo al cuerpo permanece perpendicular al plano, se dice que está sometido a un movimiento **plano** o **bidimensional.**

Velocidades y aceleraciones relativas

El **vector de velocidad angular** $\boldsymbol{\omega}$ de un cuerpo rígido es paralelo al eje de rotación y su magnitud ω es la razón de rotación. Si el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección de $\boldsymbol{\omega}$, los dedos se enrollan alrededor de $\boldsymbol{\omega}$ en la dirección de la rotación. El **vector de aceleración angular** $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ es la razón de cambio del vector de velocidad angular.



(a)

Consideremos un punto B de un cuerpo rígido, un sistema coordenado fijo al cuerpo y un punto arbitrario A (Fig. a). Las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ de los puntos respecto a O están relacionadas por

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}, \qquad \text{Ec. (6.11)}$$

donde $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ es la velocidad de A respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo. Si A es un punto del cuerpo rígido, $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ es cero.

Las aceleraciones $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ de los puntos respecto a O están relacionadas por

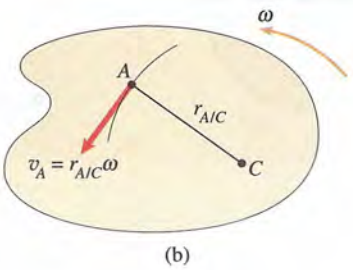
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}), \qquad \text{Ec. (6.13)}$$

donde $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}$ es la aceleración de A respecto al sistema coordenado fijo al cuerpo. En movimiento plano, el término $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B})$ se puede escribir en la forma más sencilla $-\omega^2 \mathbf{r}_{A/B}$.

Si A es un punto del cuerpo rígido, $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ y $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}$ son cero.

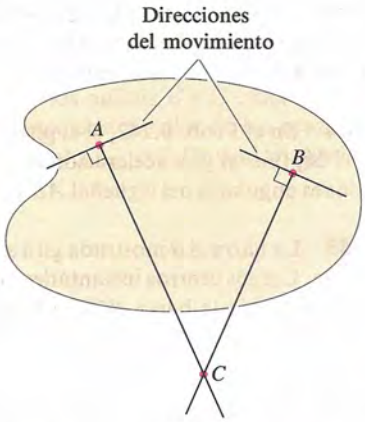
Centros instantáneos

Un **centro instantáneo** es un punto de un cuerpo rígido cuya velocidad en un instante dado es cero. Considere un cuerpo rígido en movimiento plano y suponga que C es un centro instantáneo. La velocidad de un punto A es perpendicular a la línea de C a A y su magnitud es el producto de la distancia de C a A por la velocidad angular (Fig. b).



(b)

Si se conocen las direcciones de los movimientos de dos puntos A y B de un cuerpo rígido en movimiento plano, las líneas por A y B perpendiculares a sus direcciones de movimiento se intersecan en el centro instantáneo (Fig. c).



(c)

Sistemas coordenados en rotación

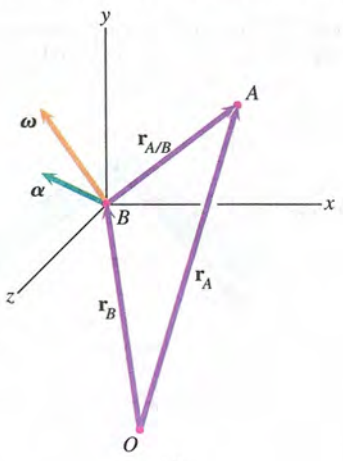
Consideremos un punto A y un sistema coordenado con origen en B que gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración $\boldsymbol{\alpha}$ (Fig. d). Las velocidades de A y B respecto a un sistema coordenado sin giro estacionario respecto al punto de referencia O están relacionadas por

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}\,, \qquad \textbf{Ec. (6.19)}$$

donde $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}}$ es la velocidad de A relativa al sistema coordenado en rotación. Las aceleraciones de A y B respecto al sistema coordenado sin giro que es estacionario con respecto al punto de referencia O están relacionadas por

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A\,\text{rel}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{A\,\text{rel}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}), \qquad \textbf{Ec. (6.20)}$$

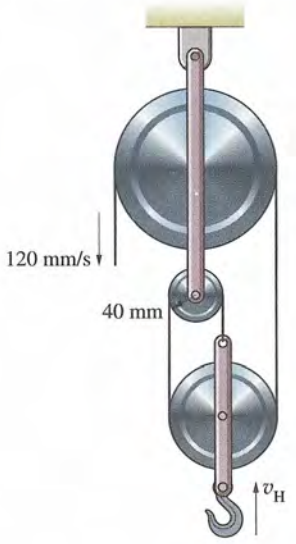
donde $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}}$ es la aceleración de A relativa al sistema coordenado en rotación.



(d)

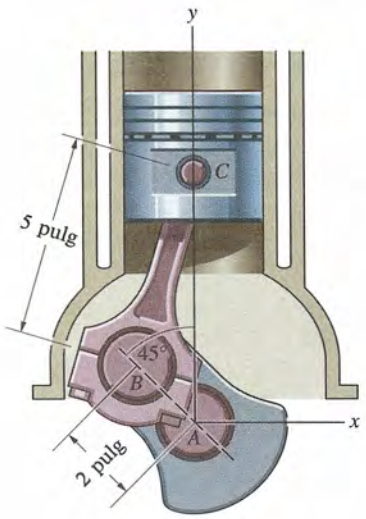
Problemas de repaso

6.141 En la Fig. P6.141 determine la velocidad vertical v_H del gancho y la velocidad angular de la polea pequeña.



P6.141

6.142 Si el cigüeñal AB mostrado gira en dirección antihoraria a 2000 rpm, ¿cuál es la velocidad del pistón?

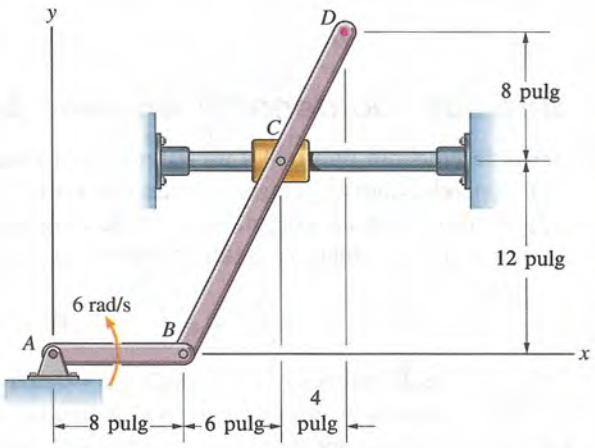


P6.142

6.143 En el Prob. 6.142, si el pistón se mueve con velocidad $\mathbf{v}_C = 20\mathbf{j}$ (pie/s), ¿cuáles son las velocidades angulares del cigüeñal AB y de la barra conectora BC?

6.144 En el Prob. 6.142, si el pistón se mueve con velocidad $\mathbf{v}_C = 20\mathbf{j}$ (pie/s) y su aceleración es cero, ¿cuáles son las aceleraciones angulares del cigüeñal AB y de la barra conectora BC?

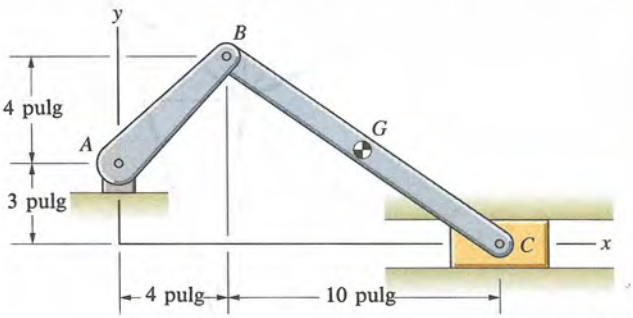
6.145 La barra AB mostrada gira a 6 rad/s en dirección antihoraria. Use los centros instantáneos para determinar la velocidad angular de la barra BCD y la velocidad del punto D.



P6.145

6.146 En el Prob. 6.145, la barra AB gira a una velocidad angular constante de 6 rad/s en dirección antihoraria. Determine la aceleración del punto D.

6.147 El punto C se está moviendo hacia la derecha a 20 pulg/s. ¿Cuál es la velocidad del punto medio G de la barra BC?

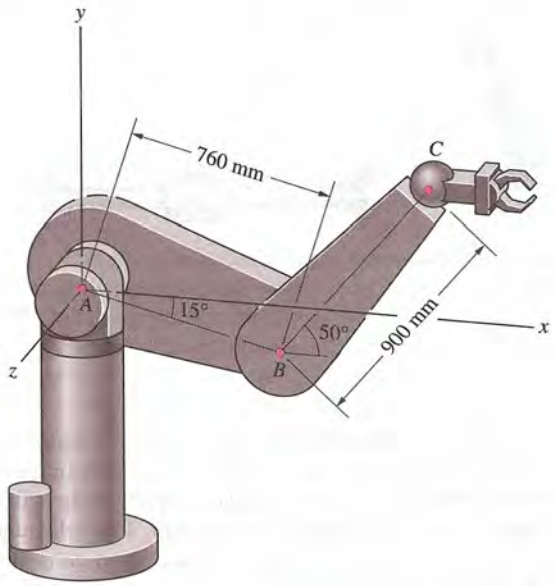


P6.147

6.148 En el Prob. 6.147, el punto C se está moviendo hacia la derecha con una velocidad constante de 20 pulg/s. ¿Cuál es la aceleración del punto medio G de la barra BC?

6.149 En el Prob. 6.147, si la velocidad del punto C es $\mathbf{v}_C = 1.0\mathbf{i}$ (pulg/s), ¿cuáles son los vectores de velocidad angular de los brazos AB y BC?

6.150 En la Fig. P6.150 los puntos B y C están en el plano $x - y$. Los vectores de velocidad angular de los brazos AB y BC son $\omega_{AB} = -0.5\mathbf{k}$ (rad/s), $\omega_{BC} = 2.0\mathbf{k}$ (rad/s). Determine la velocidad del punto C.



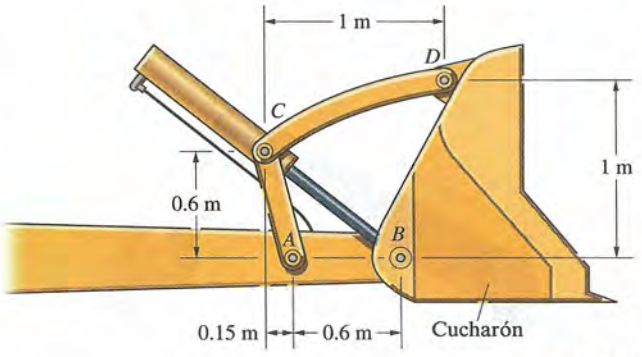
P6.150

6.151 En el Prob. 6.150, si la velocidad del punto C es $\mathbf{v}_C = 1.0\mathbf{i}$ (m/s), ¿cuáles son los vectores de velocidad angular de los brazos AB y BC?

6.152 En el Prob. 6.150, si los vectores de velocidad angular de los brazos AB y BC son $\omega_{AB} = -0.5\mathbf{k}$ (rad/s), y $\omega_{BC} = 2.0\mathbf{k}$ (rad/s), y sus vectores de aceleración angular son $\alpha_{AB} = 1.0\mathbf{k}$ (rad/s^2), $\alpha_{BC} = 1.0\mathbf{k}$ (rad/s^2), ¿cuál es la aceleración de C?

6.153 En el Prob. 6.150, si la velocidad del punto C es $\mathbf{v}_C = 1.0\mathbf{i}$ (m/s) y $\mathbf{a}_C = 0$, ¿cuáles son los vectores de la velocidad y la aceleración angulares del brazo BC?

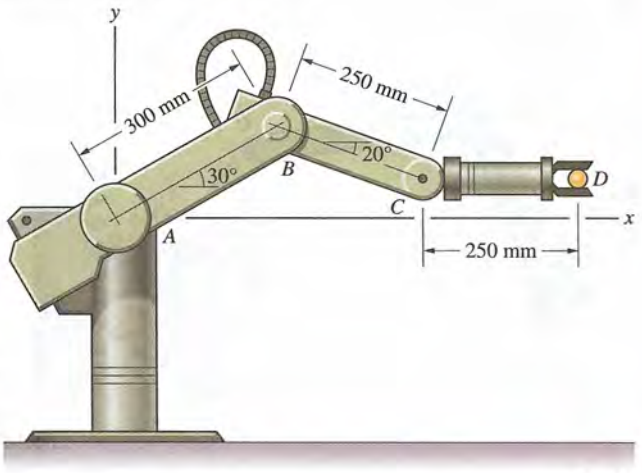
6.154 En la Fig. P6.154 la velocidad angular del brazo AC es de 1 rad/s antihoraria. ¿Cuál es la velocidad angular del cucharón?



P6.154

6.155 La velocidad angular del brazo AC del Prob. 6.154 es de 2 rad/s antihoraria y su aceleración angular es de 4 rad/s^2 horaria. ¿Cuál es la aceleración angular del cucharón?

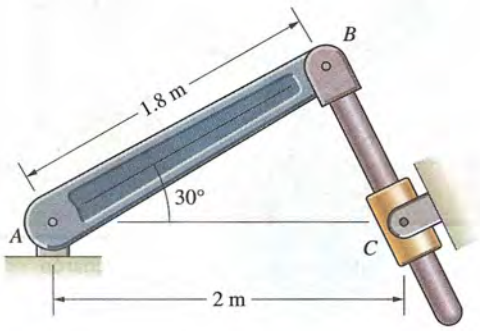
6.156 Si se quiere programar el robot de manera que en el instante mostrado la velocidad del punto D sea $\mathbf{v}_D = 0.2\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j}$ (m/s) y la velocidad angular del brazo CD sea 0.3 rad/s antihoraria, ¿cuáles son las velocidades angulares necesarias de los brazos AB y BC?



P6.156

6.157 En el Prob. 6.156, si la aceleración del punto D y la aceleración angular del brazo CD son cero en el instante mostrado, ¿cuáles son las aceleraciones angulares de los brazos AB y BC?

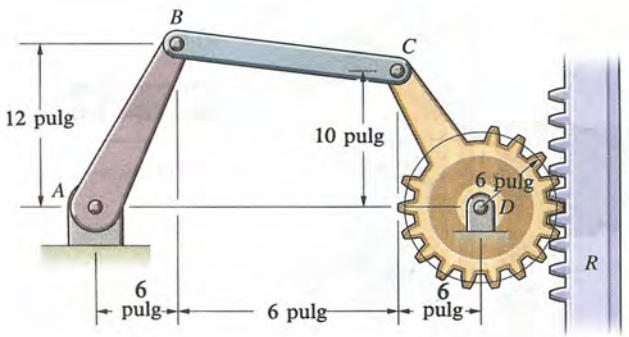
6.158 El brazo AB mostrado gira a 10 rad/s en dirección horaria. Determine la velocidad angular del brazo BC y la velocidad a la que se desliza respecto al manguito en C.



P6.158

6.159 En el Prob. 6.158, el brazo AB gira a una velocidad angular de 10 rad/s y una aceleración angular de 20 rad/s^2, ambas en dirección horarja. Determine la aceleración angular del brazo BC.

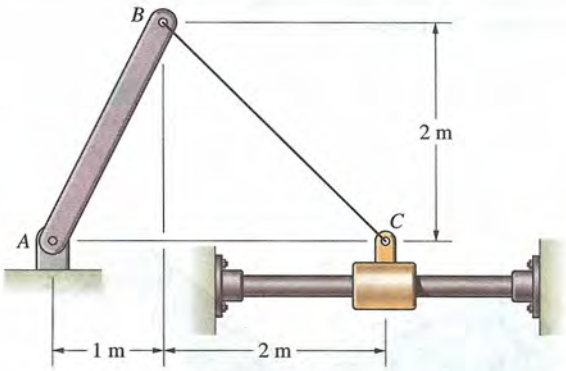
6.160 El brazo AB mostrado gira a una velocidad angular antihoraria constante de 10 rad/s. Determine la velocidad y la aceleración verticales de la cremallera R del engrane de piñón y cremallera.



P6.160

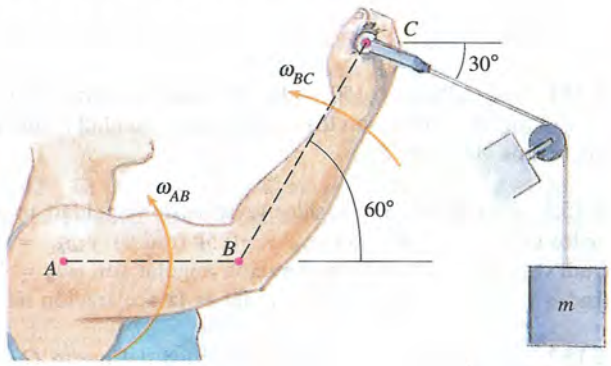
6.161 En el Prob. 6.160, si la cremallera R del engrane de piñón y cremallera se mueve hacia arriba a una velocidad constante de 10 pie/s, ¿cuáles son la velocidad y la aceleración angulares de la barra BC?

6.162 La barra AB de la figura tiene una velocidad angular antihoraria constante de 2 rad/s. El collarín C de 1 kg se desliza sobre la barra horizontal lisa. En el instante mostrado, ¿cuál es la tensión en el cable BC?



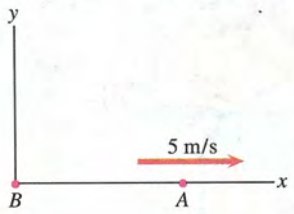
P6.162

6.163 El atleta de la figura ejercita su brazo levantando la masa m de 8 kg. La articulación del hombro A está en reposo. La distancia AB es de 300 mm, la distancia BC es de 400 mm y la distancia de C a la polea es de 340 mm. Las velocidades angulares $\omega_{AB} = 1.5$ rad/s y $\omega_{BC} = 2$ rad/s son constantes. ¿Cuál es la tensión en el cable?



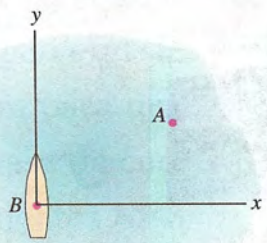
P6.163

6.164 El sistema coordenado de la figura gira con velocidad angular constante $\omega = 2\mathbf{k}$ (rad/s). El punto A se mueve hacia afuera a lo largo del eje x a una razón constante de 5 m/s.
(a) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración de A respecto al sistema coordenado?
(b) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración de A respecto a un sistema coordenado sin giro con su origen en B, cuando A está en la posición $x = 1$ m?



P6.164

6.165 El sistema coordenado de la figura está fijo respecto al barco B. Éste usa su radar para medir la posición de una boya A estacionaria y determina que es $400\mathbf{i} + 200\mathbf{j}$ (m). También mide la velocidad de la boya respecto a su sistema coordenado fijo al cuerpo y obtiene el valor $2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ (m/s). ¿Cuáles son la velocidad y la velocidad angular del barco respecto a la Tierra? (Suponga que la velocidad del barco es en la dirección del eje y.)



P6.165

La pala frontal de una excavadora tiene movimiento bidimensional cuando el cilindro hidráulico y elementos accesorios la levantan y la hacen girar en un plano vertical. La segunda ley de Newton relaciona la suma de las fuerzas sobre la pala con la aceleración de su centro de masa, y una ecuación de movimiento angular relaciona la suma de los momentos respecto al centro de masa de la pala con su aceleración angular. Usaremos diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de movimiento de cuerpos rígidos para determinar movimientos debidos a fuerzas y pares.

Capítulo 7

Dinámica bidimensional de cuerpos rígidos

EN el capítulo 6 analizamos los movimientos bidimensionales de cuerpos rígidos sin considerar las fuerzas y pares que los producen. Usamos la segunda ley de Newton para determinar los movimientos de los centros de masa de cuerpos, pero ¿cómo se determinan sus movimientos *rotacionales*? En este capítulo deducimos ecuaciones bidimensionales para el movimiento angular de un cuerpo rígido. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo, como el cucharón de una excavadora, podemos determinar la aceleración de su centro de masa y su aceleración angular en función de las fuerzas y pares a que está sometido.

7.1 Revisión previa de las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones bidimensionales del movimiento angular de un cuerpo rígido son muy sencillas, pero durante su deducción es fácil perder de vista su esencia. Para evitar esto, aquí resumiremos las ecuaciones.

Las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido incluyen la segunda ley de Newton,

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

la cual establece que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración de su centro de masa. Las ecuaciones de movimiento se completan con una ecuación de movimiento angular. Si el cuerpo rígido gira respecto a un eje fijo O (Fig. 7.1a), la suma de los momentos respecto al eje debido a las fuerzas y pares externos sobre él se relaciona con su aceleración angular por

$$\Sigma M_O = I_O \alpha,$$

donde I_O es el momento de inercia de masa del cuerpo rígido respecto a O. Así como la masa de un cuerpo determina la aceleración que resulta de las fuerzas que actúan sobre él, su momento de inercia de masa I_O respecto a un eje fijo determina la aceleración angular resultante de la suma de los momentos respecto al eje.

En el movimiento plano (Fig. b), la suma de los momentos respecto al centro de masa está relacionada con su aceleración angular por

$$\Sigma M = I\alpha,$$

donde I es el momento de inercia de masa del cuerpo rígido respecto a su centro de masa. Si conocemos las fuerzas y pares externos que actúan sobre un cuerpo rígido en movimiento plano, podemos usar esas ecuaciones para determinar la aceleración de su centro de masa y su aceleración angular.

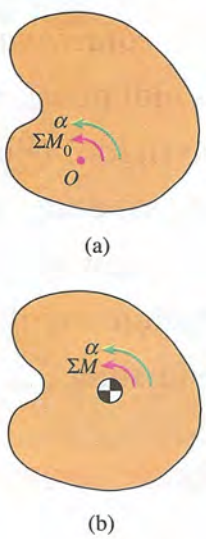


Figura 7.1
(a) Cuerpo rígido girando alrededor de un eje fijo O.
(b) Cuerpo rígido en movimiento plano general.

7.2 Principios de la cantidad de movimiento para un sistema de partículas

En este capítulo y en el análisis de la dinámica tridimensional de cuerpos rígidos del Cap. 9, nuestras deducciones de las ecuaciones del movimiento empiezan con los principios que rigen el movimiento de un sistema de partículas. En esta sección resumimos estos importantes principios generales.

Principio de la fuerza y cantidad de movimiento lineal

Primero veremos que la suma de las fuerzas externas sobre un sistema de partículas es igual a la razón de cambio de su cantidad de movimiento lineal total. Sea un sistema de N partículas donde m_i es la masa de la i-ésima partícula y $\mathbf{r}_i$ su vector de posición respecto al punto fijo O (Fig. 7.2). Sea $\mathbf{f}_{ij}$ la fuerza ejercida por la j-ésima partícula sobre la i-ésima partícula, y sea $\mathbf{f}_i^E$ la fuerza externa sobre la i-ésima partícula (es decir, la fuerza total ejercida por cuerpos ajenos al sistema). La segunda ley de Newton establece que la fuerza total sobre la i-ésima partícula es igual al producto de su masa por la razón de cambio de su cantidad de movimiento lineal,

$$\sum_j \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i^E = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i), \tag{7.1}$$

donde $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ es la velocidad de la i-ésima partícula. Escribiendo esta ecuación para cada partícula del sistema y sumando de $i = 1$ a N, obtenemos

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} + \sum_i \mathbf{f}_i^E = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \tag{7.2}$$

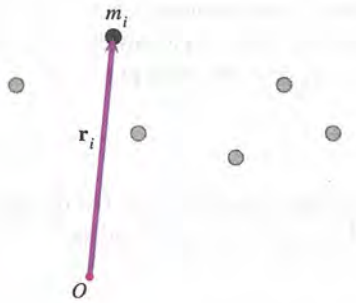


Figura 7.2
Sistema de partículas. El vector $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la i-ésima partícula.

El primer término del lado izquierdo de esta ecuación es la suma de las fuerzas internas sobre el sistema de partículas. Como consecuencia de la tercera ley de Newton ($\mathbf{f}_{ji} + \mathbf{f}_{ij} = 0$), este término es igual a cero:

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{f}_{31} + \cdots = \mathbf{0}.$$

El segundo término del lado izquierdo de la Ec. (7.2) es la suma de las fuerzas externas sobre el sistema. Denotándolo con $\Sigma\mathbf{F}$, concluimos que la suma de las fuerzas externas sobre el sistema es igual a la razón de cambio de su cantidad de movimiento lineal total:

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\mathbf{v}_i. \tag{7.3}$$

Sea m la suma de las masas de las partículas:

$$m = \sum_i m_i.$$

La posición del centro de masa del sistema es

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{m}, \tag{7.4}$$

por lo que la velocidad del centro de masa es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{v}_i}{m}.$$

Usando esta expresión podemos escribir la Ec. (7.3) como

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}).$$

La fuerza externa total sobre un sistema de partículas es igual a la razón de cambio del producto de su masa total por la velocidad de su centro de masa. Como cualquier cuerpo o colección de cuerpos, incluyendo un cuerpo rígido, se puede considerar como un sistema de partículas, este resultado es uno de los más generales y elegantes de la mecánica. Además, si la masa total m es constante, obtenemos

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

donde $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ es la aceleración del centro de masa. La fuerza externa total es igual al producto de la masa total por la aceleración del centro de masa.

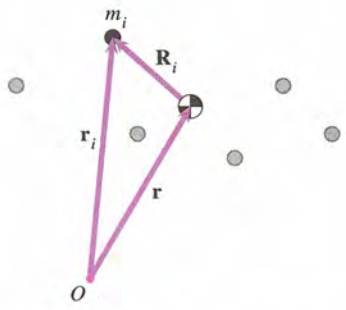


Figura 7.3
El vector $\mathbf{R}_i$ es el vector de posición de la i-ésima partícula respecto al centro de masa.

Principios del momento y momento angular

Ahora obtenemos relaciones entre la suma de los momentos debidos a las fuerzas externas sobre un sistema de partículas y la razón de cambio de su momento angular total.

La posición de la i-ésima partícula del sistema respecto a O está relacionada con su posición respecto al centro de masa (Fig. 7.3) por

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \mathbf{R}_i. \tag{7.5}$$

Al multiplicar esta ecuación por m_i, sumando de 1 a N, y usar la Ec. (7.4)

encontramos que las posiciones de las partículas respecto al centro de masa están relacionadas por

$$\sum_i m_i \mathbf{R}_i = 0. \tag{7.6}$$

El momento angular total del sistema respecto a O es la suma de los momentos angulares de las partículas,

$$\mathbf{H}_0 = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \tag{7.7}$$

donde $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$. El momento angular del sistema respecto a su centro de masa (es decir, el momento angular respecto al punto fijo que coincide con el centro de masa en el instante presente) es

$$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{R}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \tag{7.8}$$

Usando las Ecs. (7.5) y (7.6) se puede demostrar que

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{H}. \tag{7.9}$$

Esto expresa el momento angular total respecto a O como la suma de los momentos angulares respecto a O debido a la velocidad $\mathbf{v}$ del centro de masa del sistema y el momento angular total respecto al centro de masa (Fig. 7.4).

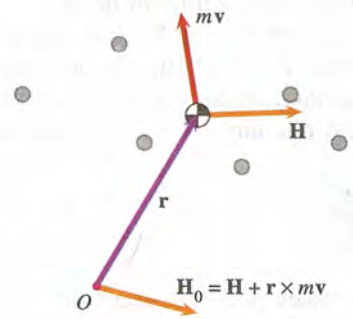


Figura 7.4
El momento angular respecto a O es igual a la suma del momento angular respecto al centro de masa y el momento angular respecto a O debido a la velocidad del centro de masa.

Para obtener relaciones entre el momento total ejercido sobre el sistema y su momento angular total, partimos de la segunda ley de Newton. Formamos el producto vectorial de la Ec. (7.1) con el vector de posición $\mathbf{r}_i$ y sumamos de $i = 1$ a N:

$$\sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^E = \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i). \tag{7.10}$$

El término del lado derecho de esta ecuación es la razón de cambio del momento angular total del sistema respecto a O:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \sum_i \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) - \underbrace{\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i}_{=0} \right] = \frac{d\mathbf{H}_0}{dt}.$$

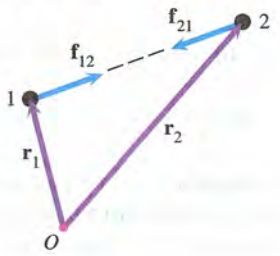
(El segundo término entre corchetes desaparece porque el producto vectorial de dos vectores paralelos es igual a cero.)

El primer término del lado izquierdo de la Ec. (7.10) es la suma de los momentos respecto a O de las fuerzas internas, y desaparece si las fuerzas internas entre cada par de partículas no sólo son iguales y opuestas sino que también *están dirigidas a lo largo de la recta entre las dos partículas.* (Esta hipótesis es válida excepto en sistemas que implican fuerzas electromagnéticas entre partículas cargadas.) Por ejemplo, sean las partículas 1 y 2 de la Fig. 7.5. Si las fuerzas internas están dirigidas a lo largo de la recta entre las partículas, podemos escribir el momento respecto a O debido a $\mathbf{f}_{21}$ como $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{21}$, y el momento total respecto a O debido a las fuerzas que las dos partículas ejercen entre sí es

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{12} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{21} = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21}) = \mathbf{0}.$$

Figura 7.5

Partículas 1 y 2 y las fuerzas que ejercen entre sí. Si las fuerzas actúan a lo largo de la línea entre las partículas, su momento total respecto a O es cero.



El segundo término del lado izquierdo de la Ec. (7.10) es la suma de los momentos respecto a O debido a las fuerzas y pares externos, que denotamos con $\Sigma\mathbf{M}_0$. Por tanto, la Ec. (7.10) establece que la suma de los momentos respecto a O de las fuerzas y pares externos es igual a la razón de cambio del momento angular del sistema respecto a O:

$$\Sigma\mathbf{M}_0 = \frac{d\mathbf{H}_0}{dt}. \tag{7.11}$$

Usando la Ec. (7.9), también podemos escribir este resultado en función del momento angular total respecto al centro de masa,

$$\Sigma\mathbf{M}_0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{H}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} + \frac{d\mathbf{H}}{dt}, \tag{7.12}$$

donde $\mathbf{a}$ es la aceleración del centro de masa.

También necesitamos determinar la relación entre la suma de los momentos respecto al centro de masa del sistema, que denotamos con $\Sigma\mathbf{M}$, y el momento angular respecto a su centro de masa. Podemos obtener este resultado de la Ec. (7.12) haciendo que el punto fijo O coincida con el centro de masa en el instante presente. En ese caso $\Sigma\mathbf{M}_0 = \Sigma\mathbf{M}$ y $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, y vemos que la suma de los momentos respecto al centro de masa es igual a la razón de cambio del momento angular respecto al centro de masa:

$$\Sigma\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt}. \tag{7.13}$$

7.3 Deducción de las ecuaciones de movimiento

Ahora deduciremos las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido con movimiento bidimensional. Ya hemos mostrado que la fuerza externa total sobre cualquier cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración de su centro de masa:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Por tanto, esta ecuación, llamada segunda ley de Newton, describe el movimiento del centro de masa de un cuerpo rígido. Para deducir las ecuaciones del movimiento angular, primero consideramos la rotación alrededor de un eje fijo y luego el movimiento plano general.

Rotación alrededor de un eje fijo

Supongamos que un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo L_0 que pasa por un punto fijo O. En un sistema coordenado con el eje z alineado con L_0 (Fig. 7.6a), podemos expresar el vector de velocidad angular como $\omega = \omega\mathbf{k}$, y la velocidad de la i-ésima partícula es $d\mathbf{r}_i/dt = \omega \times \mathbf{r}_i = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i$. Sea $\Sigma M_0 = \Sigma \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{k}$ la suma de los momentos respecto a L_0. De las Ecs. (7.7) y (7.11),

$$\Sigma M_0 = \frac{dH_0}{dt}, \tag{7.14}$$

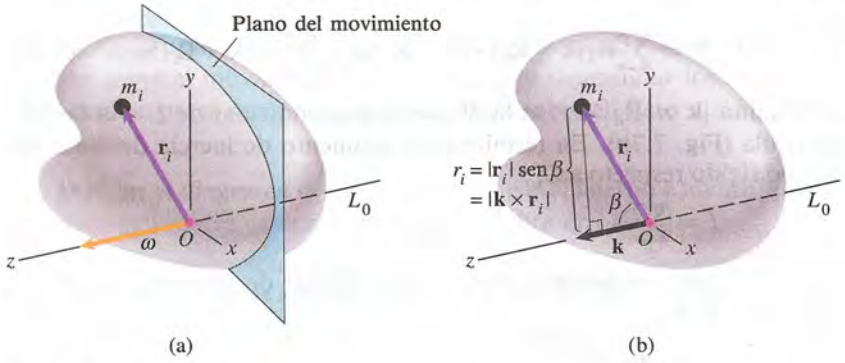


Figura 7.6

(a) Sistema coordenado con el eje z alineado con el eje de rotación L_0.
(b) La magnitud de $\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i$ es la distancia perpendicular del eje de rotación a m_i.

donde

$$H_0 = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{k} = \sum_i [\mathbf{r}_i \times m_i(\omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i)] \cdot \mathbf{k} \tag{7.15}$$

es el momento angular respecto a L_0. Si usamos la identidad $\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{W}$, podemos escribir la Ec. (7.15) como

$$H_0 = \sum_i m_i(\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i)\omega = \sum_i m_i |\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i|^2 \omega. \tag{7.16}$$

En la Fig. 7.6(b) mostramos que $|\mathbf{k} \times \mathbf{r}_i|$ es la distancia perpendicular de L_0 a la i-ésima partícula, que denotamos con r_i. Usando la definición del momento de inercia de masa del cuerpo rígido respecto a L_0,

$$I_0 = \sum_i m_i r_i^2,$$

podemos escribir la Ec. (7.16) como

$$H_0 = I_0\omega.$$

Sustituimos esta expresión en la Ec. (7.14) y tenemos la ecuación del movimiento angular de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo O:

$$\Sigma M_0 = I_0\alpha. \tag{7.17}$$

Movimiento plano general

Sea L_0 el eje que pasa por un punto fijo O que es perpendicular al plano del movimiento de un cuerpo rígido, y sea L el eje paralelo que pasa por el centro de masa (Fig. 7.7a). *No* suponemos que el cuerpo rígido gira alrededor de L_0. En el sistema coordenado que se muestra, podemos expresar el vector de velocidad angular como $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, y la velocidad de la i-ésima partícula respecto al centro de masa es $d\mathbf{R}_i/dt = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i$. De las Ecs. (7.8) y (7.12),

$$\Sigma M_0 = \frac{d}{dt}[(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + H], \tag{7.18}$$

donde

$$H = \mathbf{H} \cdot \mathbf{k} = \sum_i [\mathbf{R}_i \times m_i(\omega\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i)] \cdot \mathbf{k}$$

es el momento angular respecto a L. Usando la misma identidad que aplicamos a la Ec. (7.15), podemos escribir esta ecuación para H como

$$H = \sum_i m_i(\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i)\omega = \sum_i m_i|\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i|^2\omega. \tag{7.19}$$

El término $|\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i| = r_i$ es la distancia perpendicular de L a la i-ésima partícula (Fig. 7.7b). En términos del momento de inercia de masa del cuerpo rígido respecto a L,

$$I = \sum_i m_i r_i^2,$$

y la Ec. (7.19) establece que el momento angular de un cuerpo rígido respecto a L es

$$H = I\omega.$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (7.18) obtenemos

$$\Sigma M_0 = \frac{d}{dt}[(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega] = (\mathbf{r} \times m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{k} + I\alpha. \tag{7.20}$$

Con esta ecuación podemos obtener la relación entre la suma de los momentos respecto a L, que denotamos con ΣM, y la aceleración angular. Si hacemos que el eje fijo L_0 coincida con L en el instante presente, $\Sigma M_0 = \Sigma M$ y $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, y de la Ec. (7.20) obtenemos

$$\Sigma M = I\alpha.$$

La suma de los momentos respecto a L es igual al producto del momento de inercia respecto a L por la aceleración angular.

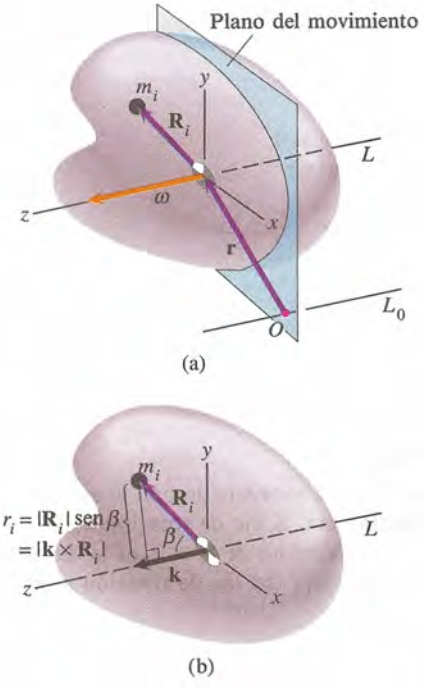


Figura 7.7

(a) Sistema coordenado con el eje z alineado con L.
(b) La magnitud de $\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i$ es la distancia perpendicular de L a m_i.

7.4 Aplicaciones

Hemos visto que las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido en movimiento plano incluyen la segunda ley de Newton,

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a},} \tag{7.21}$$

donde **a** es la aceleración del centro de masa, y una ecuación que relaciona los momentos debidos a fuerzas y pares con la aceleración angular. Si el cuerpo rígido gira respecto a un eje fijo O, el momento total respecto a O es igual al producto del momento de inercia respecto a O por la aceleración angular:

$$\boxed{\Sigma M_O = I_O \alpha.} \tag{7.22}$$

En *cualquier* movimiento plano, el momento total respecto al centro de masa es igual al producto del momento de inercia de masa respecto al centro de masa por la aceleración angular:

$$\boxed{\Sigma M = I\alpha,} \tag{7.23}$$

Por supuesto, esta ecuación es aplicable al caso de rotación respecto a un eje fijo, pero para este tipo de movimiento suele ser más conveniente usar la Ec. (7.22).

Cuando se aplican estas ecuaciones, el objetivo puede ser obtener información sobre el movimiento de un cuerpo, o determinar los valores de las fuerzas o pares desconocidos que actúan sobre él. Esto suele implicar tres pasos:

1. **Dibujar el diagrama de cuerpo libre.** Aísle el cuerpo e identifique las fuerzas y pares externos que actúan sobre él.
2. **Aplicar las ecuaciones de movimiento.** Escriba las ecuaciones de movimiento apropiadas para el tipo de movimiento. Debe escoger un sistema coordenado apropiado para aplicar la segunda ley de Newton. Por ejemplo, si el centro de masa se mueve en una trayectoria circular, será provechoso usar componentes normales y tangenciales.
3. **Determinar relaciones cinemáticas.** Si es necesario, complemente las ecuaciones de movimiento con relaciones entre la aceleración del centro de masa y la aceleración angular.

Como veremos en las secciones siguientes, el método dependerá en parte del tipo de movimiento de que se trate.

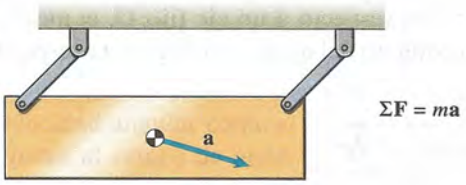
Traslación

Si un cuerpo rígido está en traslación (Fig. 7.8), para determinar su movimiento sólo es necesaria la segunda ley de Newton. No hay movimiento rotacional que determinar. Sin embargo, puede ser necesario tener que aplicar la ecuación de movimiento angular para determinar fuerzas o pares desconocidos. Como $\alpha = 0$, la Ec. (7.23) establece que el momento total **respecto al centro de masa** es igual a cero:

$$\Sigma M = 0.$$

Figura 7.8

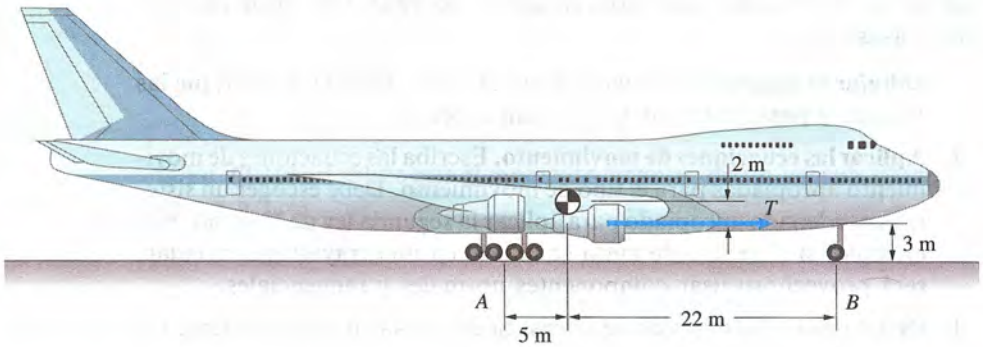
Cuerpo rígido en traslación. No hay movimiento rotacional que determinar.



Ejemplo 7.1

La masa del avión de la Fig. 7.9 es $m = 250$ Mg (megagramos) y el empuje de sus motores durante su carrera de despegue es $T = 700$ kN. Determine la aceleración del avión y las fuerzas normales ejercidas sobre sus ruedas en A y B. Ignore las fuerzas horizontales ejercidas sobre sus ruedas.

Figura 7.9

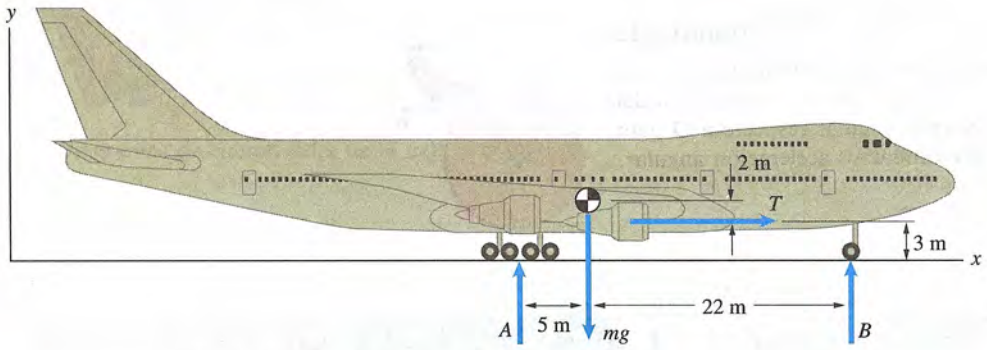


ESTRATEGIA

El avión está en traslación durante su carrera de despegue, por lo que la suma de los momentos respecto a su centro de masa es cero. Usando esta condición y la segunda ley de Newton, podemos determinar la aceleración del avión y las fuerzas normales ejercidas sobre sus ruedas.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre En la Fig. (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre que muestra el peso del avión y las fuerzas normales A y B ejercidas sobre sus ruedas.



(a) Diagrama de cuerpo libre del avión.

Aplicación de las ecuaciones de movimiento En el sistema coordenado de la Fig. (a), la segunda ley de Newton es

$$\Sigma F_x = T = ma_x,$$

$$\Sigma F_y = A + B - mg = 0.$$

De la primera ecuación, la aceleración del avión es

$$a_x = \frac{T}{m} = \frac{700\,000 \text{ N}}{250\,000 \text{ kg}} = 2.8 \text{ m/s}^2.$$

La ecuación del movimiento angular es

$$\Sigma M = (2)T + (22)B - (5)A = 0.$$

Resolviendo esta ecuación junto con la segunda ecuación que obtuvimos de la segunda ley de Newton para A y B, obtenemos $A = 2050$ kN, $B = 402$ kN.

COMENTARIOS

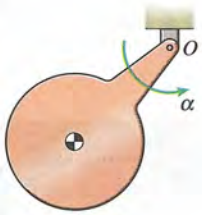
Cuando un cuerpo está en equilibrio, la suma de los momentos respecto a cualquier punto debido a las fuerzas y pares externos que actúan sobre él es cero. Se debe recordar que cuando un cuerpo rígido en traslación no está en equilibrio, sólo se sabe que la suma de los momentos *respecto al centro de masa* es cero. Sería instructivo volver a resolver este ejemplo suponiendo que la suma de los momentos respecto a A o B es cero. No se obtendrían entonces los valores correctos para las fuerzas normales ejercidas sobre las ruedas.

Giro alrededor de un eje fijo

En el caso de rotación alrededor de un eje fijo (Fig. 7.10), sólo se necesita la Ec. (7.22) para determinar el movimiento rotacional, aunque también se puede requerir la segunda ley de Newton para determinar fuerzas o pares desconocidos.

Figura 7.10

Cuerpo rígido que gira alrededor de O. Sólo se necesita la ecuación del movimiento angular respecto a O para determinar su aceleración angular.

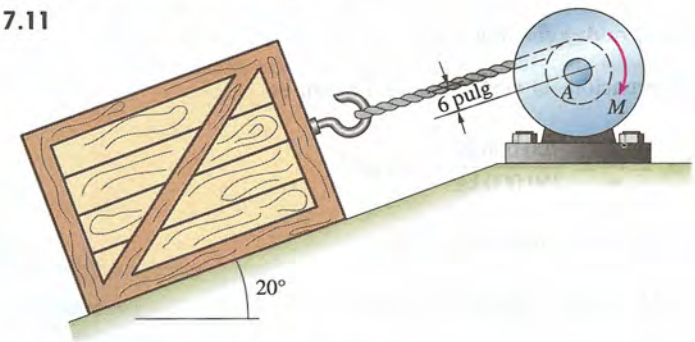


$$\Sigma M_0 = I_0\alpha$$

Ejemplo 7.2

La caja de 100 lb de la Fig. 7.11 está siendo jalada por el malacate hacia arriba sobre la superficie inclinada. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es $\mu_k = 0.4$. El momento de inercia de masa del tambor sobre el cual se enrolla el cable, incluyendo el cable enrollado en el tambor, es $I_A = 3$ slug-pie^2. Si el motor ejerce un par $M = 40$ pie-lb sobre el tambor, ¿cuál es la aceleración de la caja?

Figura 7.11

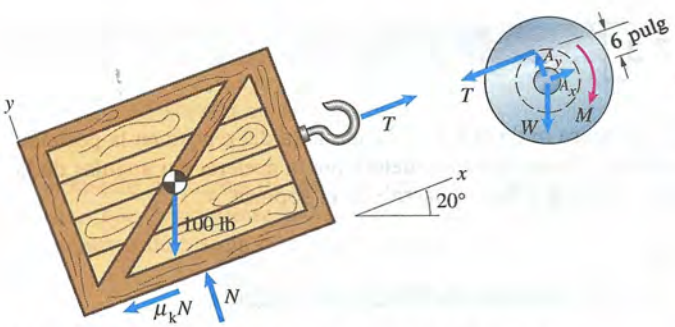


ESTRATEGIA

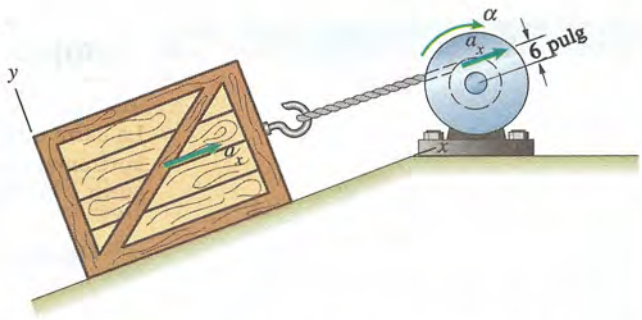
Dibujamos diagramas de cuerpo libre separados de la caja y del tambor y aplicamos a cada uno las ecuaciones de movimiento. El tambor gira alrededor de un eje fijo, por lo que podemos usar la ecuación de movimiento angular respecto al eje para determinar su aceleración angular. Para completar la solución, debemos determinar la relación entre la aceleración de la caja y la aceleración angular del tambor.

SOLUCIÓN

Dibujo de los diagramas de cuerpo libre En la Fig. (a) dibujamos los diagramas de cuerpo libre que muestran las fuerzas iguales que ejerce el cable sobre la caja y el tambor.



(a) Diagramas de cuerpo libre de la caja y el tambor.



(b) Relación entre la aceleración de la caja y la aceleración angular del tambor.

Aplicación de las ecuaciones de movimiento Denotamos con $a_x\mathbf{i}$ la aceleración de la caja hacia arriba sobre la superficie inclinada y con α la aceleración angular *horaria* del tambor (Fig. b). La segunda ley de Newton para la caja es

$$\Sigma F_x = T - 100 \text{ sen } 20° - \mu_k N = (100/32.2)a_x,$$

$$\Sigma F_y = N - 100 \cos 20° = 0.$$

Despejando N de la segunda ecuación y sustituyéndola en la primera, obtenemos

$$T - 100 \text{ sen } 20° - (0.4)(100 \cos 20°) = (100/32.2)a_x.$$

La ecuación del movimiento angular del tambor es

$$\Sigma M_A = M - (0.5 \text{ pie})T = I_A\alpha.$$

Si entre esas dos ecuaciones eliminamos T, obtenemos

$$2M - 100 \text{ sen } 20° - (0.4)(100 \cos 20°) = (100/32.2)a_x + 2I_A\alpha. \quad (7.24)$$

El último paso es determinar la relación entre a_x y α.

Determinación de las relaciones cinemáticas La componente tangencial de la aceleración del tambor en el punto en que el cable empieza a enrollarse es igual a la aceleración de la caja (Fig. b):

$$a_x = (0.5 \text{ pie})\,\alpha.$$

Usando esta relación, la solución de la Ec. (7.24) para a_x es

$$a_x = \frac{2M - 100 \text{ sen } 20° - (0.4)(100 \cos 20°)}{(100/32.2) + 4I_A} = 0.544 \text{ pie/s}^2.$$

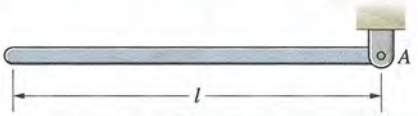
COMENTARIO

Observe que, por conveniencia, definimos la aceleración angular α como positiva en la dirección horaria para que a una α positiva le correspondiese una a_x positiva.

Ejemplo 7.3

La barra esbelta de masa m de la Fig. 7.12 se suelta del reposo en la posición horizontal mostrada. En ese instante, determine la aceleración angular de la barra y la fuerza ejercida sobre la barra por el soporte A.

Figura 7.12

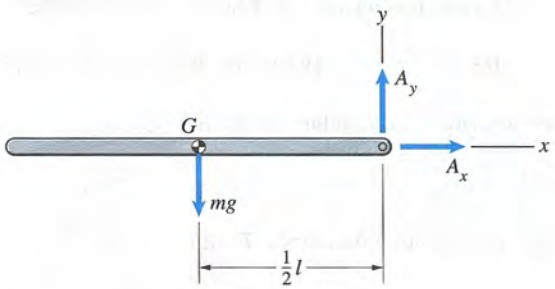


ESTRATEGIA

Como la barra gira alrededor de un punto fijo, podemos usar la Ec.(7.22) para determinar su aceleración angular. La ventaja de usar esta ecuación en vez de la Ec. (7.23) es que las reacciones desconocidas en A no aparecen en la ecuación del movimiento angular. Una vez conocida la aceleración angular, podemos determinar la aceleración del centro de masa y usar la segunda ley de Newton para obtener las reacciones en A.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre La Fig. (a) es el diagrama de cuerpo libre de la barra mostrando las reacciones en el soporte de pasador.

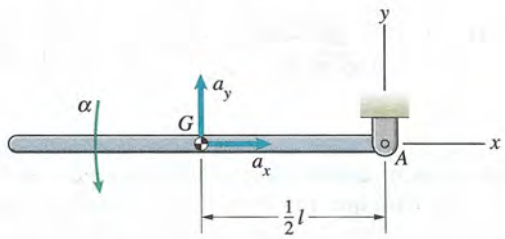


(a) Diagrama de cuerpo libre de la barra.

Aplicación de las ecuaciones de movimiento Sea $\mathbf{a}_G = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ la aceleración del centro de masa G de la barra y sea α su aceleración angular antihoraria (Fig. b). La segunda ley de Newton para la barra es

$$\Sigma F_x = A_x = ma_x,$$

$$\Sigma F_y = A_y - mg = ma_y.$$



(b) Aceleración angular y componentes de la aceleración del centro de masa.

La ecuación del movimiento angular respecto al punto fijo A es

$$\Sigma M_A = \left(\frac{1}{2}l\right)mg = I_A\alpha. \tag{7.25}$$

El momento de inercia de masa de una barra esbelta respecto a su centro de masa es $I = \frac{1}{12}ml^2$ (véase el Ap. C). Usando el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia de masa de la barra respecto a A es

$$I_A = I + d^2m = \frac{1}{12}ml^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2 m = \frac{1}{3}ml^2.$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (7.25) obtenemos la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{(1/2)mgl}{(1/3)ml^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}.$$

Determinación de las relaciones cinemáticas Para hallar las reacciones A_x y A_y necesitamos hallar las componentes a_x y a_y de la aceleración. Podemos hacerlo expresando la aceleración de G en función de la aceleración de A:

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}.$$

En el instante en que se suelta la barra, su velocidad angular $\omega = 0$. Así mismo $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$, por lo que obtenemos

$$\mathbf{a}_G = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} = (\alpha\,\mathbf{k}) \times \left(-\frac{1}{2}l\,\mathbf{i}\right) = -\frac{1}{2}l\alpha\,\mathbf{j}.$$

Igualando las componentes **i** y **j**, obtenemos

$$a_x = 0,$$

$$a_y = -\frac{1}{2}l\alpha = -\frac{3}{4}g.$$

Sustituyendo estas componentes de aceleración en la segunda ley de Newton, las reacciones en A en el instante en que la barra se suelta son

$$A_x = 0,$$

$$A_y = mg + m\left(-\frac{3}{4}g\right) = \frac{1}{4}mg.$$

COMENTARIOS

Podríamos haber determinado la aceleración de G de manera menos formal. Como G describe una trayectoria circular alrededor de A, sabemos que la magnitud de la componente tangencial de la aceleración es igual al producto de la distancia radial de A a G por la aceleración angular. Debido a la forma como definimos las direcciones positivas de α y a_x, $a_y = -(\frac{1}{2}l)\alpha$. Además, la componente normal de la aceleración de G es igual al cuadrado de su velocidad dividida entre el radio de su trayectoria circular. Como su velocidad es igual a cero en el instante en que se suelta la barra, $a_x = 0$.

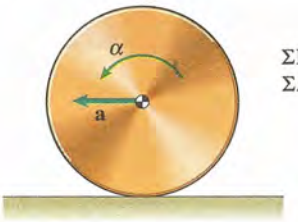


Figura 7.13

Cuerpo rígido en movimiento plano. Se debe aplicar la segunda ley de Newton y la ecuación del movimiento angular respecto al centro de masa.

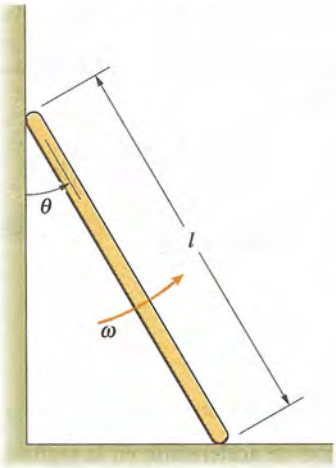
Movimiento plano general

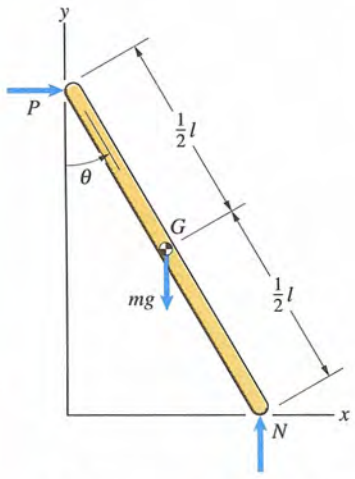
Si un cuerpo rígido está sometido a traslación y rotación (Fig. 7.13), es necesario usar la segunda ley de Newton y la ecuación de movimiento angular. Si el movimiento del centro de masa y el movimiento rotacional no son independientes, por ejemplo cuando un cuerpo rueda, se encontrará que hay más incógnitas que ecuaciones de movimiento. En tales casos, se pueden obtener ecuaciones adicionales relacionando la aceleración del centro de masa con la aceleración angular.

Ejemplo 7.4

La barra esbelta de masa m de la Fig. 7.14 se desliza sobre el piso y la pared lisos y tiene una velocidad angular antihoraria ω en el instante mostrado. ¿Cuál es la aceleración angular de la barra?

Figura 7.14





(a) Diagrama de cuerpo libre de la barra.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre En la Fig. (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre, con el peso de la barra y las fuerzas normales ejercidas por el piso y la pared.

Aplicación de las ecuaciones de movimiento Si escribimos la aceleración del centro de masa G como $\mathbf{a}_G = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$, la segunda ley de Newton es

$$\Sigma F_x = P = ma_x,$$

$$\Sigma F_y = N - mg = ma_y.$$

Sea α la aceleración angular antihoraria de la barra. La ecuación del movimiento angular es

$$\Sigma M = N\left(\frac{1}{2}l \operatorname{sen}\theta\right) - P\left(\frac{1}{2}l\cos\theta\right) = I\alpha,$$

donde I es el momento de inercia de masa de la barra respecto a su centro de masa. Tenemos tres ecuaciones de movimiento en función de las incógnitas P, N, a_x, a_y y α. Para completar la solución, debemos relacionar la aceleración del centro de masa de la barra con su aceleración angular.

Determinación de las relaciones cinemáticas Aunque no conocemos las aceleraciones de los puntos extremos A y B (Fig. b), sabemos que A se mueve horizontalmente y B verticalmente. Podemos usar esta información para obtener las relaciones necesarias entre la aceleración del centro de masa y la aceleración angular. Expresando la aceleración de A como $\mathbf{a}_A = a_A\mathbf{i}$, podemos escribir la aceleración del centro de masa como

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}:$$

$$a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} = a_A\,\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ -\frac{1}{2}l\,\text{sen}\,\theta & \frac{1}{2}l\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - \omega^2\left(-\frac{1}{2}l\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}l\cos\theta\,\mathbf{j}\right).$$

Tomando en cuenta el hecho de que $\mathbf{a}_A$ no tiene componente $\mathbf{j}$, igualamos las componentes $\mathbf{j}$ en esta ecuación y obtenemos

$$a_y = -\frac{1}{2}l(\alpha\,\text{sen}\,\theta + \omega^2\cos\theta).$$

Ahora expresamos la aceleración de B como $\mathbf{a}_B = a_B\mathbf{j}$ y escribimos la aceleración del centro de masa como

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \alpha \times \mathbf{r}_{G/B} - \omega^2\mathbf{r}_{G/B}:$$

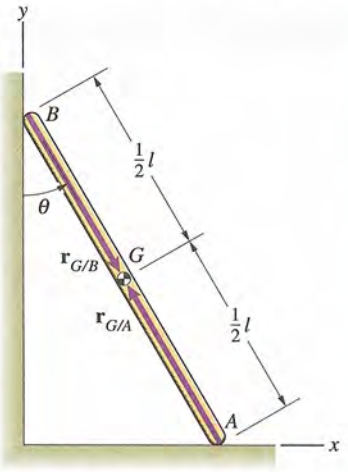
$$a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} = a_B\,\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ \frac{1}{2}l\,\text{sen}\,\theta & -\frac{1}{2}l\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - \omega^2\left(\frac{1}{2}l\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} - \frac{1}{2}l\cos\theta\,\mathbf{j}\right).$$

Igualamos las componentes $\mathbf{i}$ en esta ecuación y obtenemos

$$a_x = \frac{1}{2}l(\alpha\cos\theta - \omega^2\,\text{sen}\,\theta).$$

Con estas dos relaciones cinemáticas, tenemos cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Resolviéndolas para la aceleración angular y usando la relación $I = \frac{1}{12}ml^2$ para el momento de inercia de masa de la barra (Ap. C), obtenemos

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta.$$



(b) Aceleración de G en función de las aceleraciones de los puntos extremos A y B.

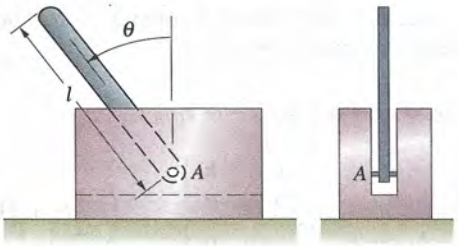
COMENTARIO

Observe que al expresar la aceleración de G en función de las aceleraciones de los puntos extremos, incluimos en la solución las restricciones impuestas sobre la barra por el piso y la pared, es decir, que el punto A se debe mover horizontalmente y el punto B verticalmente.

Ejemplo 7.5

La barra esbelta de la Fig. 7.15 tiene masa m y está articulada en A a un bloque metálico de masa m_B que descansa sobre una superficie horizontal lisa. El sistema se libera del reposo en la posición mostrada. ¿Cuál es la aceleración angular de la barra en el instante en que se libera?

Figura 7.15

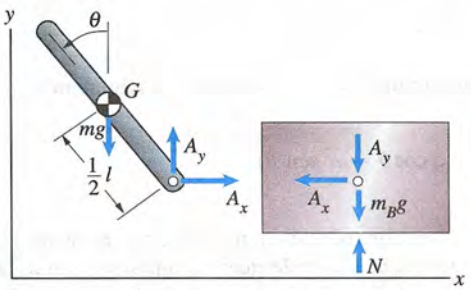


ESTRATEGIA

Debemos dibujar diagramas de cuerpo libre de la barra y del bloque y aplicarles por separado las ecuaciones de movimiento. Para completar la solución, también debemos relacionar la aceleración del centro de masa de la barra y su aceleración angular con la aceleración del bloque.

SOLUCIÓN

Dibujo de los diagramas de cuerpo libre En la Fig. (a) dibujamos los diagramas de cuerpo libre de la barra y del bloque. Observe las fuerzas opuestas que ejercen entre sí en el punto en que están conectados.



(a) Diagramas de cuerpo libre de la barra y del bloque.

Aplicación de las ecuaciones de movimiento Si escribimos la aceleración del centro de masa de la barra como $\mathbf{a}_G = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$, la segunda ley de Newton para la barra es

$$\Sigma F_x = A_x = ma_x,$$

$$\Sigma F_y = A_y - mg = ma_y.$$

Si α es la aceleración angular antihoraria de la barra, la ecuación del movimiento angular es

$$\Sigma M = A_x\left(\frac{1}{2}l\cos\theta\right) + A_y\left(\frac{1}{2}l\,\text{sen}\theta\right) = I\alpha.$$

Expresamos la aceleración del bloque como $a_B\mathbf{i}$ y escribimos la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_x = -A_x = m_B a_B,$$

$$\Sigma F_y = N - A_y - m_B g = 0.$$

Determinación de las relaciones cinemáticas Para relacionar el movimiento de la barra con el del bloque, expresamos la aceleración del centro de masa de la barra en función de la aceleración del punto A (Fig. b):

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A},$$

$$a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = a_B\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ -\frac{1}{2}l\,\text{sen}\theta & \frac{1}{2}l\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{0}.$$

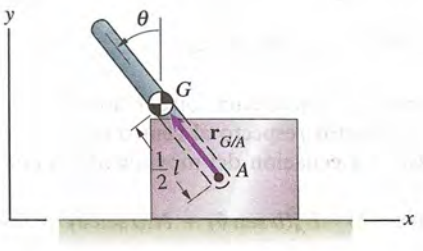
Igualando las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ obtenemos

$$a_x = a_B - \frac{1}{2}l\alpha\cos\theta,$$

$$a_y = -\frac{1}{2}l\alpha\,\text{sen}\,\theta.$$

Tenemos cinco ecuaciones de movimiento y dos relaciones cinemáticas en función de siete incógnitas: A_x, A_y, N, a_x, a_y, α y a_B. Resolviéndolas para la aceleración angular y usando la relación $I = \frac{1}{12}ml^2$ para el momento de inercia de masa de la barra, obtenemos

$$\alpha = \frac{(3/2)(g/l)\,\text{sen}\,\theta}{1 - (3/4)\left(\dfrac{m}{m+m_B}\right)\cos^2\theta}.$$

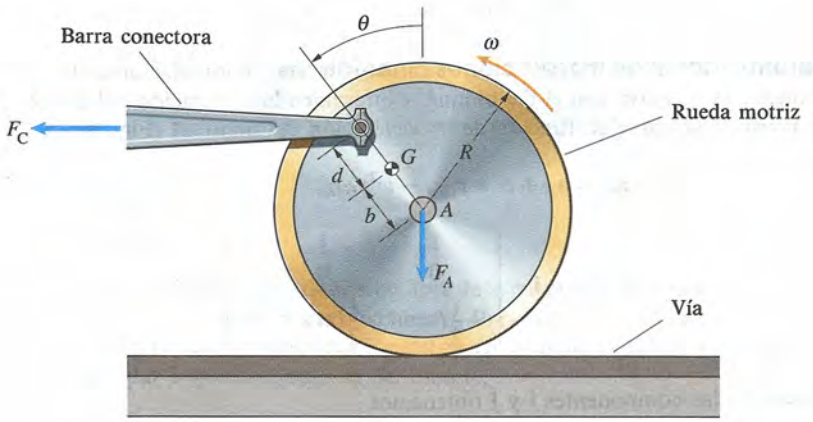


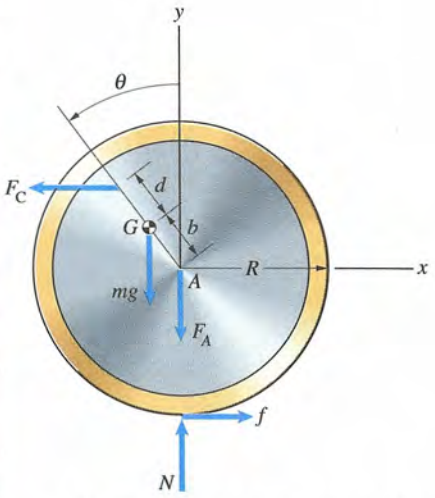
(b) Aceleración de G en función de la aceleración de A.

Ejemplo 7.6

La rueda motriz de la Fig. 7.16 rueda sobre la vía horizontal. La rueda está sometida a una fuerza hacia abajo F_A por su eje A y a una fuerza horizontal F_C por la barra conectora. La masa de la rueda es m y el momento de inercia de masa respecto a su centro de masa es I. El centro de masa G está a una distancia b del centro de la rueda. En el instante mostrado, la rueda tiene una velocidad angular antihoraria ω. ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda?

Figura 7.16





(a) Diagrama de cuerpo libre de la rueda.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre En la Fig. (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la rueda motriz, que muestra su peso y las fuerzas normal y de fricción ejercidas por la vía.

Aplicación de las ecuaciones de movimiento Si escribimos la aceleración del centro de masa G como $\mathbf{a}_G = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$, la segunda ley de Newton es

$$\Sigma F_x = f - F_C = ma_x,$$

$$\Sigma F_y = N - F_A - mg = ma_y.$$

Recuerde que debemos expresar la ecuación del movimiento angular en función de la suma de los momentos respecto al centro de masa G, *no con respecto al centro de la rueda*. La ecuación del movimiento angular es

$$\Sigma M = F_C(d\cos\theta) - F_A(b\,\text{sen}\,\theta) + N(b\,\text{sen}\,\theta) + f(b\cos\theta + R) = I\alpha.$$

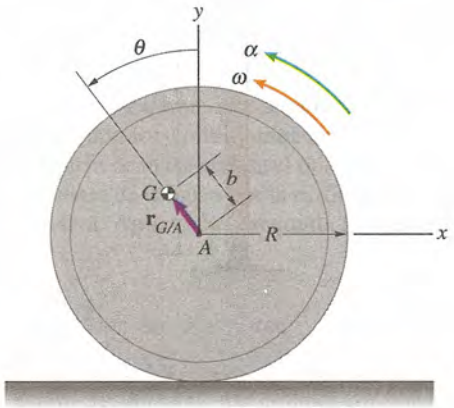
Tenemos tres ecuaciones de movimiento en función de las cinco incógnitas N, f, a_x, a_y y α. Para completar la solución, debemos relacionar la aceleración del centro de masa de la rueda con su aceleración angular.

Determinación de las relaciones cinemáticas La aceleración del centro A de la rueda en rodamiento es $\mathbf{a}_A = -R\alpha\mathbf{i}$. Expresando la aceleración del centro de masa, $\mathbf{a}_G$, en función de $\mathbf{a}_A$ (Fig. b), podemos obtener relaciones entre las componentes de $\mathbf{a}_G$ y α:

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A},$$

$$a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = -R\alpha\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ -b \operatorname{sen}\theta & b\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$-\omega^2(-b \operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + b\cos\theta\mathbf{j}).$$



(b) Aceleración del centro de masa G en función de la aceleración del centro A.

Igualamos las componentes **i** y **j** en esta ecuación y obtenemos

$$a_x = -R\alpha - b\alpha\cos\theta + b\omega^2 \operatorname{sen}\theta,$$

$$a_y = -b\alpha \operatorname{sen}\theta - b\omega^2\cos\theta.$$

Con estas dos relaciones cinemáticas, tenemos cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Resolviéndolas para la aceleración angular obtenemos

$$\alpha = \frac{F_C(R + b\cos\theta + d\cos\theta) + mgb \operatorname{sen}\theta + mbR\omega^2 \operatorname{sen}\theta}{m(b^2 + 2bR\cos\theta + R^2) + I}.$$

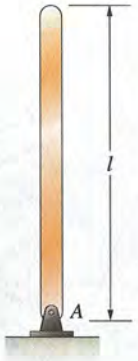
Ejemplo 7.7

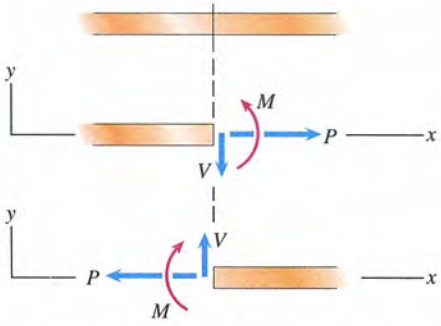
Aplicación a la ingeniería

Fuerzas y momentos internos en vigas

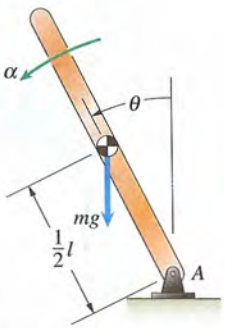
La barra esbelta de masa m de la Fig. 7.17 parte del reposo en la posición mostrada y cae. Cuando ha girado un ángulo θ, ¿cuál es el máximo momento flector en la barra y dónde se presenta?

Figura 7.17





(a) Fuerza axial, fuerza cortante y momento flector en una viga.



(b) Determinación del momento respecto a A.

ESTRATEGIA

Las fuerzas y momentos internos en una viga sometida a carga bidimensional son la fuerza axial P, la fuerza cortante V y el momento flector M (Fig. a). Primero debemos usar la ecuación del movimiento angular para determinar la aceleración angular de la barra. Luego podemos cortar la barra a una distancia arbitraria x desde un extremo y aplicar *las ecuaciones de movimiento* para determinar el momento flector en función de x.

SOLUCIÓN

El momento de inercia de masa de la barra respecto a A es

$$I_A = I + d^2m = \frac{1}{12}ml^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2 m = \frac{1}{3}ml^2.$$

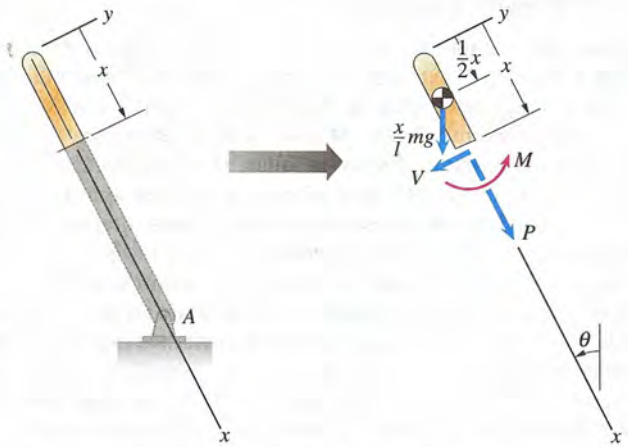
Cuando la barra ha girado un ángulo θ (Fig. b), el momento total respecto a A es $\Sigma M_A = mg(\frac{1}{2}l\text{sen}\,\theta)$. Como A es fijo, podemos escribir la ecuación del movimiento angular como

$$\Sigma M_A = I_A\alpha:$$

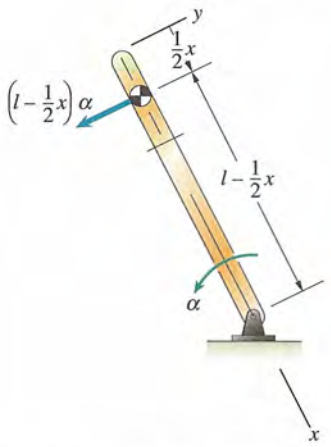
$$\frac{1}{2}mgl\ \text{sen}\ \theta = \frac{1}{3}ml^2\alpha.$$

Despejando la aceleración angular obtenemos

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\ \text{sen}\ \theta.$$



(c) Corte de la barra a una distancia x arbitraria.



(d) Determinación de la aceleración del centro de masa del cuerpo libre.

En la Fig. (c) presentamos un sistema coordenado, cortamos la barra a una distancia x desde la parte superior y dibujamos un diagrama de cuerpo libre de la parte superior. El centro de masa está en el punto medio, y determinamos la masa multiplicando la masa de la barra por la razón de la longitud del cuerpo libre a la longitud de la barra. Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección y obtenemos

$$\Sigma F_y = -V - \frac{x}{l}mg \text{ sen } \theta = \frac{x}{l}ma_y.$$

El momento de inercia de masa del cuerpo libre respecto a su centro de masa es $\frac{1}{12}[(x/l)m]x^2$, por lo que la ecuación del movimiento angular es

$$\Sigma M = I\alpha:$$

$$M - \left(\frac{1}{2}x\right)V = \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}m\right)x^2\frac{3}{2}\frac{g}{l} \text{ sen } \theta.$$

La componente y de la aceleración del centro de masa es igual al producto de su distancia radial desde A por la aceleración angular (Fig. d):

$$a_y = -\left(l - \frac{1}{2}x\right)\alpha = -\left(l - \frac{1}{2}x\right)\frac{3}{2}\frac{g}{l} \text{ sen } \theta.$$

Usando esta expresión, podemos resolver las dos ecuaciones de movimiento para V y M en función de θ. La solución para M es

$$M = \frac{1}{4}mgl \text{ sen}\theta\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1 - \frac{x}{l}\right). \tag{7.26}$$

El momento flector es igual a cero en ambos extremos de la barra. Tomando la derivada de esta expresión con respecto a x e igualándola a cero para determinar dónde M es máximo, obtenemos $x = \frac{2}{3}l$. Sustituyendo este valor de x en la Ec. (7.26) obtenemos el momento flector máximo:

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{27}mgl \text{ sen } \theta.$$

La distribución de m se muestra en la Fig. 7.18.

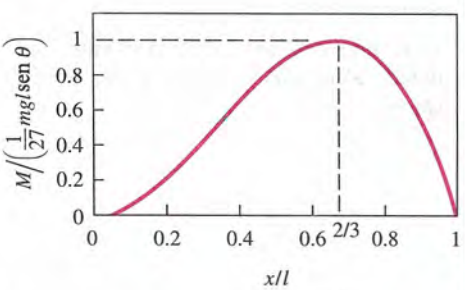


Figura 7.18
Distribución del momento flector en una barra que cae.

CONSIDERACIONES DE DISEÑO

Para diseñar un miembro de una estructura, los ingenieros deben considerar las fuerzas y momentos externos e internos a que estará sometido. En el caso de una viga, se deben determinar las distribuciones de la fuerza axial P, la fuerza cortante V y el momento flector M como primer paso para determinar si la viga soportará sus cargas de diseño sin fallar. Si se conocen las cargas externas y las reacciones y la viga está en equilibrio, se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas y momentos internos en una sección transversal dada. Sin embargo, en muchas situaciones la viga no estará en equilibrio. Podría ser un miembro de una estructura, como la armazón interna de un avión que está acelerando, o podría ser la biela de un motor de combustión interna. En tales casos las fuerzas y momentos internos máximos pueden exceder considerablemente los valores predichos por un análisis estático, y entonces se debe usar el procedimiento que describimos en este ejemplo.

La distribución del momento flector dinámico que obtuvimos en el Ej. 7.7 (Fig. 7.18) explica un fenómeno que se ha observado durante la demolición de chimeneas de mampostería. Una carga explosiva en la base de la chimenea ocasiona la caída de ésta, girando inicialmente como cuerpo rígido alrededor de su base. Al caer la chimenea, se observa que se fractura cerca de la posición del momento flector máximo (Fig. 7.19).

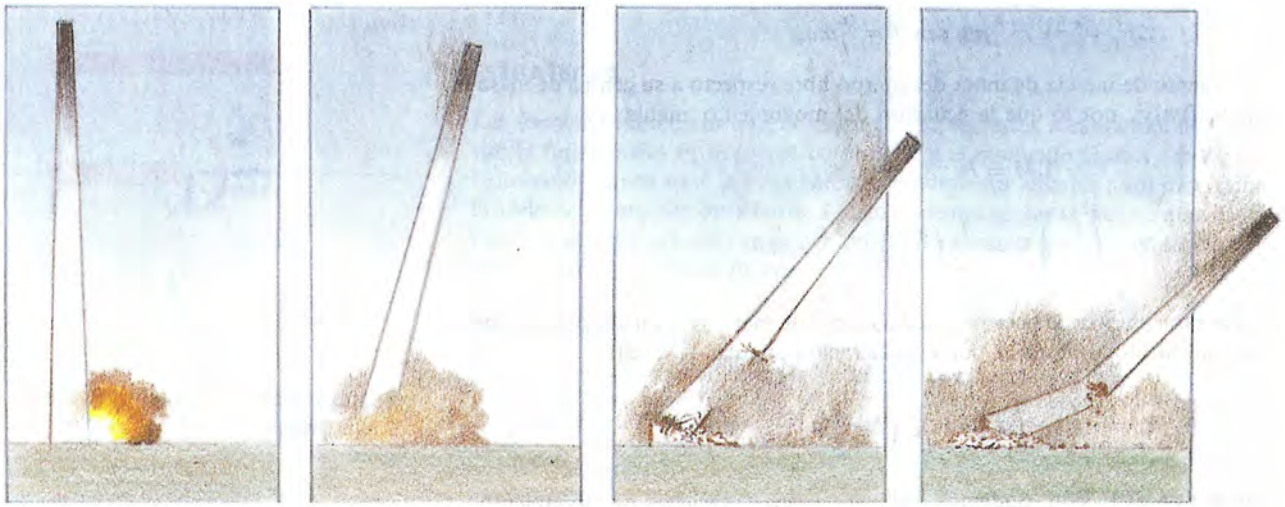


Figura 7.19

Una chimenea que cae se fractura debido al momento flector a que se somete.

7.5 Principio de D'Alembert

En esta sección describimos un enfoque alternativo para la dinámica de cuerpos rígidos, conocido como principio de D'Alembert. Escribiendo la segunda ley de Newton como

$$\Sigma \mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \tag{7.27}$$

podemos considerarla como una ecuación de "equilibrio" que establece que la suma de las fuerzas externas, incluida una **fuerza inercial** $-m\mathbf{a}$, es igual a cero (Fig. 7.20a). Para establecer de manera equivalente la ecuación del movimiento angular usamos la Ec. (7.20), que relaciona el momento total respecto a un punto fijo O con la aceleración angular en el movimiento plano general:

$$\Sigma M_O = (\mathbf{r} \times m\mathbf{a}) \cdot \mathbf{k} + I\alpha.$$

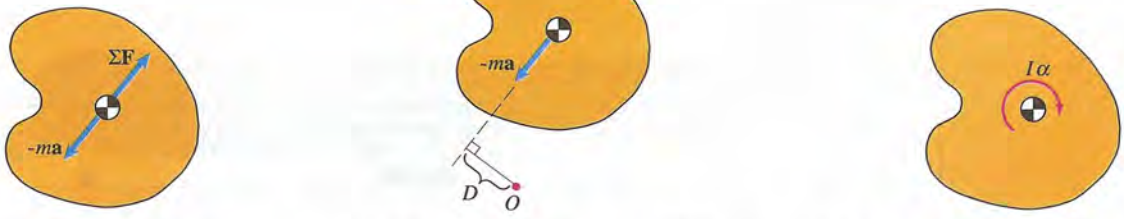
Escribiendo esta ecuación como

$$\Sigma M_O + [\mathbf{r} \times (-m\mathbf{a})] \cdot \mathbf{k} + (-I\alpha) = 0, \tag{7.28}$$

podemos considerarla como una ecuación de equilibrio que establece que la suma de los momentos *respecto a cualquier punto* debido a fuerzas y pares externos, incluidos el momento debido a la fuerza inercial $-m\mathbf{a}$ que actúa en el centro de masa y un **par inercial** $-I\alpha$, es igual a cero.

En vez de usar la expresión de la Ec. (7.28) para determinar el momento debido a la fuerza interna, puede ser más fácil determinarla multiplicando la magnitud de la fuerza inercial por la distancia perpendicular desde la línea de acción de la fuerza al punto O (Fig. 7.20b). Así mismo, recuerde que el sentido del par inercial es opuesto al de la aceleración angular (Fig. 7.20c).

Figura 7.20



(a) La suma de las fuerzas externas y la fuerza inercial es cero.

(b) La magnitud del momento debido a la fuerza inercial es $|-m\mathbf{a}|D$.

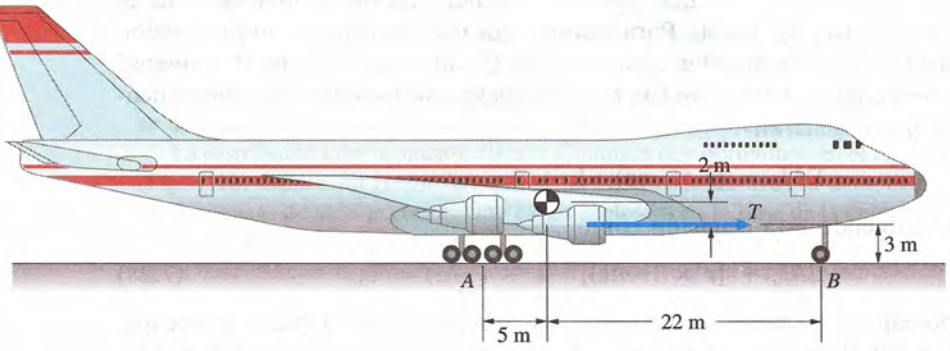
(c) Un par inercial horario es el resultado de una aceleración angular antihoraria.

En los siguientes ejemplos aplicamos el principio de D'Alembert a los movimientos planos de cuerpos rígidos. La secuencia de pasos (dibujar el diagrama de cuerpo libre, aplicar las ecuaciones de "equilibrio" y determinar relaciones cinemáticas) es la misma que al aplicar las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, al usar el principio de D'Alembert debe tenerse el cuidado de asignar los signos correctos a los términos de las ecuaciones. Por ejemplo, si la aceleración angular se define como positiva en la dirección antihoraria, ésa será también la dirección positiva para el momento ejercido por la fuerza inercial, y el par inercial es horario.

Ejemplo 7.8

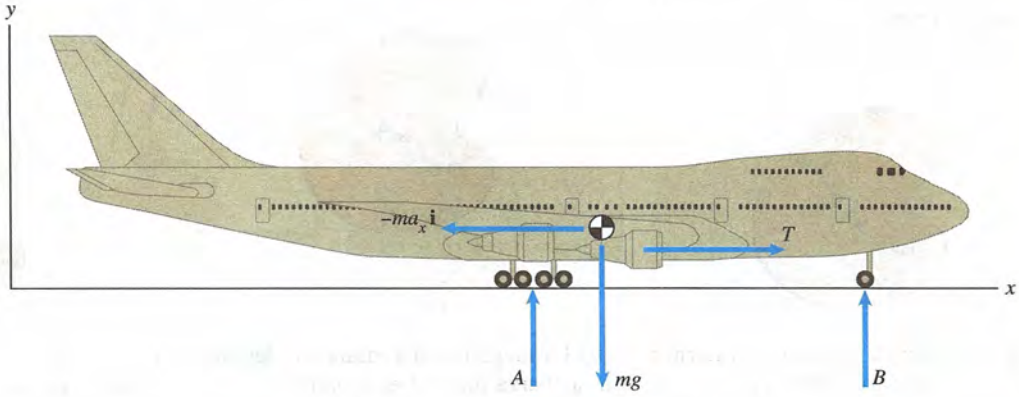
La masa del avión de la Fig. 7.21 es $m = 250$ Mg (megagramos) y el empuje de sus motores durante el despegue es $T = 700$ kN. Use el principio de D'Alembert para determinar la aceleración del avión y las fuerzas normales ejercidas sobre sus ruedas en A y B. Ignore las fuerzas horizontales ejercidas sobre sus ruedas.

Figura 7.21



SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre En el sistema coordenado de la Fig. (a) podemos escribir la aceleración del avión como $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}$. Sobre el diagrama de cuerpo libre mostramos el peso del avión, las fuerzas normales A y B ejercidas sobre las ruedas, y la fuerza inercial $-m\mathbf{a} = -ma_x\mathbf{i}$.



(a) Diagrama de cuerpo libre del avión.

Aplicación de las ecuaciones de "equilibrio" La Ec. (7.27) es

$$\Sigma\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = \mathbf{0}:$$

$$T\,\mathbf{i} + (A + B - mg)\,\mathbf{j} + (-ma_x\,\mathbf{i}) = \mathbf{0}.$$

Igualando las componentes **i** y **j** obtenemos

$$T = ma_x,$$

$$A + B = mg.$$

De la primera ecuación, la aceleración del avión es

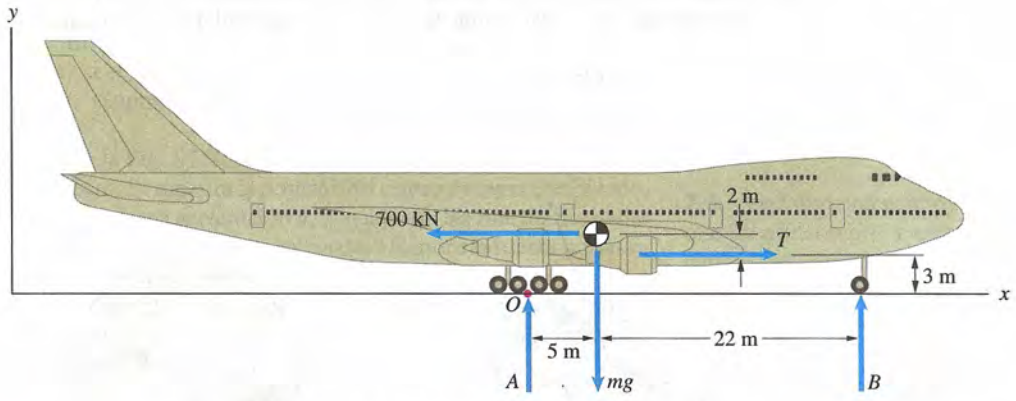
$$a_x = \frac{T}{m} = \frac{700\ 000\ \text{N}}{250\ 000\ \text{kg}} = 2.8\ \text{m/s}^2,$$

y la fuerza inercial es $-ma_x\mathbf{i} = -700\mathbf{i}$ (kN) (véase la Fig. b).

Al aplicar la Ec. (7.28) podemos escoger cualquier punto como el punto O. Situándolo en A (Fig. b) obtenemos una ecuación en que la única incógnita es la fuerza B. El avión se está trasladando, por lo que $\alpha = 0$ y no existe par inercial. Definiendo los momentos antihorarios como positivos, la suma de los momentos respecto a O es

$$(5)(700\ 000) - (3)T - (5)mg + (27)B = 0.$$

De esta ecuación obtenemos $B = 402$ kN y luego $A = mg - B = 2050$ kN.



(b) Ubicación del punto O en las ruedas traseras.

COMENTARIOS

Observe que calculamos el momento debido a la fuerza inercial multiplicando la magnitud de la fuerza inercial por la distancia perpendicular a su línea de acción, (5)(700 000) = 3 500 000 N-m antihorario. En el presente ejemplo, este método es más sencillo que usar el producto vectorial,

$$[\mathbf{r} \times (-m\mathbf{a})] \cdot \mathbf{k} = [(5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \times (-700\ 000\,\mathbf{i})] \cdot \mathbf{k}$$

$$= 3\ 500\ 000\ \text{N-m antihorario},$$

pero en otros casos se encontrará que es más sencillo usar el producto vectorial.

Se debería comparar esta aplicación del principio de D'Alembert con la determinación, en el Ej. 7.1, de la aceleración del avión y las fuerzas normales ejercidas sobre sus ruedas.

Ejemplo 7.9

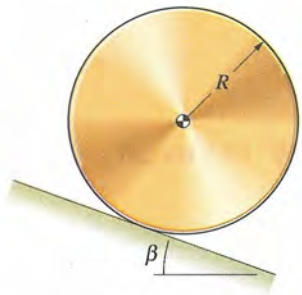


Figura 7.22

Un disco de masa m y momento de inercia I se libera del reposo sobre una superficie inclinada (Fig. 7.22). Suponiendo que el disco rueda, use el principio de D'Alembert para determinar su aceleración angular.

SOLUCIÓN

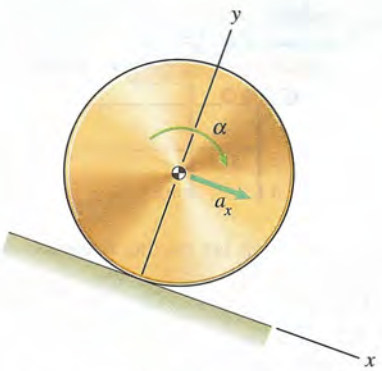
Dibujo del diagrama de cuerpo libre En el sistema coordenado de la Fig. (a), la aceleración del centro del disco es $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}$. Definimos la aceleración angular α como positiva en la dirección horaria. En la Fig. (b) dibujamos el diagrama de cuerpo libre del disco, mostrando su peso, las fuerzas normal y de fricción ejercidas por la superficie, y la fuerza y el par inerciales.

Aplicación de las ecuaciones de "equilibrio" Aplicamos la Ec. (7.28), evaluando los momentos respecto al punto en que el disco está en contacto con la superficie para eliminar f y N de la ecuación resultante:

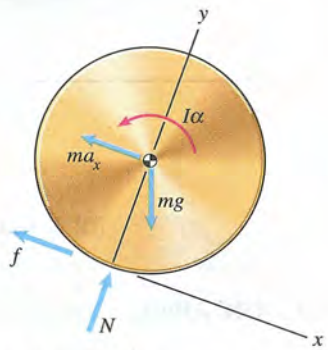
$$-R(mg \text{ sen } \beta) + R(ma_x) + I\alpha = 0. \tag{7.29}$$

Determinación de las relaciones cinemáticas La aceleración del centro del disco en rodamiento se relaciona con la aceleración angular por $a_x = R\alpha$. Sustituyendo esta relación en la Ec. (7.29) y despejando α, obtenemos

$$\alpha = \frac{mgR \text{ sen } \beta}{mR^2 + I}.$$



(a) Aceleración del centro del disco y su aceleración angular.



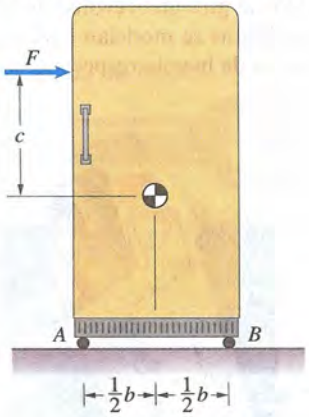
(b) Diagrama de cuerpo libre que incluye la fuerza y el par inerciales.

COMENTARIO

Como consecuencia de sumar momentos respecto al punto de contacto del disco, no tuvimos que usar la ecuación $\Sigma\mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = 0$ para determinar la aceleración angular.

Problemas

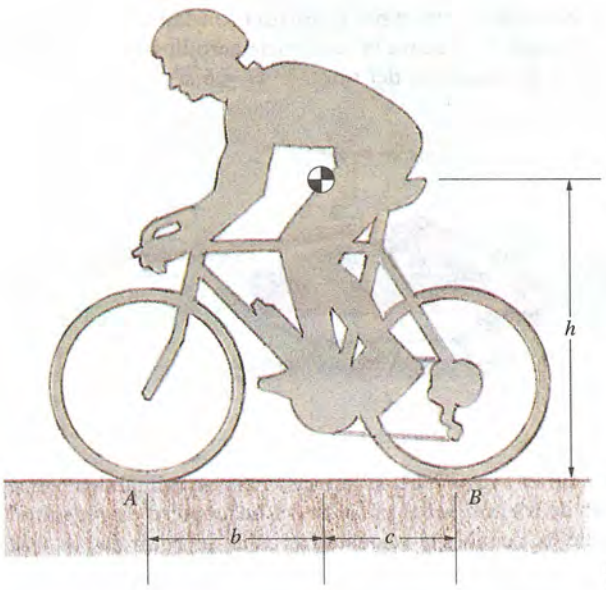
7.1 Un refrigerador de masa m descansa sobre ruedas orientables en A y B. Se le quiere empujar con una fuerza horizontal F pero con las ruedas permaneciendo en el piso liso.
(a) ¿Cuál es la aceleración del refrigerador?
(b) ¿Qué fuerzas normales se ejercen sobre las ruedas en A y B?



P7.1

7.2 En el Prob. 7.1, ¿cuál es la máxima fuerza F que se puede aplicar si el refrigerador permanece en contacto con el piso en A y B? (Suponga que c es positiva.)

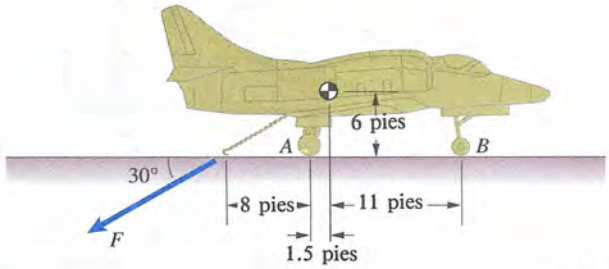
7.3 En la Fig. P7.3, la masa combinada de la persona y la bicicleta es m. Se muestra la posición del centro de masa combinado.
(a) Si tienen una aceleración a, ¿cuáles son las fuerzas normales que ejerce el terreno sobre las ruedas? (Ignore la fuerza horizontal que ejerce la rueda frontal sobre el terreno.)
(b) Con base en los resultados de la parte (a), ¿cuál es la aceleración máxima que se puede alcanzar sin que la rueda frontal se separe del terreno?



P7.3

7.4 En el Prob. 7.3, b = 615 mm, c = 445 mm, h = 985 mm y m = 77 kg. Si la bicicleta viaja a 6 m/s y la persona aplica los frenos, logrando la máxima desaceleración para la cual la rueda trasera no se separa del terreno, ¿cuánto tarda la bicicleta en detenerse y qué distancia viaja durante ese tiempo?

7.5 En la Fig. P7.5 el gancho de frenaje del avión de 14 000 lb ejerce la fuerza F y ocasiona que el avión desacelere a $6g$. Las fuerzas horizontales ejercidas por las ruedas de aterrizaje son insignificantes. Determine F y las fuerzas normales ejercidas sobre las ruedas.

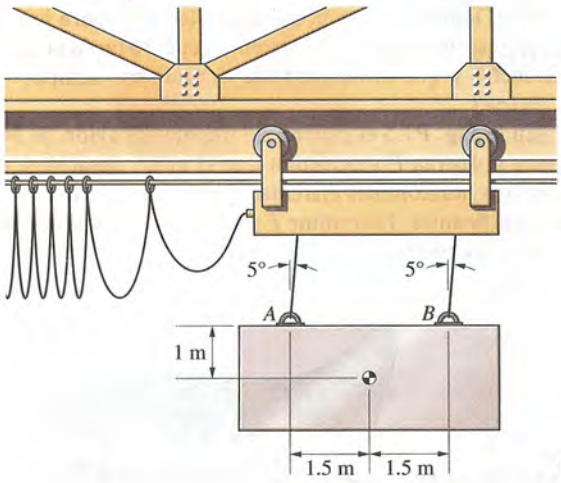


P7.5

7.6 Una persona se apoya en la parte posterior de un camión que va acelerando, y ejerce una fuerza horizontal F sobre la cabina del camión en A. Determine la fuerza horizontal que debe ejercer en función de su peso W, la aceleración a del camión y las dimensiones mostradas.

P7.6

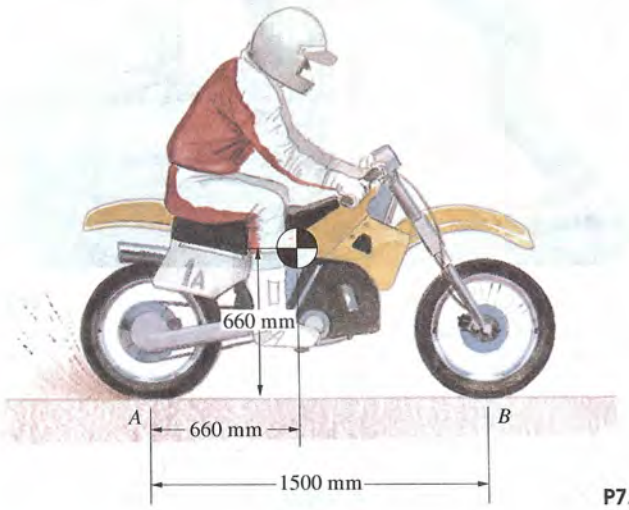
7.7 La grúa mostrada se mueve hacia la derecha con aceleración constante, y la carga de 800 kg se mueve sin oscilar.
(a) ¿Cuál es la aceleración de la grúa y la carga?
(b) ¿Cuáles son las tensiones en los cables unidos a A y B?



P7.7

7.8 Si la aceleración de la grúa del Prob. 7.7 repentinamente disminuye a cero, ¿cuáles son las tensiones en los cables unidos en A y B inmediatamente después?

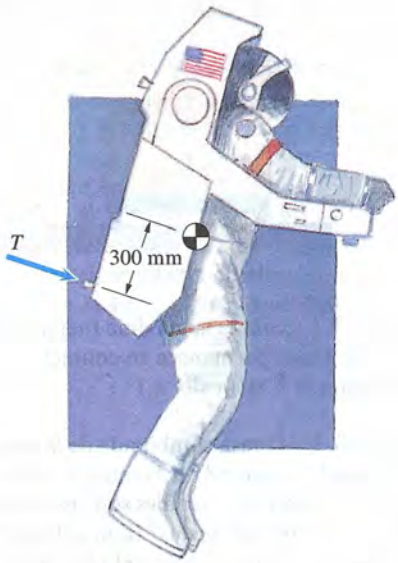
7.9 En la Fig. P7.9 la masa combinada de la motocicleta y el conductor es de 160 kg. La rueda trasera ejerce una fuerza horizontal de 400 N sobre el camino, y se puede ignorar la fuerza horizontal que ejerce la rueda frontal sobre el camino. Modelando la motocicleta y sus ruedas como un cuerpo rígido, halle (a) la aceleración de la motocicleta; (b) las fuerzas normales ejercidas por las ruedas trasera y frontal sobre el camino.



P7.9

7.10 En el Prob. 7.9, el coeficiente de fricción cinética entre la rueda trasera de la motocicleta y el camino es $\mu_k = 0.8$. Si el conductor hace patinar la rueda trasera, ¿cuál es la aceleración de la motocicleta y cuáles son las fuerzas normales ejercidas por las ruedas trasera y frontal sobre el camino?

7.11 Durante una actividad extravehicular, un astronauta dispara un propulsor de su unidad de maniobras, ejerciendo una fuerza $T = 14.2$ N durante 1 s. Se requieren 60 s desde el disparo para que él gire una revolución. Si el astronauta y su unidad de maniobras se modelan como un cuerpo rígido, ¿cuál es el momento de inercia respecto a su centro de masa?



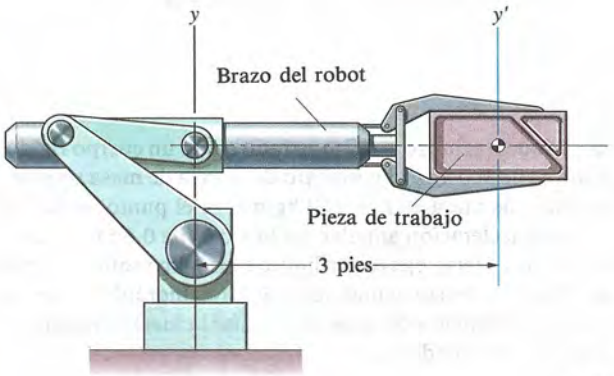
P7.11

7.12 El momento de inercia de masa del rotor del helicóptero mostrado es de 400 slug-pie^2. Si el rotor parte del reposo en $t = 0$, el motor ejerce un par de torsión constante de 500 pie-lb sobre el rotor y se ignora la resistencia aerodinámica, ¿cuál es la velocidad angular ω del rotor en $t = 6$ s?

P7.12

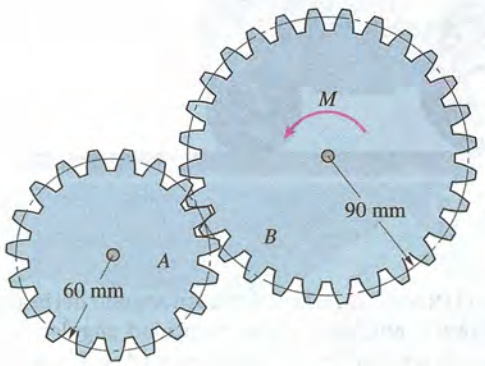
7.13 En el Prob. 7.12, si la resistencia aerodinámica ejerce un par de torsión sobre el rotor del helicóptero de magnitud $20\omega^2$ pie-lb, ¿cuál es la velocidad angular del rotor en $t = 6$ s?

7.14 En la Fig. P7.14, el momento de inercia de masa del brazo del robot respecto al eje y vertical es de 8 slug-pie^2. El momento de inercia de masa respecto al eje y' de la pieza de trabajo de 30 lb sostenida por el brazo es 0.6 slug-pie^2. ¿Qué par respecto al eje y es necesario para dar al brazo una aceleración angular de 2 rad/s^2?



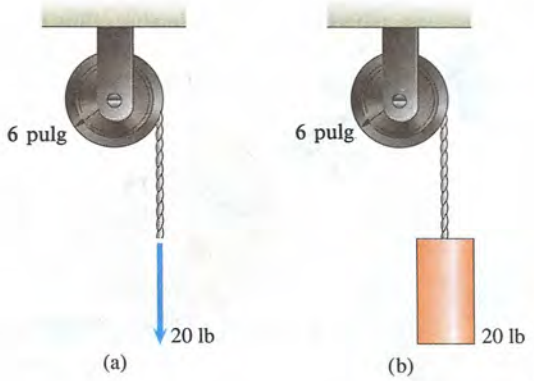
P7.14

7.15 Los engranes A y B mostrados pueden girar libremente alrededor de sus soportes de pasador. Sus momentos de inercia de masa son $I_A = 0.002$ kg-m^2 e $I_B = 0.006$ kg-m^2. Inicialmente están en reposo, y en $t = 0$ se aplica un par constante $M = 2$ N-m al engrane B. ¿Cuántas revoluciones ha girado el engrane A en $t = 4$ s?



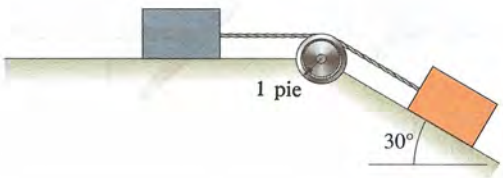
P7.15

7.16 El momento de inercia de masa de la polea mostrada es de 0.4 slug-pie^2. Determine en los dos casos la aceleración angular de la polea y la tensión en el cable.



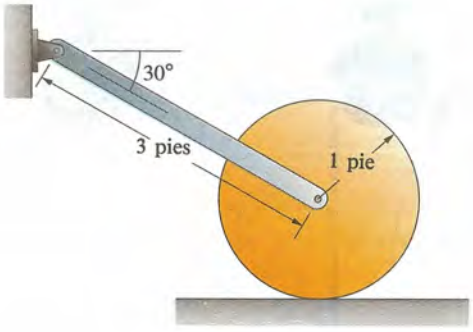
P7.16

7.17 En la Fig. P7.17 cada caja pesa 50 lb, el momento de inercia de masa de la polea es de 0.6 slug-pie y la fricción se puede ignorar. Si las cajas parten del reposo en $t = 0$, determine la magnitud de sus velocidades y la distancia que se han movido desde sus posiciones iniciales en $t = 1$ s.



P7.17

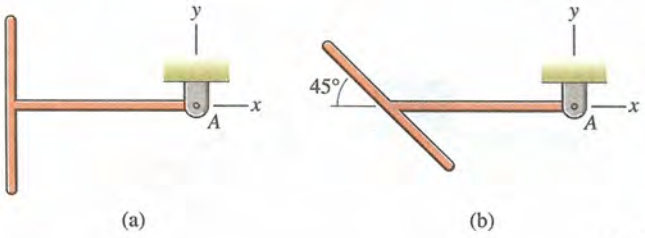
7.18 La barra esbelta pesa 10 lb y el disco 20 lb. El coeficiente de fricción cinética entre el disco y la superficie horizontal es $\mu_k = 0.1$. Si el disco tiene una velocidad angular antihoraria inicial de 10 rad/s, ¿cuánto tiempo tarda en dejar de girar?



P7.18

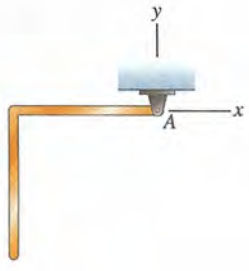
7.19 En el Prob. 7.18, ¿cuánto tiempo tarda el disco en dejar de girar si tiene una velocidad angular horaria inicial de 10 rad/s?

7.20 Los cuerpos mostrados constan de barras idénticas de 3 pies y 10 lb soldadas entre sí. Si se liberan del reposo en las posiciones mostradas, ¿cuáles son sus aceleraciones angulares y cuáles son las componentes de las reacciones en A en ese instante? (Los ejes y son verticales.)



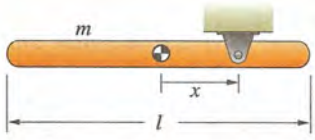
P7.20

7.21 El cuerpo mostrado consta de barras idénticas de 1 m y 5 kg soldadas entre sí. Si se liberan del reposo en la posición mostrada, ¿cuál es su aceleración angular y las componentes de la reacción en A en ese instante? (El eje y es vertical.)



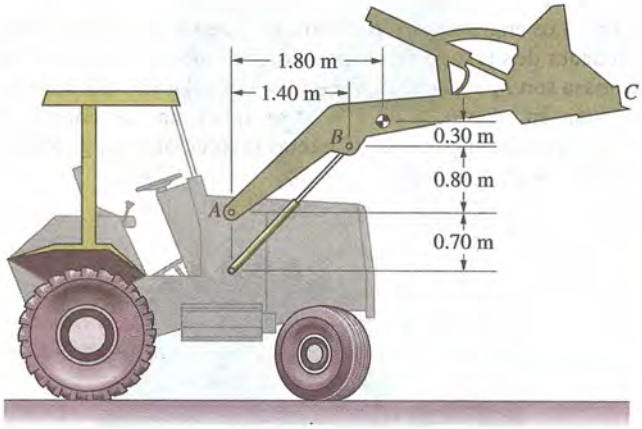
P7.21

7.22 En la Fig. P7.22, ¿para qué valor de x es máxima la aceleración angular de la barra horizontal, y cuál es esa aceleración angular máxima?



P7.22

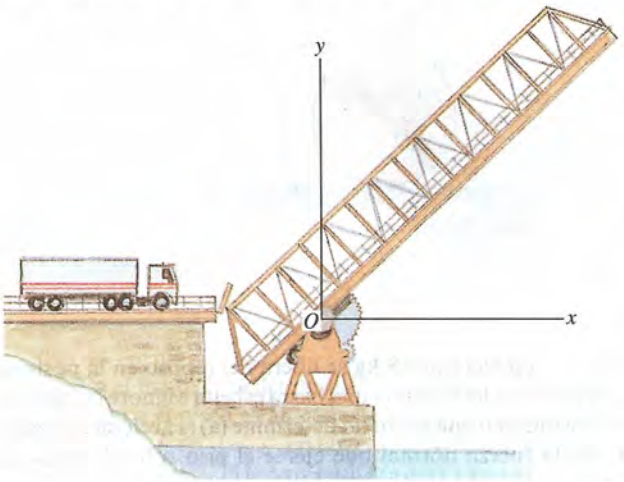
7.23 Modele el brazo ABC mostrado como un cuerpo rígido. Su masa es de 300 kg y el momento de inercia de masa respecto a su centro de masa es $I = 360$ kg-m^2. Si el punto A está en reposo y la aceleración angular del brazo es de 0.6 rad/s^2 antihoraria, ¿qué fuerza ejerce el cilindro hidráulico sobre el brazo en B? (Sobre el brazo actúan dos cilindros hidráulicos, uno a cada lado del vehículo. Se debe determinar la fuerza total ejercida por los dos cilindros.)



P7.23

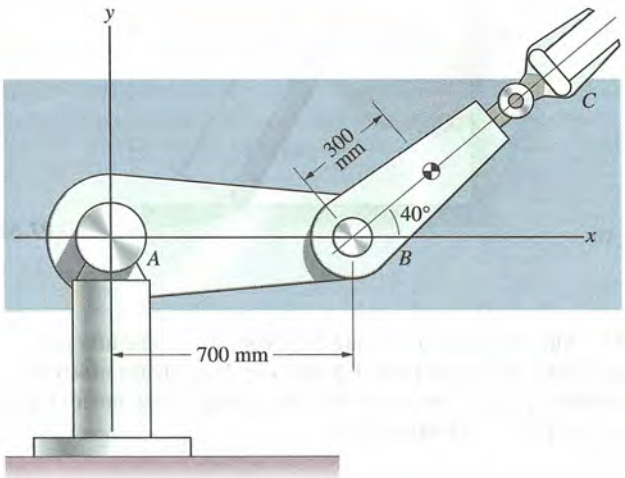
7.24 En el Prob. 7.23, si la aceleración angular del brazo ABC es de 0.6 rad/s^2 antihoraria y su velocidad angular es de 1.4 rad/s horaria, ¿cuáles son las componentes de la fuerza ejercida sobre el brazo en A? (Hay dos soportes de pasador, uno a cada lado del vehículo. Se deben determinar las componentes de la fuerza total ejercida por los dos soportes.)

7.25 Para bajar el puente giratorio mostrado, los engranes que lo levantan se desacoplan y una fracción de segundo después otro conjunto de engranes que lo bajan, se acoplan. En el instante en que los engranes que lo levantan se desacoplan, ¿cuáles son las componentes de la fuerza ejercida por el puente sobre su soporte en O? El puente giratorio pesa 360 klb, su momento de inercia de masa respecto a O es $I_0 = 1.0 \times 10^7$ slug-pie^2, y las coordenadas de su centro de masa en el instante en que los engranes se desacoplan son $\bar{x} = 8$ pies, $\bar{y} = 16$ pies.



P7.25

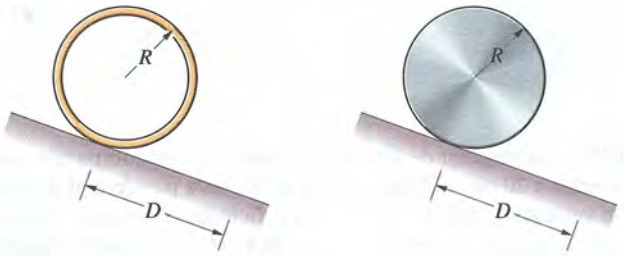
7.26 El brazo BC de la figura tiene una masa de 12 kg y su momento de inercia de masa respecto a su centro de masa es de 3 kg-m^2. Si B está en reposo y el brazo BC tiene una velocidad angular antihoraria constante de 2 rad/s en el instante mostrado, determine el par y las componentes de la fuerza ejercida sobre el brazo BC en B.



P7.26

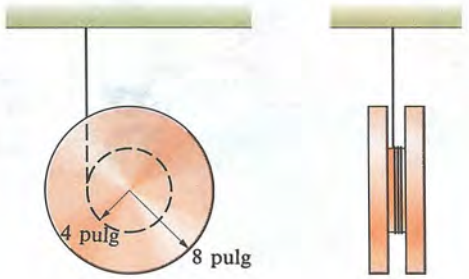
7.27 En el Prob. 7.26, ¿cuáles son el par y las componentes de la fuerza ejercida sobre el brazo BC en B si el brazo AB tiene una velocidad angular horaria constante de 2 rad/s y el brazo BC tiene una velocidad angular antihoraria de 2 rad/s y una aceleración angular horaria de 4 rad/s^2 en el instante mostrado?

7.28 Un anillo delgado y un disco circular, cada uno de masa m y radio R, se liberan del reposo sobre una superficie inclinada y ruedan una distancia D. Determine la razón de los tiempos requeridos.



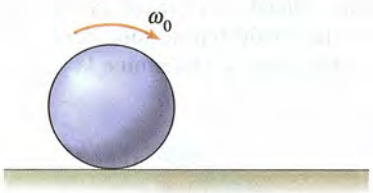
P7.28

7.29 En la Fig. P7.29, el disco escalonado pesa 40 lb y su momento de inercia de masa es $I = 0.2$ slug-pie^2. Si se libera del reposo, ¿cuánto tarda el centro del disco en caer 3 pies? (Suponga que la cuerda permanece vertical.)



P7.29

7.30 En $t = 0$, una esfera de masa m y radio R ($I = \frac{2}{5}mR^2$) sobre una superficie plana tiene una velocidad angular ω_0 y la velocidad de su centro es cero. El coeficiente de fricción cinética entre la esfera y la superficie es μ_k. ¿Cuál es la velocidad máxima que el centro de la esfera alcanzará y cuánto tarda en alcanzarla?



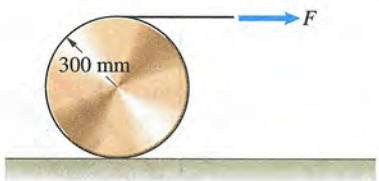
P7.30

7.31 Un jugador de fútbol pasa el balón a un compañero que se halla a 20 pies. El balón viaja a 20 pie/s paralelo al terreno sin velocidad angular inicial. El coeficiente de fricción cinética entre el balón y el césped es $\mu_k = 0.4$. ¿Cuánto tarda el balón en llegar al compañero? (El balón tiene 28 pulg de circunferencia y pesa 14 onzas. Calcule su momento de inercia de masa usando la ecuación para un cascarón esférico delgado: $I = \frac{2}{3}mR^2$.)

P7.31

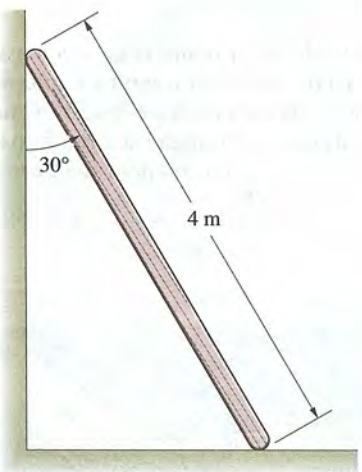
7.32 El disco cilíndrico de 100 kg mostrado está en reposo cuando la fuerza F se aplica a una cuerda enrollada a su alrededor. Los coeficientes estático y cinético de fricción entre el disco y la superficie es igual a 0.2. Determine la aceleración angular del disco si (a) $F = 500$ N; (b) $F = 1000$ N.

Estrategia: Primero resuelva el problema suponiendo que el disco no resbala, sino que rueda sobre la superficie. Determine la fuerza de fricción y vea si excede el producto del coeficiente de fricción y la fuerza normal. Si es así, reinicie el problema suponiendo que el disco resbala.



P7.32

7.33 La escalera de 18 kg se libera del reposo en la posición mostrada. Modélela como una barra esbelta e ignore la fricción. En el instante en que se libera, determine (a) la aceleración angular; (b) la fuerza normal que ejerce el piso sobre la escalera.

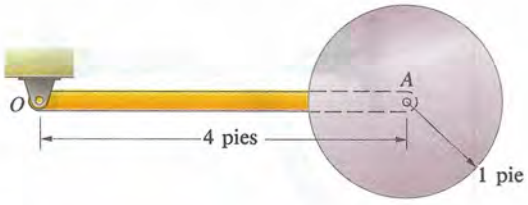


P7.33

7.34 Suponga que la escalera del Prob. 7.33 tiene una velocidad angular antihoraria de 1.0 rad/s en la posición mostrada. Determine (a) la aceleración angular; (b) la fuerza normal que ejerce el piso sobre la escalera.

7.35 Suponga que la escalera del Prob. 7.33 tiene una velocidad angular antihoraria de 1.0 rad/s en la posición mostrada y que el coeficiente de fricción cinética en el piso y la pared es $\mu_k = 0.2$. Determine (a) la aceleración angular; (b) la fuerza normal ejercida por el piso sobre la escalera.

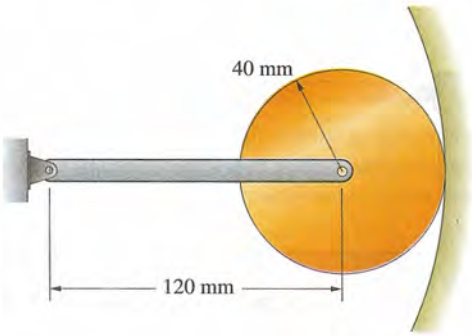
7.36 En la Fig. P7.36 la barra esbelta pesa 30 lb y el disco cilíndrico 20 lb. El sistema se libera del reposo con la barra horizontal. Determine la aceleración angular de la barra en el instante en que se libera si la barra y el disco están soldados en A.



P7.36

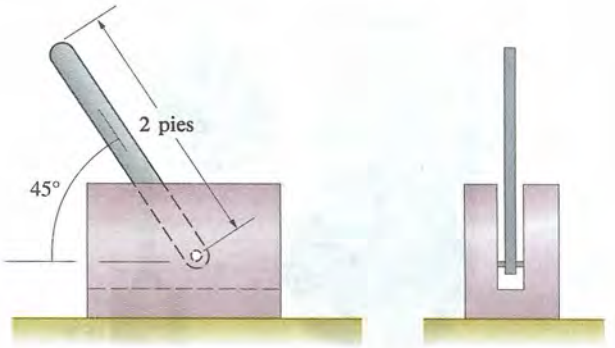
7.37 En el Prob. 7.36 determine la aceleración angular de la barra si ésta y el disco están conectados por un pasador en A.

7.38 En la Fig. P7.38 la barra esbelta de 0.1 kg y el disco cilíndrico de 0.2 kg se liberan del reposo con la barra horizontal. El disco rueda sobre la superficie curva. ¿Cuál es la aceleración angular de la barra en ese instante?



P7.38

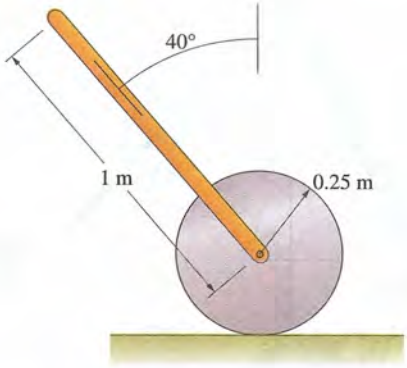
7.39 La barra esbelta de 4 lb y el bloque de 10 lb se liberan del reposo en la posición mostrada. Si la fricción es insignificante, ¿cuál es la aceleración del bloque en ese instante?



P7.39

7.40 En el Prob. 7.39 suponga que la velocidad del bloque es cero y que la barra tiene una velocidad angular de 4 rad/s en el instante mostrado. ¿Cuál es la aceleración del bloque?

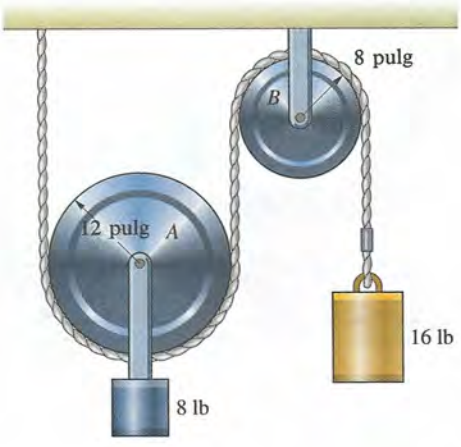
7.41 En la Fig. P7.41 la barra esbelta de 0.4 kg y el disco de 1 kg se liberan del reposo en la posición mostrada. Si el disco rueda, ¿cuál es la aceleración angular de la barra en ese instante?



P7.41

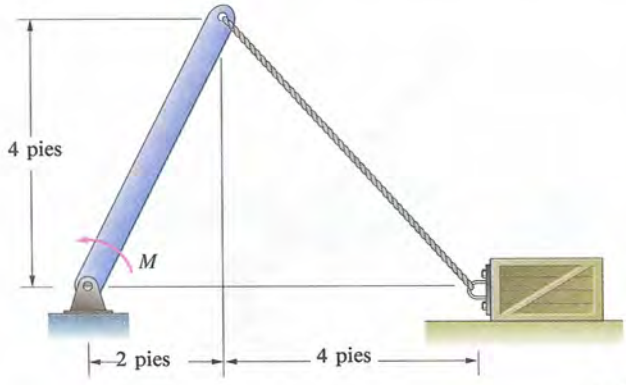
7.42 En el Prob. 7.41, ¿cuál es el mínimo valor del coeficiente de fricción estática para que el disco ruede en vez de resbalar al ser liberado?

7.43 En la Fig. P7.43 la polea A pesa 4 lb, $I_A = 0.060$ slug-pie^2 e $I_B = 0.014$ slug-pie^2. Si el sistema se libera del reposo, ¿qué distancia cae el peso de 16 lb en medio segundo?



P7.43

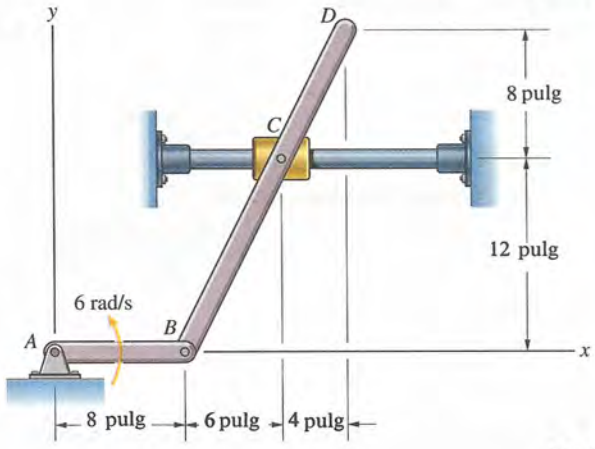
7.44 En la Fig. P7.44 la barra esbelta pesa 20 lb y la caja 80 lb. Ésta descansa sobre una superficie lisa. Si el sistema está en reposo en el instante mostrado, ¿qué par M ocasionará que la caja acelere hacia la izquierda a 4 pie/s^2 en ese instante?



P7.44

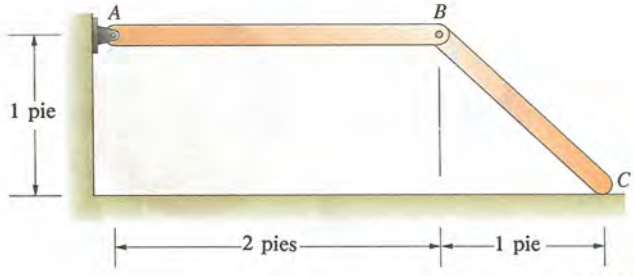
7.45 Suponga que la barra esbelta del Prob. 7.44 gira en dirección antihoraria a 2 rad/s en el instante mostrado y que el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie horizontal es $\mu_k = 0.2$. ¿Qué par M ocasionará que la caja acelere hacia la izquierda a 4 pie/s^2 en ese instante?

7.46 La barra AB mostrada gira con una velocidad angular constante de 6 rad/s en dirección antihoraria. La barra esbelta BCD pesa 10 lb y el collarín al que la barra BCD está unida en C pesa 2 lb. El eje y señala hacia arriba. Ignorando la fricción, determine las componentes de las fuerzas ejercidas sobre la barra BCD por los pasadores en B y C en el instante mostrado.



P7.46

7.47 En la Fig. P7.47, la barra AB pesa 10 lb y la barra BC 6 lb. Si el sistema se libera del reposo en la posición mostrada, ¿cuáles son la aceleración angular de la barra AB y la fuerza normal ejercida por el piso en C en ese instante? Ignore la fricción.

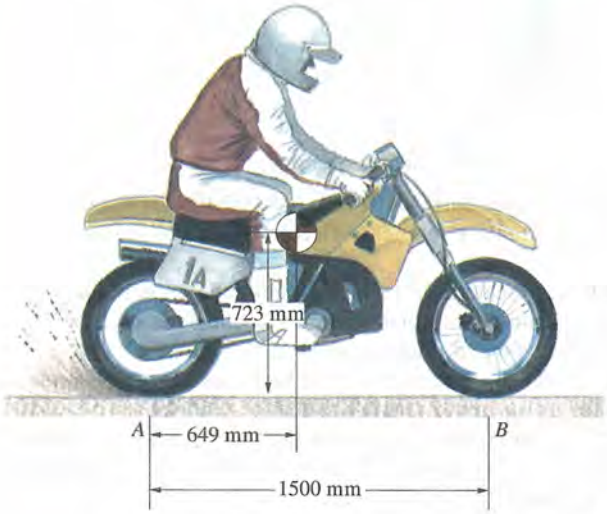


P7.47

7.48 En el Prob. 7.47, si la velocidad angular de la barra AB es de 1.0 rad/s horaria en el instante mostrado, ¿cuáles son la aceleración angular de la barra BC y la fuerza normal ejercida por el piso en C en ese instante?

7.49 En la Fig. P7.49 la masa combinada de motocicleta y conductor es de 160 kg. Cada rueda de 9 kg tiene un radio de 330 mm y un momento de inercia de masa $I = 0.8$ kg-m^2. El motor impulsa la rueda trasera. Si la rueda trasera ejerce una fuerza horizontal de 400 N sobre el camino y *no* se ignora la fuerza horizontal que ejerce la rueda frontal sobre el camino, determine (a) la aceleración de la motocicleta; (b) las fuerzas normales que ejercen las ruedas trasera y frontal sobre el camino. (Se muestra la posición del centro de masa de la motocicleta *sin incluir* sus ruedas.)

Estrategia: Aísle las ruedas y dibuje tres diagramas de cuerpo libre. El motor de la motocicleta impulsa la rueda trasera ejerciendo un par sobre ella.

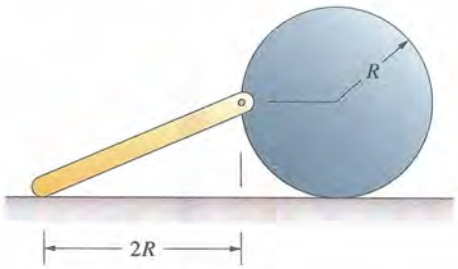


P7.49

7.50 En el Prob. 7.49, si la rueda frontal se levanta ligeramente del camino cuando el conductor acelera, determine (a) la aceleración de la motocicleta; (b) el par ejercido por el motor sobre la rueda trasera.

7.51 Usando las Ecs. (7.5) a (7.8), demuestre que el momento angular de un cuerpo rígido respecto a un punto fijo O es la suma del momento angular respecto a O debido al movimiento de su centro de masa y el momento angular respecto a su centro de masa: $\mathbf{H}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{H}$.

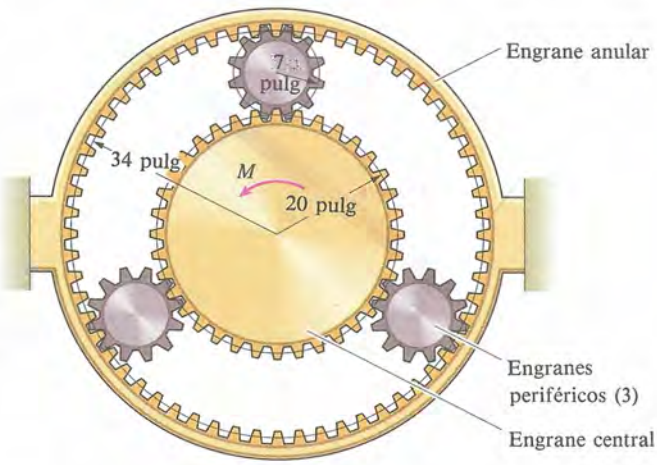
7.52 En la Fig. P7.52 la masa de la barra esbelta es m y la masa del disco homogéneo es $4m$. El sistema se libera del reposo en la posición mostrada. Si el disco rueda y la fricción entre la barra y la superficie horizontal es insignificante, demuestre que la aceleración angular del disco es $\alpha = 6g/95R$ antihoraria.



P7.52

7.53 Si el disco del Prob. 7.52 rueda y el coeficiente de fricción cinética entre la barra y la superficie horizontal es μ_k, ¿cuál es la aceleración angular del disco en el instante en que se libera el sistema?

7.54 El engrane anular mostrado está fijo. La masa y el momento de inercia de masa del engrane central son $m_S = 22$ slug, $I_S = 4400$ slug-pie^2. La masa y el momento de inercia de masa de cada engrane periférico son $m_P = 2.7$ slug, $I_P = 65$ slug-pie^2. Si se aplica un par $M = 600$ pie-lb al engrane central, ¿cuál es la aceleración angular resultante en los engranes periféricos, y cuál es la fuerza tangencial ejercida sobre el engrane central por cada engrane periférico?

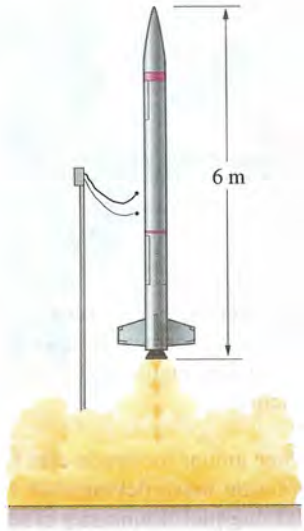


P7.54

7.55 Si el sistema del Prob. 7.54 parte del reposo, ¿qué par constante M ejercido sobre el engrane central ocasionará que éste acelere a 120 rpm en 1 min?

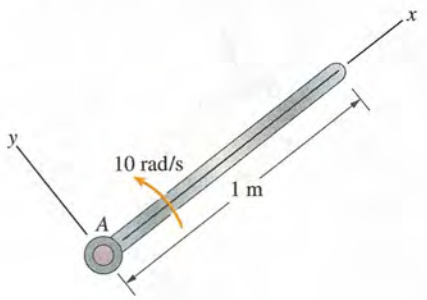
Los Probs. 7.56 a 7.62 están relacionados con el Ej. 7.7.

7.56 El cohete de 3 Mg mostrado está acelerando hacia arriba a razón de $2g$. Si se idealiza como una barra homogénea, ¿cuál es la magnitud de la fuerza axial en el punto medio?



P7.56

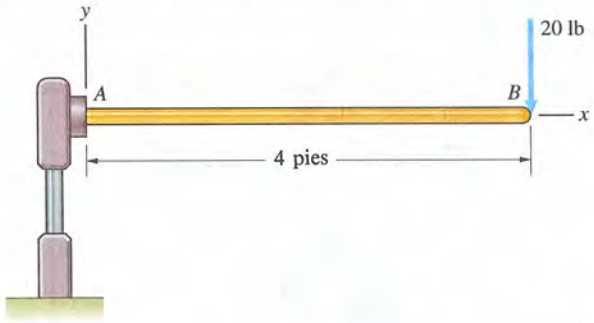
7.57 La barra esbelta de 20 kg de la figura está unida a un eje vertical en A y gira *en un plano horizontal* con una velocidad angular constante de 10 rad/s. ¿Cuál es la fuerza axial en el punto medio de la barra?



P7.57

7.58 Para la barra en rotación del Prob. 7.57, dibuje la gráfica de la fuerza axial como una función de x.

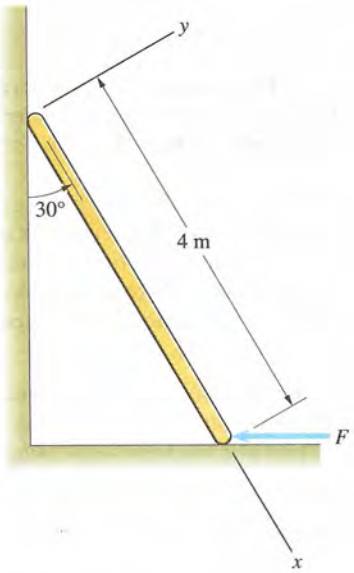
7.59 En la Fig. P7.59, la barra esbelta AB de 100 lb tiene un soporte empotrado en A. El eje y apunta hacia arriba. Determine las magnitudes de la fuerza cortante y el momento flector en el punto medio de la barra si (a) el soporte está fijo; (b) el soporte está siendo acelerado hacia arriba a 10 pie/s^2.



P7.59

7.60 Para la barra del Prob. 7.59 dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector en los dos casos.

7.61 La escalera de 18 kg es mantenida en equilibrio en la posición mostrada por la fuerza F. Modele la escalera como una barra esbelta e ignore la fricción.
(a) ¿Cuáles son la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flector en su punto medio?
(b) Si se quita repentinamente la fuerza F, ¿cuáles son la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flector en el punto medio de la escalera en ese instante?



P7.61

7.62 Para la escalera del Prob. 7.61, dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector en los dos casos.

Ejemplo con computador

El material de esta sección está diseñado para el uso de una calculadora programable o de un computador.

Cuando se conocen las fuerzas y pares que actúan sobre un cuerpo rígido, se pueden usar las ecuaciones de movimiento para determinar la aceleración de su centro de masa y su aceleración angular. En algunos casos se puede integrar para obtener expresiones cerradas de la velocidad y la posición de su centro de masa y para su velocidad y posición angulares como funciones del tiempo. Pero si las funciones que describen las aceleraciones son muy complejas, o las fuerzas y pares se conocen en términos de datos continuos o analógicos en vez de ecuaciones, se deberá usar un método numérico.

En el Cap. 3 describimos un método sencillo de diferencias finitas para determinar la posición y la velocidad del centro de masa como funciones del tiempo. La posición y la velocidad angulares se pueden determinar de la misma manera. Supongamos que la aceleración angular de un cuerpo rígido depende del tiempo, de su posición angular y de su velocidad angular:

$$\alpha = \alpha(t, \theta, \omega). \tag{7.30}$$

Supongamos que en un tiempo particular t_0 conocemos el ángulo $\theta(t_0)$ y la velocidad angular $\omega(t_0)$. La aceleración angular en t_0 es

$$\frac{d\omega}{dt}(t_0) = \alpha(t_0, \theta(t_0), \omega(t_0)), \tag{7.31}$$

donde

$$\frac{d\omega}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t_0 + \Delta t) - \omega(t_0)}{\Delta t}.$$

Elegimos un valor suficientemente pequeño de Δt para aproximar esta derivada con

$$\frac{d\omega}{dt}(t_0) = \frac{\omega(t_0 + \Delta t) - \omega(t_0)}{\Delta t}$$

y sustituirla en la Ec. (7.31) a fin de obtener una expresión aproximada para la velocidad angular en el tiempo $t_0 + \Delta t$:

$$\omega(t_0 + \Delta t) = \omega(t_0) + \alpha(t_0, \theta(t_0), \omega(t_0))\Delta t. \tag{7.32}$$

La relación entre la velocidad y la posición angulares en t_0 es

$$\frac{d\theta}{dt}(t_0) = \omega(t_0).$$

Aproximar esta derivada con

$$\frac{d\theta}{dt}(t_0) = \frac{\theta(t_0 + \Delta t) - \theta(t_0)}{\Delta t},$$

da una expresión aproximada para la posición angular en el tiempo $t_0 + \Delta t$:

$$\theta(t_0 + \Delta t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)\Delta t. \tag{7.33}$$

Con las Ecs. (7.32) y (7.33) podemos determinar los valores aproximados de la velocidad y la posición angulares en $t_0 + \Delta t$. Usando esos valores como condiciones iniciales, podemos repetir el procedimiento para determinar la velocidad y la posición angulares en el tiempo $t_0 + 2\Delta t$, etc.

Ejemplo 7.10

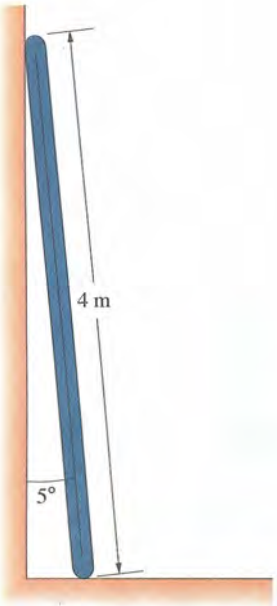


Figura 7.23

La escalera de 18 kg de la Fig. 7.23 se libera del reposo en $t = 0$. Ignorando la fricción, determine su posición y velocidad angulares como funciones del tiempo. Use incrementos Δt de tiempo de 0.1 s, 0.01 s y 0.001 s.

ESTRATEGIA

En el Ej. 7.4 se presentan los pasos iniciales (dibujar el diagrama de cuerpo libre de la escalera, aplicar las ecuaciones de equilibrio y determinar la aceleración angular). La aceleración angular de la escalera es

$$\alpha = \frac{3g}{2l} \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es el ángulo entre la escalera y la pared y l es su longitud. Con esta expresión podemos usar las Ecs. (7.32) y (7.33) para aproximar la posición y la velocidad angulares de la escalera como funciones del tiempo.

SOLUCIÓN

La aceleración angular es

$$\alpha = \frac{(3)(9.81)}{(2)(4)} \operatorname{sen} \theta = 3.68 \operatorname{sen} \theta \text{ rad/s}^2.$$

Sea $\Delta t = 0.1$ s. En el tiempo inicial $t_0 = 0$, $\theta(t_0) = 5° = 0.0873$ rad y $\omega(t_0) = 0$. Podemos usar las Ecs. (7.32) y (7.33) para determinar la velocidad y la posición angulares en el tiempo $t_0 + \Delta t = 0.1$ s. La posición angular es

$$\theta(t_0 + \Delta t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)\Delta t:$$

$$\theta(0.1) = \theta(0) + \omega(0)\Delta t$$

$$= 0.0873 + (0)(0.1) = 0.0873 \text{ rad}.$$

La velocidad angular es

$$\omega(t_0 + \Delta t) = \omega(t_0) + \omega(t_0)\Delta t:$$

$$\omega(0.1) = 0 + [3.68 \operatorname{sen} (0.0873)](0.1) = 0.0321 \text{ rad/s}.$$

Usando estos valores como las condiciones iniciales para el siguiente incremento de tiempo, la posición angular en $t = 0.2$ s es

$$\theta(0.2) = \theta(0.1) + \omega(0.1)\Delta t$$

$$= 0.0873 + (0.0321)(0.1) = 0.0905 \text{ rad},$$

y la velocidad angular es

$$\omega(0.2) = \omega(0.1) + \alpha(0.1)\Delta t$$

$$= 0.0321 + [3.68 \operatorname{sen} (0.0873)](0.1) = 0.0641 \text{ rad/s}.$$

Así, obtenemos los siguientes valores para los primeros cinco incrementos de tiempo:

Tiempo, s	θ, rad	ω, rad/s
0.0	0.0873	0.0000
0.1	0.0873	0.0321
0.2	0.0905	0.0641
0.3	0.0969	0.0974
0.4	0.1066	0.1329
0.5	0.1199	0.1721

Las Figs. 7.24 y 7.25 muestran las soluciones numéricas para la posición y la velocidad angulares obtenidas usando $\Delta t = 0.1$ s, $\Delta t = 0.01$ s y $\Delta t = 0.001$ s. Ensayos con incrementos de tiempo menores indican que $\Delta t = 0.001$ s se aproxima bastante bien a la solución exacta. Mostramos las posiciones de la escalera que cae a intervalos de 0.2 s en la Fig. 7.26.

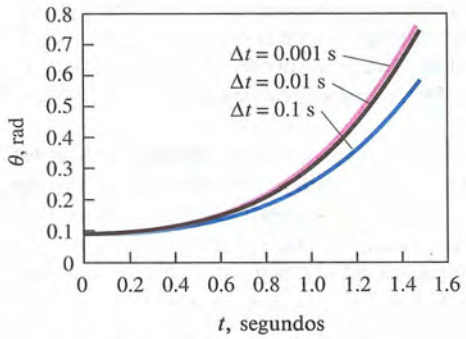


Figura 7.24

Soluciones numéricas para la posición angular de la escalera.

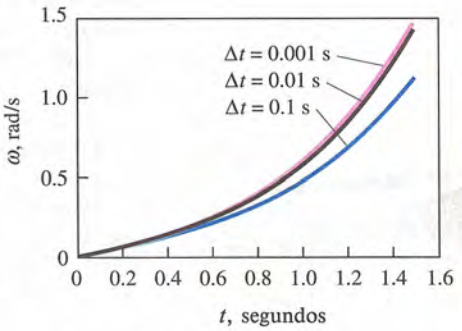


Figura 7.25

Soluciones numéricas para la velocidad angular de la escalera.

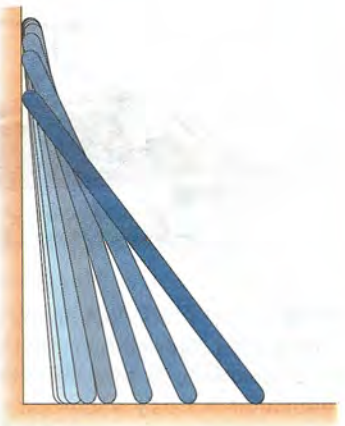


Figura 7.26

Posición de la escalera a intervalos de 0.2 s de $t = 0$ a $t = 1.4$ s.

COMENTARIOS

Usando la regla de la cadena podemos escribir la aceleración angular de la escalera como

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\omega = \frac{3g}{2l}\operatorname{sen}\theta.$$

Separando variables, podemos integrar para determinar la velocidad angular en función de la posición angular:

$$\int_0^{\omega} \omega\, d\omega = \int_{5^\circ}^{\theta} \frac{3g}{2l}\operatorname{sen}\theta d\theta.$$

Obtenemos

$$\omega = \sqrt{(3g/l)(\cos 5^\circ - \cos\theta)}.$$

Este resultado en forma cerrada se compara con la gráfica de la solución numérica (usando $\Delta t = 0.001$ s) de la Fig. 7.27. Las curvas son indistinguibles entre sí.

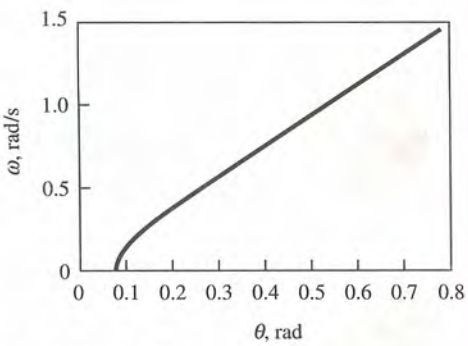


Figura 7.27

Soluciones analítica y numérica para la velocidad angular de la escalera en función de su posición angular.

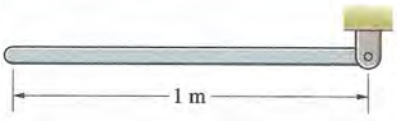
Problemas

7.63 Continúe los cálculos presentados en el Ej. 7.10 usando $\Delta t = 0.1$ s, y determine la posición angular de la escalera y su velocidad angular en $t = 0.6$ s y $t = 0.7$ s.

7.64 El momento de inercia de masa del rotor del helicóptero es de 400 slug-pie^2. Parte del reposo en $t = 0$, el motor ejerce un par constante de 500 pie-lb y la resistencia aerodinámica ejerce un par de magnitud $20\omega^2$ pie-lb, donde ω es la velocidad angular del rotor en rad/s. Con $\Delta t = 0.2$ s, halle la posición y la velocidad angulares del rotor para los cinco primeros incrementos de tiempo. Compare sus resultados de la velocidad angular con la solución cerrada.

7.65 En el Prob. 7.64 dibuje una gráfica de la velocidad angular del rotor en función del tiempo de $t = 0$ a $t = 10$ s, comparando la solución cerrada, la solución numérica usando $\Delta t = 1.0$ s y la solución numérica usando $\Delta t = 0.2$ s.

7.66 La barra esbelta de 10 kg se libera del reposo en la posición horizontal mostrada. Usando $\Delta t = 0.1$ s, determine la posición y la velocidad angulares de la barra para los cinco primeros incrementos de tiempo.



P7.66

7.67 En el Prob. 7.66 determine la posición y la velocidad angulares de la barra como funciones del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 0.8$ s usando $\Delta t = 0.1$ s, $\Delta t = 0.01$ s y $\Delta t = 0.001$ s. Dibuje las gráficas de la velocidad angular como función de la posición angular para esos tres casos y compárelos con la gráfica de la solución en forma cerrada para la velocidad angular en función de la posición angular.

7.68 En el Prob. 7.66 suponga que el soporte de pasador de la barra contiene un dispositivo amortiguador que ejerce un par resistente sobre la barra de magnitud $c\omega$ (N-m), donde ω es la velocidad angular en rad/s. Usando $\Delta t = 0.001$ s, dibuje gráficas de la velocidad angular de la barra como función del tiempo de $t = 0$ a $t = 0.8$ s para los casos en que $c = 0$, $c = 2$, $c = 4$ y $c = 8$.

7.69 La escalera del Ej. 7.10 perderá contacto con la pared antes de tocar el suelo. Usando $\Delta t = 0.001$ s, calcule el tiempo y el valor del ángulo entre la pared y la escalera cuando esto ocurra.

Apéndice: Momentos de inercia

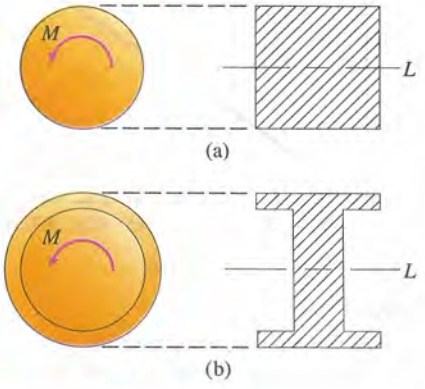


Figura 7.28
Cuerpos de igual masa con momentos de inercia de masa diferentes respecto a L.

Cuando un cuerpo rígido está sometido a fuerzas y pares, el movimiento rotacional resultante depende no sólo de su masa, sino también de cómo está *distribuida* la masa. Aunque los dos cuerpos de la Fig. 7.28 tienen la misma masa, las aceleraciones angulares causadas por el par M son diferentes. Esta diferencia se refleja en la ecuación del movimiento angular $M = I\alpha$ a través del momento de inercia I. El cuerpo de la Fig. 7.28(a) tiene un momento de inercia menor respecto al eje L, por lo que su aceleración angular es mayor.

Al deducir las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido en las Secs. 7.2 y 7.3, consideramos éste como un número finito de partículas y expresamos su momento de inercia de masa respecto a un eje L_0 como

$$I_0 = \sum_i m_i r_i^2,$$

donde m_i es la masa de la i-ésima partícula y r_i es la distancia perpendicular de L_0 a la i-ésima partícula (Fig. 7.29a). Para calcular momentos de inercia de cuerpos, suele ser más conveniente modelarlos como distribucio-

nes continuas de masa y expresar el momento de inercia de masa respecto a L_0 como

$$I_0 = \int_m r^2\, dm, \tag{7.34}$$

donde r es la distancia perpendicular de L_0 al elemento diferencial de masa dm (Fig. 7.29b). Cuando el eje pasa por el centro de masa del cuerpo, denotamos con L el eje y con I el momento de inercia de masa respecto a L.

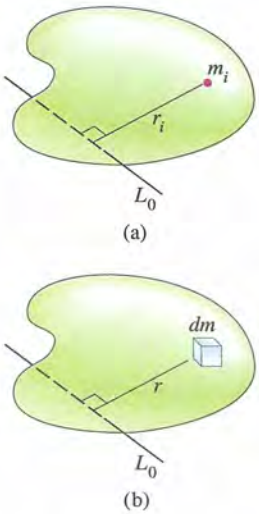


Figura 7.29
Determinación del momento de inercia de masa modelando un cuerpo como (a) un número finito de partículas y (b) una distribución continua de masa.

Cuerpos simples

Los momentos de inercia de masa de cuerpos complejos se pueden determinar sumando los momentos de inercia de sus partes individuales. Por tanto, comenzamos por determinar los momentos de inercia de masa de algunos cuerpos sencillos. En la siguiente sección describiremos el teorema de los ejes paralelos, que permite determinar los momentos de inercia de masa de cuerpos compuestos por combinaciones de partes sencillas.

Barras esbeltas Determinaremos el momento de inercia de masa de una barra recta esbelta respecto a un eje perpendicular L que pasa por el centro de masa de la barra (Fig. 7.30a). "Esbelta" significa que la longitud de la barra es mucho mayor que su ancho. Sea l la longitud de la barra, A el área de su sección transversal y m su masa. Suponemos que A es uniforme a lo largo de la barra y que el material es homogéneo.

Consideremos un elemento diferencial de la barra de longitud dr a una distancia r del centro de masa (Fig. 7.30b). La masa del elemento es igual al producto de su volumen por su densidad: $dm = \rho A\, dr$. Sustituyendo esta expresión en la Ec. (7.34), obtenemos el momento de inercia de masa de la barra respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro de masa:

$$I = \int_m r^2\, dm = \int_{-l/2}^{l/2} \rho A r^2\, dr = \frac{1}{12}\rho A l^3.$$

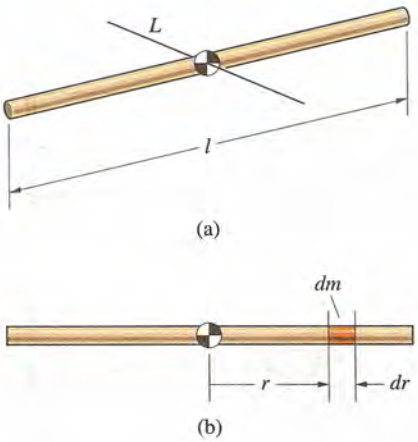


Figura 7.30
(a) Barra esbelta.
(b) Elemento diferencial de longitud dr.

La masa de la barra es igual al producto de la densidad por su volumen, $m = \rho Al$, y podemos expresar el momento de inercia de masa como

$$I = \frac{1}{12}ml^2. \tag{7.35}$$

Hemos ignorado las dimensiones laterales de la barra. Es decir, consideramos el elemento diferencial de masa dm como si estuviera concentrado sobre el eje de la barra. Por ello, la Ec. (7.35) es una aproximación para el momento de inercia de masa de una barra. Más adelante determinaremos los momentos de inercia para una barra de dimensiones laterales finitas y veremos que la Ec. (7.35) es una buena aproximación cuando el ancho de la barra es pequeño en comparación con su longitud.

Placas delgadas Consideremos una placa plana homogénea con masa m y espesor uniforme T. No especificamos la forma de su sección transversal. Orientemos un sistema coordenado cartesiano de modo que la placa quede en el plano x-y (Fig. 7.31a). Nuestro objetivo es determinar los momentos de inercia de masa de la placa respecto a los ejes x, y y z.

Podemos obtener un elemento diferencial de volumen de la placa proyectando un elemento de área dA a través del espesor T de la placa (Fig. 7.31b). El volumen resultante es $T\,dA$. La masa de este elemento de volumen es igual al producto de la densidad por el volumen: $dm = \rho T\,dA$. Sustituyendo esta expresión en la Ec. (7.34), obtenemos el momento de inercia de masa de la placa respecto al eje z en la forma

$$I_{(\text{eje } z)} = \int_m r^2\,dm = \rho T \int_A r^2\,dA,$$

donde r es la distancia del eje z a dA. Como la masa de la placa es $m = \rho TA$, con A como el área de la sección transversal, el producto $\rho T = m/A$. La integral de la derecha es el momento polar de inercia J_0 de la sección transversal de la placa. Por tanto, podemos escribir el momento de inercia de masa de la placa respecto al eje z como

$$I_{(\text{eje } z)} = \frac{m}{A}J_0. \tag{7.36}$$

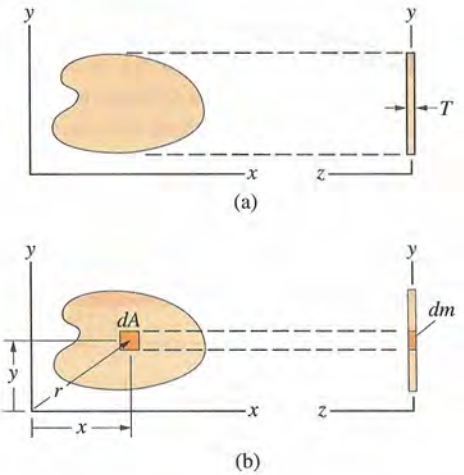


Figura 7.31
(a) Placa de forma arbitraria y espesor uniforme T.
(b) Elemento de volumen obtenido proyectando un elemento de área dA a través de la placa.

De la Fig. 7.31(b) vemos que la distancia perpendicular del eje x al elemento de área dA es la coordenada y de dA. Por tanto, el momento de inercia de masa de la placa al eje x es

$$I_{(\text{eje } x)} = \int_m y^2\, dm = \rho T \int_A y^2\, dA = \frac{m}{A} I_x, \tag{7.37}$$

donde I_x es el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje x. El momento de inercia de masa de la placa respecto al eje y es

$$I_{(\text{eje } y)} = \int_m x^2\, dm = \rho T \int_A x^2\, dA = \frac{m}{A} I_y, \tag{7.38}$$

donde I_y es el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje y.

Así, hemos expresado los momentos de inercia de masa de una placa delgada homogénea de espesor uniforme en función de los momentos de inercia de la sección transversal de la placa. Estos resultados explican por qué las integrales de área I_x, I_y y J_0 se llaman momentos de inercia.

Como la suma de los momentos de inercia de área I_x e I_y es igual al momento polar de inercia J_0, el momento de inercia de masa de la placa delgada respecto al eje z es igual a la suma de sus momentos de inercia respecto a los ejes x y y:

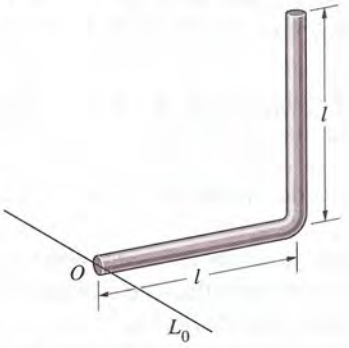
$$I_{(\text{eje } z)} = I_{(\text{eje } x)} + I_{(\text{eje } y)}. \tag{7.39}$$

En el siguiente ejemplo usamos integración para determinar el momento de inercia de masa de un cuerpo que consta de dos barras esbeltas soldadas entre sí. Luego presentamos un ejemplo que muestra el uso de las Ecs. (7.36) a (7.38) para determinar los momentos de inercia de masa de una placa delgada homogénea con un área de sección transversal específica.

Ejemplo 7.11

Dos barras esbeltas homogéneas, cada una de longitud l, masa m y área de sección transversal A, están soldadas formando un cuerpo en forma de L (Fig. 7.32). Determine el momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje L_0 que pasa por O (el eje L_0 es perpendicular a las dos barras).

Figura 7.32



ESTRATEGIA

Usando el mismo procedimiento de integración que para una sola barra, podemos determinar el momento de inercia de masa de cada barra respecto a L_0 y sumar los resultados.

SOLUCIÓN

Orientamos un sistema coordenado con el eje z a lo largo de L_0 y el eje x colineal con la barra 1 (Fig. a). La masa del elemento diferencial de la barra 1 de longitud dx es $dm = \rho A\,dx$. Su momento de inercia de masa respecto a L_0 es

$$(I_0)_1 = \int_m r^2\,dm = \int_0^l \rho A x^2\,dx = \frac{1}{3}\rho A l^3.$$

En función de la masa de la barra, $m = \rho A l$, podemos escribir esto como

$$(I_0)_1 = \frac{1}{3}ml^2.$$

La masa del elemento de la barra 2 de longitud dy (Fig. b) es $dm = \rho A\,dy$. Vemos que la distancia perpendicular de L_0 al elemento es $r = \sqrt{l^2 + y^2}$. Por tanto, el momento de inercia de masa de la barra 2 respecto a L_0 es

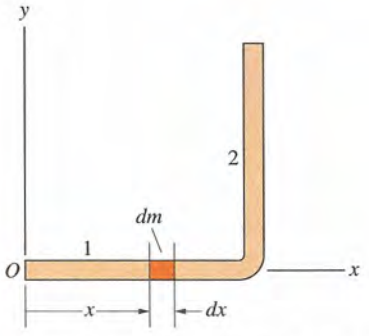
$$(I_0)_2 = \int_m r^2\,dm = \int_0^l \rho A(l^2 + y^2)\,dy = \frac{4}{3}\rho A l^3.$$

En función de la masa de la barra obtenemos

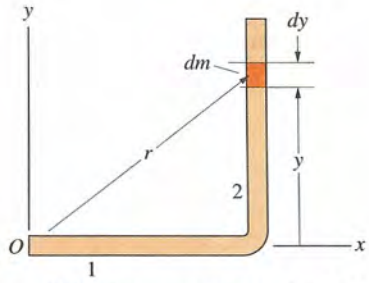
$$(I_0)_2 = \frac{4}{3}ml^2.$$

El momento de inercia de masa del cuerpo en forma de L respecto a L_0 es

$$I_0 = (I_0)_1 + (I_0)_2 = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{4}{3}ml^2 = \frac{5}{3}ml^2.$$



(a) Elemento diferencial de la barra 1.



(b) Elemento diferencial de la barra 2.

Ejemplo 7.12

La placa delgada homogénea de la Fig. 7.33 tiene espesor uniforme y masa m. Determine sus momentos de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z.

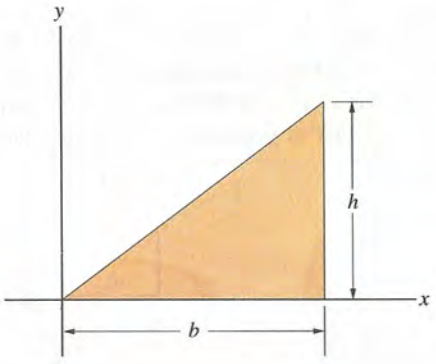


Figura 7.33

ESTRATEGIA

Los momentos de inercia de masa respecto a los ejes x y y están dados por las Ecs. (7.37) y (7.38) en función de los momentos de inercia del área de la sección transversal de la placa. Con la Ec. (7.39) podemos determinar el momento de inercia de masa de la placa respecto al eje z.

SOLUCIÓN

Según el Ap. B, los momentos de inercia del área triangular respecto a los ejes x y y son $I_x = \frac{1}{12}bh^3$ e $I_y = \frac{1}{4}hb^3$. Por tanto, los momentos de inercia de masa respecto a los ejes x y y son

$$I_{(\text{eje } x)} = \frac{m}{A}I_x = \frac{m}{(1/2)bh}\left(\frac{1}{12}bh^3\right) = \frac{1}{6}mh^2,$$

$$I_{(\text{eje } y)} = \frac{m}{A}I_y = \frac{m}{(1/2)bh}\left(\frac{1}{4}hb^3\right) = \frac{1}{2}mb^2.$$

El momento de inercia respecto al eje z es

$$I_{(\text{eje } z)} = I_{(\text{eje } x)} + I_{(\text{eje } y)} = m\left(\frac{1}{6}h^2 + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Teorema de los ejes paralelos

Este teorema nos permite determinar momentos de inercia de masa de cuerpos compuestos cuando conocemos los momentos de inercia de sus partes. Supongamos que conocemos el momento de inercia de masa respecto a un eje L que pase por el centro de masa de un cuerpo, y que deseamos determinar su momento de inercia de masa I_0 respecto a un eje paralelo L_0 (Fig. 7.34a). Para determinar I_0 incluimos sistemas coordenados paralelos xyz y $x'y'z'$, con el eje z a lo largo de L_0 y el eje z' a lo largo de L, como se muestra en la Fig. 7.34(b) (en esta figura los ejes L_0 y L son perpendiculares a la página). El origen O del sistema coordenado xyz está contenido en el plano x'-y'. Los términos d_x y d_y son las coordenadas del centro de masa respecto al sistema coordenado xyz.

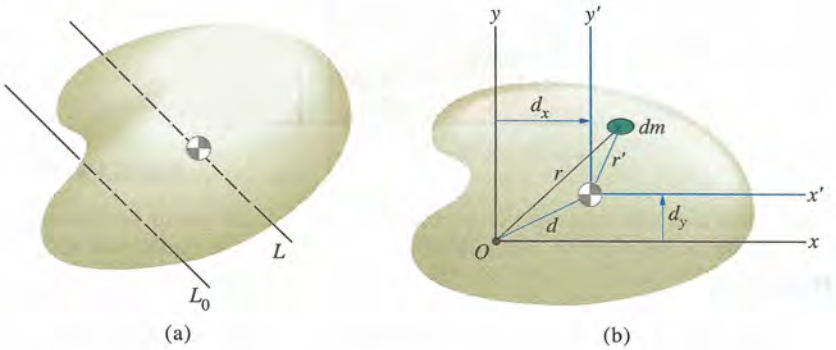


Figura 7.34
(a) Eje L a través del centro de masa de un cuerpo y un eje paralelo L_0. (b) Sistemas coordenados xyz y $x'y'z'$.

El momento de inercia de masa del cuerpo respecto a L_0 es

$$I_0 = \int_m r^2\, dm = \int_m (x^2 + y^2)\, dm, \tag{7.40}$$

donde r es la distancia perpendicular de L_0 al elemento diferencial de masa dm, y x, y son las coordenadas de dm en el plano x-y. Las coordenadas x-y de dm están relacionadas con sus coordenadas x'-y' por

$$x = x' + d_x, \qquad y = y' + d_y.$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec.(7.40) podemos escribirla como

$$I_0 = \int_m [(x')^2 + (y')^2]\, dm + 2d_x \int_m x'\, dm + 2d_y \int_m y'\, dm + \int_m (d_x^2 + d_y^2)\, dm. \tag{7.41}$$

Como $(x')^2 + (y')^2 = (r')^2$, donde r' es la distancia perpendicular de L a dm, la primera integral en el lado derecho de esta ecuación es el momento de inercia de masa I del cuerpo respecto a L. Recuerde que las coordenadas x' y y' del centro de masa del cuerpo respecto al sistema coordenado $x'y'z'$ están definidas por

$$\bar{x}' = \frac{\int_m x'\, dm}{\int_m dm}, \qquad \bar{y}' = \frac{\int_m y'\, dm}{\int_m dm}.$$

Como el centro de masa del cuerpo está en el origen del sistema $x'y'z'$, $\bar{x}' = 0$ y $\bar{y}' = 0$. Por tanto, las integrales en los términos segundo y tercero del lado derecho de la Fig. (7.41) son iguales a cero. En la Ec. 7.34(b) vemos que $d_x^2 + d_y^2 = d^2$, donde d es la distancia perpendicular entre los ejes L y L_0. Por tanto, obtenemos el teorema

$$I_0 = I + d^2m, \tag{7.42}$$

donde m es la masa del cuerpo. Éste es el **teorema de los ejes paralelos**. Si se conoce el momento de inercia de masa de un cuerpo respecto a un eje dado, se puede usar este teorema para determinar su momento de inercia de masa respecto a cualquier otro eje paralelo.

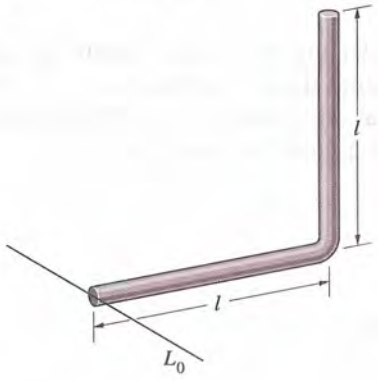
En los siguientes dos ejemplos usamos el teorema de los ejes paralelos para determinar momentos de inercia de masa de cuerpos compuestos. La determinación del momento de inercia de masa respecto a un eje L_0 dado suele requerir tres pasos:

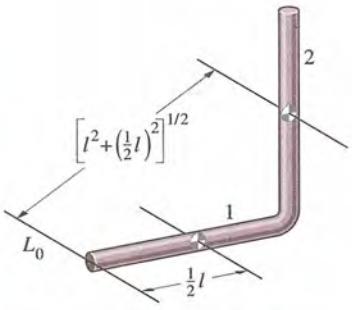
1. Escoger las partes. *Trate de dividir el cuerpo en partes cuyos momentos de inercia de masa se conozcan o se puedan determinar con facilidad.*
2. Determinar el momento de inercia de las partes. *Primero se debe determinar el momento de inercia de masa de cada parte respecto al eje que pasa por su centro de masa paralelo a L_0. Luego se puede usar el teorema de los ejes paralelos para determinar su momento de inercia de masa respecto a L_0.*
3. Sumar los resultados. *Sume los momentos de inercia de masa de las partes (o réstelos en el caso de agujeros o recortes) para obtener el momento de inercia de masa del cuerpo compuesto.*

Ejemplo 7.13

Dos barras esbeltas homogéneas, cada una de longitud l y masa m, están soldadas entre sí formando un cuerpo de L (Fig. 7.35). Determine el momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje L_0 que pasa por el punto O (el eje L_0 es perpendicular a las dos barras).

Figura 7.35





(a) Distancias de L_0 a los ejes paralelos que pasan por los centros de masa de las barras 1 y 2.

SOLUCIÓN

Selección de las partes Las partes son las dos barras, que llamaremos barra 1 y barra 2 (Fig. a).

Determinación de los momentos de inercia de las partes Según la Ec. (7.35), el momento de inercia de masa de cada barra respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro de masa es $I = \frac{1}{12}ml^2$. La distancia de L_0 al eje paralelo que pasa por el centro de masa de la barra 1 es $\frac{1}{2}l$ (Fig. a). Por tanto, el momento de inercia de masa de la barra 1 respecto a L_0 es

$$(I_0)_1 = I + d^2m = \frac{1}{12}ml^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2 m = \frac{1}{3}ml^2.$$

La distancia de L_0 al eje paralelo que pasa por el centro de masa de la barra 2 es $[l^2 + (l/2)^2]^{1/2}$. El momento de inercia de masa de la barra 2 respecto a L_0 es

$$(I_0)_2 = I + d^2m = \frac{1}{12}ml^2 + \left[l^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2\right]m = \frac{4}{3}ml^2.$$

Suma de los resultados El momento de inercia de masa del cuerpo en forma de L respecto a L_0 es

$$I_0 = (I_0)_1 + (I_0)_2 = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{4}{3}ml^2 = \frac{5}{3}ml^2.$$

COMENTARIO

Compare esto con el Ej. 7.11, donde usamos integración para hallar el momento de inercia de masa respecto a L_0. Obtuvimos el resultado más fácilmente con el teorema de los ejes paralelos, pero debemos conocer los momentos de inercia de masa de las barras respecto a los ejes que pasan por sus centros de masa.

Ejemplo 7.14

El cuerpo de la Fig. 7.36 consiste en una barra esbelta de 3 kg soldada a un disco delgado circular de 2 kg. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje L que pasa por su centro de masa (el eje L es perpendicular a la barra y al disco).

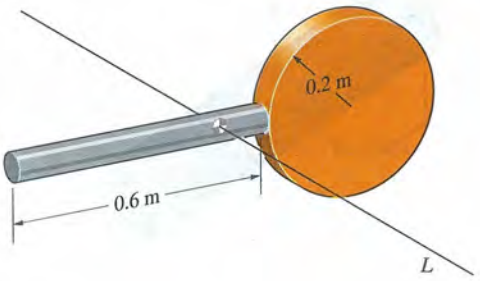


Figura 7.36

ESTRATEGIA

Debemos localizar el centro de masa del cuerpo compuesto y aplicar el teorema de los ejes paralelos. En el Ap. C podemos obtener los momentos de inercia de masa de la barra y del disco.

SOLUCIÓN

Selección de las partes Las partes son la barra y el disco. Con el sistema coordenado de la Fig. (a), la coordenada x del centro de masa del cuerpo compuesto es

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_{(\text{barra})}m_{(\text{barra})} + \bar{x}_{(\text{disco})}m_{(\text{disco})}}{m_{(\text{barra})} + m_{(\text{disco})}} = \frac{(0.3)(3) + (0.6 + 0.2)(2)}{3 + 2} = 0.5 \text{ m}.$$

Determinación de los momentos de inercia de masa de las partes La distancia del centro de masa de la barra al centro de masa del cuerpo compuesto es 0.2 m (Fig. b). Por tanto, el momento de inercia de masa de la barra respecto a L es

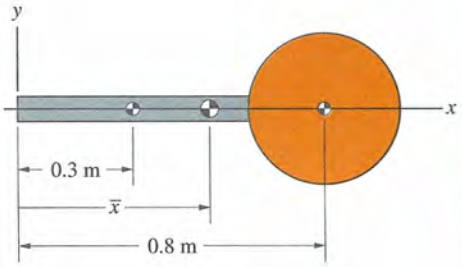
$$I_{(\text{barra})} = \frac{1}{12}(3)(0.6)^2 + (0.2)^2(3) = 0.210 \text{ kg-m}^2.$$

La distancia del centro de masa del disco al centro de masa del cuerpo compuesto es 0.3 m (Fig. c). El momento de inercia de masa del disco respecto a L es

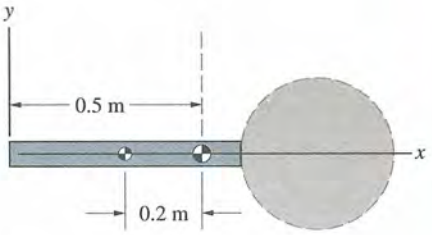
$$I_{(\text{disco})} = \frac{1}{2}(2)(0.2)^2 + (0.3)^2(2) = 0.220 \text{ kg-m}^2.$$

Suma de los resultados El momento de inercia de masa del cuerpo compuesto respecto a L es

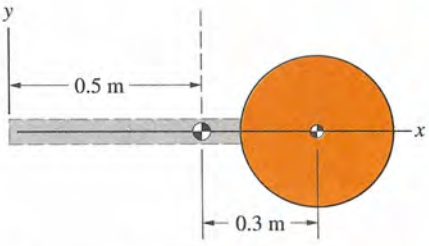
$$I = I_{(\text{barra})} + I_{(\text{disco})} = 0.430 \text{ kg-m}^2.$$



(a) Coordenada $\bar{x}$ del centro de masa del cuerpo.



(b) Distancia de L al centro de masa de la barra.

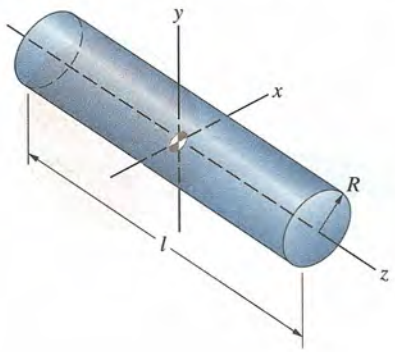


(c) Distancia de L al centro de masa del disco.

Ejemplo 7.15

El cilindro homogéneo de la Fig. 7.37, tiene masa m, longitud l y radio R. Determine sus momentos de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z.

Figura 7.37



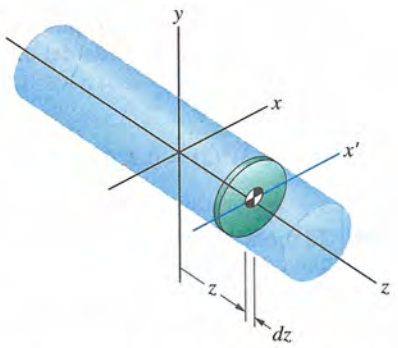
ESTRATEGIA

Podemos determinar los momentos de inercia de masa del cilindro por medio de una interesante aplicación del teorema de los ejes paralelos. Primero lo usamos para determinar los momentos de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z de un elemento infinitesimal del cilindro que consiste en un disco de espesor dz. Luego integramos los resultados con respecto a z para obtener los momentos de inercia del cilindro.

SOLUCIÓN

Consideremos un elemento del cilindro de espesor dz a una distancia z del centro del cilindro (Fig. a). (Podemos imaginar que este elemento se obtiene "rebanando" el cilindro perpendicularmente a su eje.) La masa del elemento es igual al producto de la densidad por el volumen del elemento, $dm = \rho(\pi R^2 dz)$. Obtenemos los momentos de inercia de masa del elemento usando los valores para una placa delgada circular dados en el Ap. C. El momento de inercia de masa respecto al eje z es

$$dI_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{2}\,dm\,R^2 = \frac{1}{2}(\rho\pi R^2 dz)R^2.$$



(a) Elemento diferencial del cilindro en forma de disco.

Integramos este resultado respecto a z de $-l/2$ a $l/2$, sumando de esta manera los momentos de inercia de masa de los elementos infinitesimales de disco que forman el cilindro. El resultado es el momento de inercia de masa del cilindro respecto al eje z:

$$I_{(\text{eje } z)} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{2}\rho\pi R^4\, dz = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 l.$$

Podemos escribir este resultado en función de la masa del cilindro, $m = \rho(\pi R^2 l)$, como

$$I_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{2}mR^2.$$

El momento de inercia de masa del elemento de disco respecto al eje x' es

$$dI_{(\text{eje } x')} = \frac{1}{4}\,dm\,R^2 = \frac{1}{4}(\rho\pi R^2\, dz)R^2.$$

Usamos este resultado y el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de masa del elemento respecto al eje x:

$$dI_{(\text{eje } x)} = dI_{(\text{eje } x')} + z^2 dm = \frac{1}{4}(\rho\pi R^2\, dz)R^2 + z^2(\rho\pi R^2\, dz).$$

Integrando esta expresión con respecto a z de $-l/2$ a $l/2$, obtenemos el momento de inercia de masa del cilindro respecto al eje x:

$$I_{(\text{eje } x)} = \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{1}{4}\rho\pi R^4 + \rho\pi R^2 z^2\right) dz = \frac{1}{4}\rho\pi R^4 l + \frac{1}{12}\rho\pi R^2 l^3.$$

En función de la masa del cilindro,

$$I_{(\text{eje } x)} = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2.$$

Debido a la simetría del cilindro,

$$I_{(\text{eje } y)} = I_{(\text{eje } x)}.$$

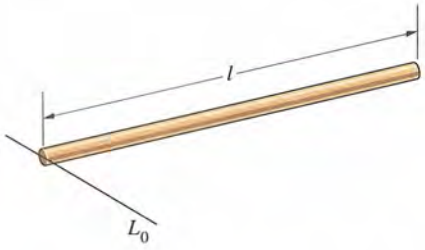
COMENTARIO

Cuando el cilindro es muy largo en comparación con su ancho, $l \gg R$, el primer término en la ecuación para $I_{(\text{eje } x)}$ se puede ignorar y obtenemos el momento de inercia de masa de una barra esbelta respecto a un eje perpendicular, Ec. (7.35). Por otra parte, cuando el radio del cilindro es mucho mayor que su longitud, $R \gg l$, el segundo término en la ecuación para $I_{(\text{eje } x)}$ se puede ignorar y obtenemos el momento de inercia para un disco delgado circular respecto a un eje paralelo al disco. Esto indica la magnitud de los términos que se ignoran cuando se usan las expresiones aproximadas para los momentos de inercia de una barra "esbelta" y de un disco "delgado".

Problemas

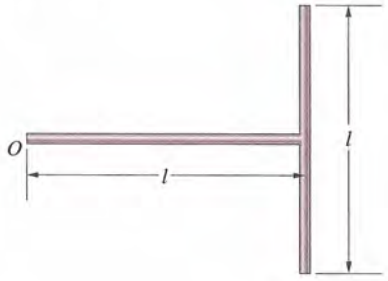
7.70 La barra esbelta homogénea mostrada tiene masa m y longitud l. Use integración para determinar su momento de inercia de masa respecto al eje perpendicular L_0.

Estrategia: Siga el mismo procedimiento que usamos para obtener la Ec. (7.35). Sólo se requiere cambiar los límites de integración.



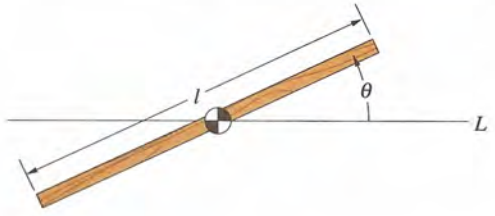
P7.70

7.71 Dos barras esbeltas homogéneas, cada una con masa m y longitud l, están soldadas para formar el cuerpo en forma de T. Use integración para determinar el momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje que pasa por O y que es perpendicular a las barras.



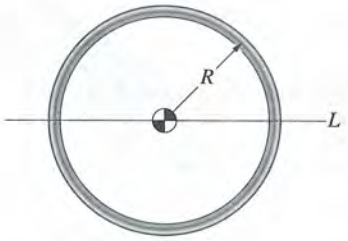
P7.71

7.72 La barra esbelta homogénea mostrada tiene masa m y longitud l. Use integración para determinar el momento de inercia de masa de la barra respecto al eje L.



P7.72

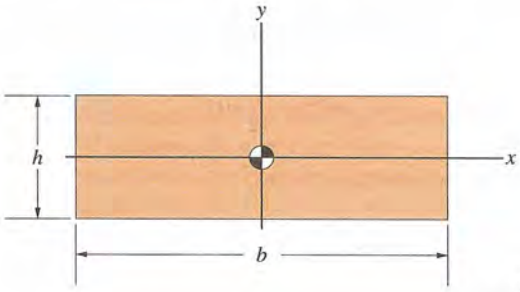
7.73 Con una barra esbelta homogénea se forma un anillo circular de masa m y radio R. Determine el momento de inercia de masa del anillo (a) respecto al eje que pasa por su centro de masa y que es perpendicular al anillo; (b) respecto al eje L.



P7.73

7.74 La placa delgada homogénea mostrada tiene espesor uniforme y masa m. Determine sus momentos de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z.

Estrategia: Los momentos de inercia de masa de una placa delgada de forma arbitraria están dados por las Ecs. (7.37) a (7.39) en función de los momentos de inercia del área de la sección transversal de la placa. En el Ap. B se pueden obtener los momentos de inercia del área rectangular.



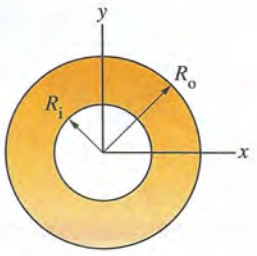
P7.74

7.75 La arandela de bronce mostrada tiene espesor uniforme y masa m.

(a) Determine sus momentos de inercia respecto a los ejes x y z.

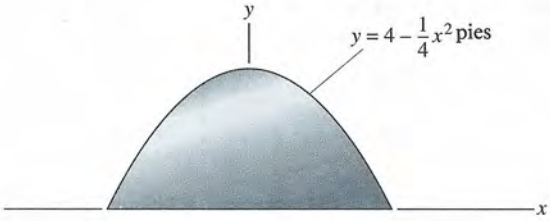
(b) Haga $R_i = 0$ y compare sus resultados con los valores dados en el Ap. C para una placa delgada circular.

(c) Haga $R_i \rightarrow R_o$, y compare sus resultados con las soluciones del Prob. 7.73.



P7.75

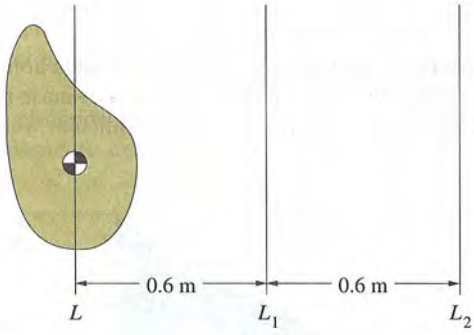
7.76 La placa delgada homogénea de la figura tiene espesor uniforme y pesa 20 lb. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje y.



P7.76

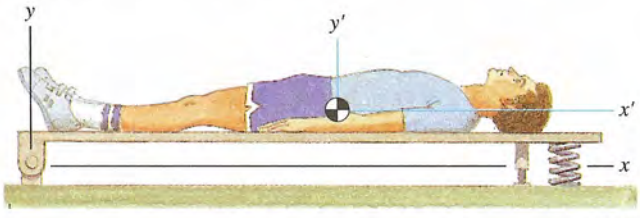
7.77 Determine el momento de inercia de masa de la placa del Prob. 7.76 respecto al eje x.

7.78 La masa del cuerpo mostrado es de 10 kg. Su momento de inercia de masa respecto a L_1 es de 10 kg-m^2. ¿Cuál es su momento de inercia de masa respecto a L_2? (Los tres ejes están en el mismo plano.)



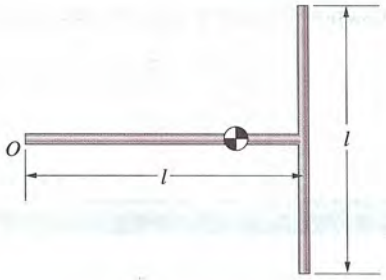
P7.78

7.79 Un ingeniero que está recabando datos para diseñar una unidad de maniobras determina que el centro de masa del astronauta está a $x = 1.01$ m, $y = 0.16$ m y que su momento de inercia de masa respecto al eje z es de 105.6 kg-m^2. Su masa es de 81.6 kg. ¿Cuál es su momento de inercia de masa respecto al eje z' que pasa por su centro de masa?



P7.79

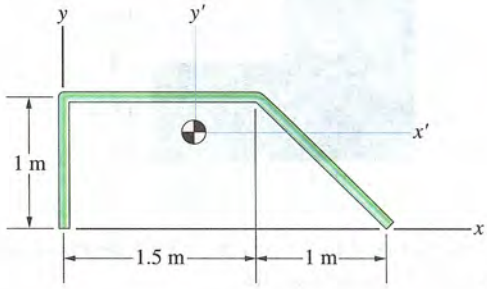
7.80 Dos barras esbeltas homogéneas, cada una de masa m y longitud l, están soldadas entre sí formando un cuerpo en forma de T. Use el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje que pasa por O y que es perpendicular a las barras.



P7.80

7.81 Use el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de masa del cuerpo en forma de T del Prob. 7.80 respecto al eje que pasa por el centro de masa del cuerpo y que es perpendicular a las dos barras.

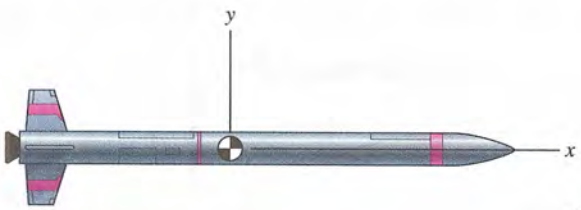
7.82 La masa de la barra esbelta homogénea mostrada es de 20 kg. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje z.



P7.82

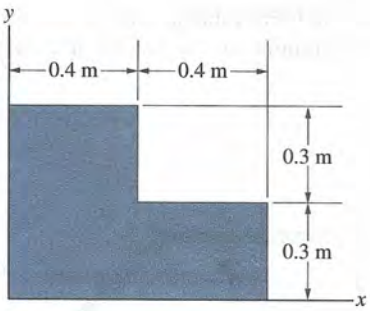
7.83 Determine el momento de inercia de masa de la barra del Prob. 7.82 respecto al eje z' que pasa por su centro de masa.

7.84 El peso del cohete y su momento de inercia de masa respecto al eje z que pasa por su centro de masa (incluido su combustible) son 10 000 lb y 10 200 slug-pie^2 respectivamente. El combustible pesa 6000 lb, su centro de masa está en $x = -3$ pies, $y = 0$, $z = 0$ y el momento de inercia de masa del combustible respecto al eje paralelo al eje z que pasa por el centro de masa del combustible es de 2200 slug-pie^2. Cuando el combustible se agota, ¿cuál es el momento de inercia de masa del cohete respecto al eje que pasa por su nuevo centro de masa paralelo al eje z?



P7.84

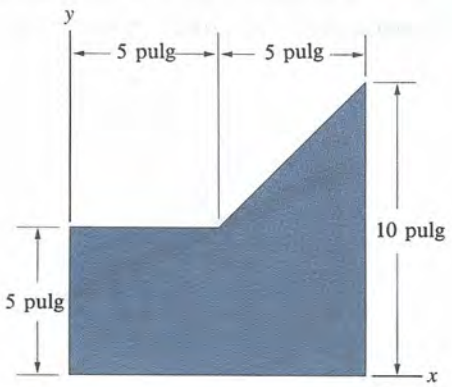
7.85 En la Fig. P7.85 la masa de la placa delgada homogénea es de 36 kg. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje x.



P7.85

7.86 Determine el momento de inercia de masa de la placa del Prob. 7.85 respecto al eje z.

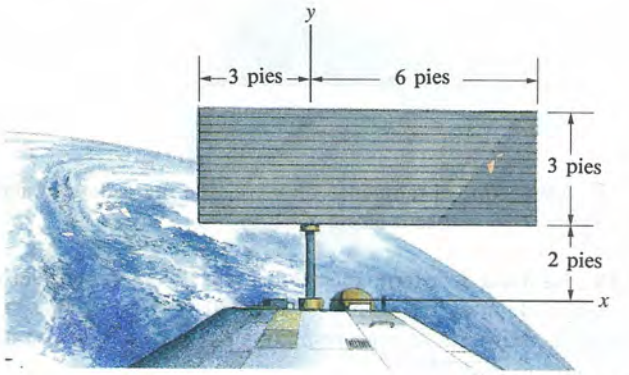
7.87 La placa delgada homogénea pesa 10 lb. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje x.



P7.87

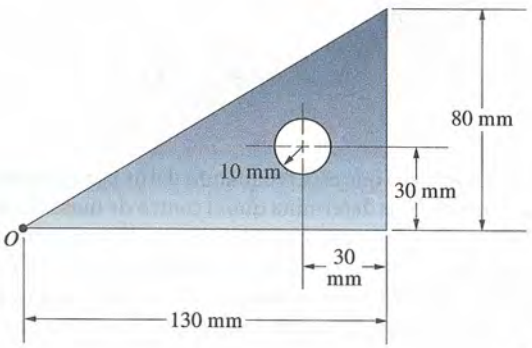
7.88 Determine el momento de inercia de masa de la placa del Prob. 7.87 respecto al eje y.

7.89 El radiador térmico mostrado (que sirve para eliminar el exceso de calor de un satélite) se puede modelar como una placa delgada rectangular homogénea. Su masa es de 5 slug. Determine su momento de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z.



P7.89

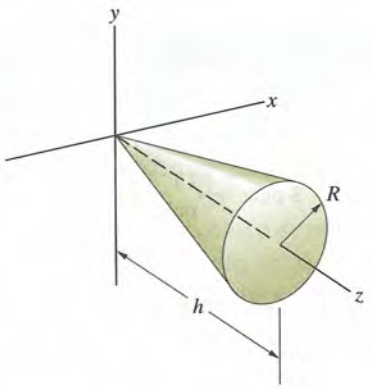
7.90 En la Fig. P7.90 la masa de la placa delgada homogénea es de 2 kg. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje que pasa por el punto O y es perpendicular a la placa.



P7.90

7.91 El cono homogéneo tiene masa m. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje z y compare su resultado con el valor dado en el Ap. C.

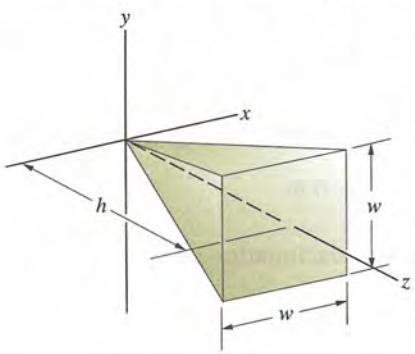
Estrategia: Use el mismo procedimiento que usamos en el Ej. 7.15 para obtener los momentos de inercia de un cilindro homogéneo.



P7.91

7.92 Determine los momentos de inercia de masa del cono homogéneo del Prob. 7.91 respecto a los ejes x y y, y compare sus resultados con los valores dados en el Ap. C.

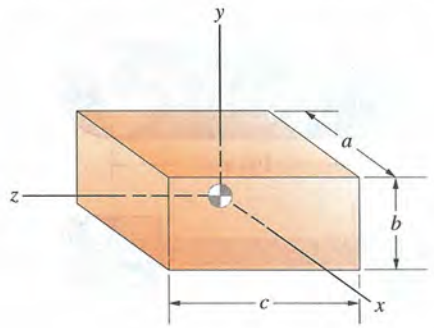
7.93 La pirámide homogénea mostrada tiene masa m. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje z.



P7.93

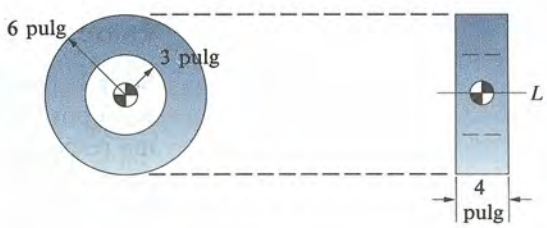
7.94 Determine los momentos de inercia de masa de la pirámide homogénea del Prob. 7.93 respecto a los ejes x y y.

7.95 El paralelepípedo rectangular homogéneo tiene masa m. Halle sus momentos de inercia de masa respecto a los ejes x, y, z y compárelos con los valores dados en el Ap. C.



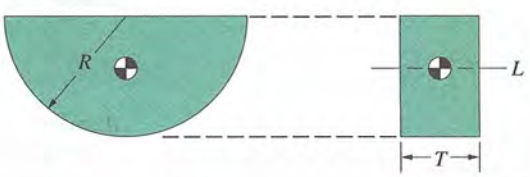
P7.95

7.96 El anillo homogéneo mostrado está hecho de acero con densidad $\rho = 15$ slug/pie^3. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje L que pasa por su centro de masa.



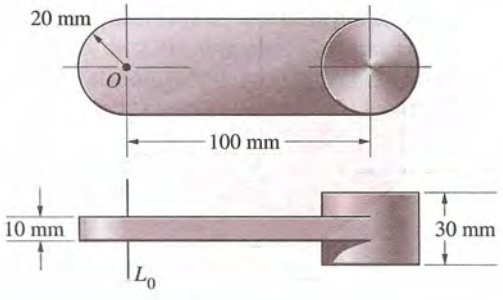
P7.96

7.97 El medio cilindro homogéneo mostrado tiene masa m. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje L que pasa por su centro de masa.



P7.97

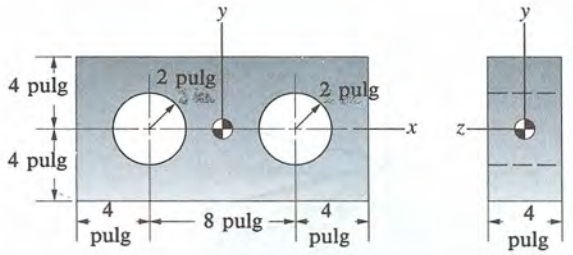
7.98 El cuerpo mostrado está hecho de acero con densidad $\rho = 7800$ kg/m^3. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje L_0 que pasa por O.



P7.98

7.99 Determine el momento de inercia de masa del cuerpo del Prob. 7.98 respecto al eje que pasa por el centro de masa del cuerpo y que es paralelo a L_0.

7.100 La placa de la figura está hecha de acero con densidad $\rho = 15$ slug/pie^3. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje z.



P7.100

7.101 Determine el momento de inercia de masa del cuerpo del Prob. 7.100 respecto al eje x.

Resumen del capítulo

Relaciones momento-momento angular

Sea $\mathbf{r}_i$ la posición de la i-ésima partícula de un sistema de partículas, y sea $\mathbf{R}_i$ su posición respecto al centro de masa. El momento angular del sistema respecto a un punto O es la suma de los momentos angulares de las partículas,

$$\mathbf{H}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \qquad \text{Ec. (7.7)}$$

donde $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$, y el momento angular respecto al centro de masa es

$$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{R}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \qquad \text{Ec. (7.8)}$$

Estos momentos angulares están relacionados por

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{H}, \qquad \text{Ec. (7.9)}$$

donde $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad del centro de masa.

El momento total respecto a un punto fijo O es igual a la razón de cambio del momento angular respecto a O:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt}. \qquad \text{Ec. (7.11)}$$

Este resultado también se puede expresar en función del momento angular respecto al centro de masa:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v} + \mathbf{H}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} + \frac{d\mathbf{H}}{dt}, \qquad \text{Ec. (7.12)}$$

donde **a** es la aceleración del centro de masa.

El momento total respecto al centro de masa es igual a la razón de cambio del momento angular respecto al centro de masa:

$$\Sigma \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt}. \qquad \text{Ec. (7.13)}$$

Ecuaciones del movimiento plano

Las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido en movimiento plano incluyen la segunda ley de Newton,

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}, \qquad \text{Ec. (7.21)}$$

donde **a** es la aceleración del centro de masa. Si el cuerpo rígido gira respecto a un eje fijo O, el momento total respecto a O es igual al producto del momento de inercia respecto a O por la aceleración angular:

$$\Sigma M_O = I_O\alpha. \qquad \text{Ec. (7.22)}$$

En cualquier movimiento plano, el momento total respecto al centro de masa es igual al producto del momento de inercia respecto al centro de masa por la aceleración angular:

$$\Sigma M = I\alpha. \qquad \text{Ec. (7.23)}$$

Si un cuerpo rígido está en traslación, la segunda ley de Newton es suficiente para determinar su movimiento. Sin embargo, puede necesitarse la ecuación de movimiento angular para determinar fuerzas o pares desconocidos. Como $\alpha = 0$, el momento total *respecto al centro de masa* es igual a cero. En el caso de rotación respecto a un eje fijo, la Ec.(7.22) es suficiente para determinar el movimiento rotatorio, aunque quizá se necesite la segunda ley de Newton para determinar fuerzas o pares desconocidos. Si un cuerpo rígido está sometido a movimiento plano general, se necesitan tanto dicha ley como la ecuación de movimiento angular.

Principio de D'Alembert

Escribiendo la segunda ley de Newton como

$$\Sigma \mathbf{F} + (-m\mathbf{a}) = 0, \qquad \text{Ec. (7.27)}$$

la cual se puede considerar como una ecuación de "equilibrio", que establece que la suma de las fuerzas externas, incluyendo una **fuerza inercial** $-m\mathbf{a}$, es cero. La ecuación del movimiento angular se puede escribir como

$$\Sigma M_O + [\mathbf{r} \times (-m\mathbf{a})] \cdot \mathbf{k} + (-I\alpha) = 0, \qquad \text{Ec. (7.28)}$$

que establece que la suma de los momentos respecto a *cualquier punto* debido a fuerzas y pares externos, incluyendo el momento debido a la fuerza inercial $-m\mathbf{a}$ que actúa en el centro de masa y a un **par inercial** $-I\alpha$, es cero. Expresadas de esta manera, las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido son análogas a las ecuaciones de equilibrio estático.

Momentos de inercia

El momento de inercia de masa de un cuerpo respecto a un eje L_0 es

$$I_0 = \int_m r^2 dm, \qquad \text{Ec. (7.34)}$$

r es la distancia perpendicular de L_0 al elemento diferencial de masa dm.

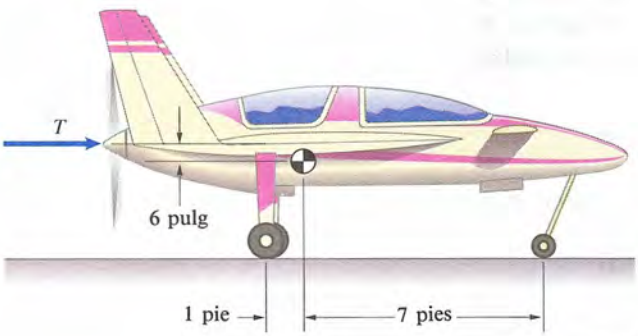
Sea L un eje a través del centro de masa de un cuerpo, y sea L_0 un eje paralelo. El momento de inercia de masa I_0 respecto a L_0 está dado en función del momento de inercia de masa I respecto a L por el **teorema de los ejes paralelos**

$$I_0 = I + d^2 m, \qquad \text{Ec. (7.42)}$$

donde m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre L y L_0.

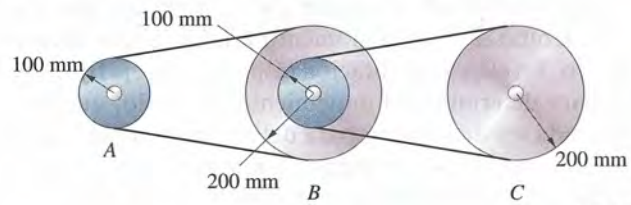
Problemas de repaso

7.102 El avión mostrado está en el inicio de su carrera de despegue. Su peso es de 1000 lb, y el empuje inicial T ejercido por su motor es de 300 lb. Suponga que el empuje es horizontal, e ignore las fuerzas tangenciales ejercidas sobre sus ruedas. (a) Si la aceleración del avión permanece constante, ¿cuánto tarda en alcanzar su velocidad de despegue de 80 mi/h? (b) Determine la fuerza normal ejercida sobre la rueda delantera al inicio de la carrera de despegue.



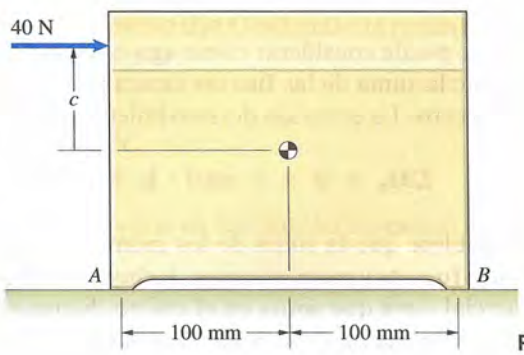
P7.102

7.103 Las poleas mostradas pueden girar libremente sobre sus soportes de pasador. Sus momentos de inercia de masa son $I_A = 0.002$ kg-m^2, $I_B = 0.036$ kg-m^2, $I_C = 0.032$ kg-m^2. Están inicialmente en reposo y en $t = 0$ se aplica a la polea A un par constante $M = 2$ N-m. ¿Cuál es la velocidad angular de la polea C y cuántas revoluciones ha girado en $t = 2$ s?



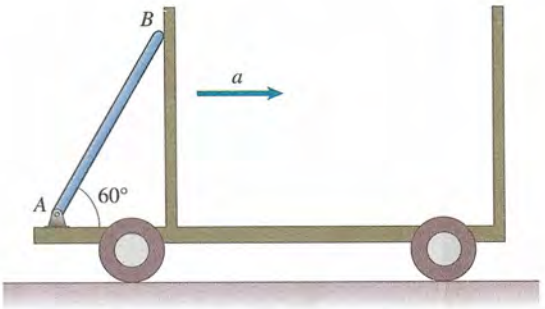
P7.103

7.104 Una caja de 2 kg está sometida a una fuerza horizontal de 40 N. Ignore la fricción. (a) Si la caja permanece sobre el piso, ¿cuál es su aceleración? (b) Determine el intervalo de valores de c para los cuales la caja permanecerá sobre el piso cuando se aplique la fuerza.



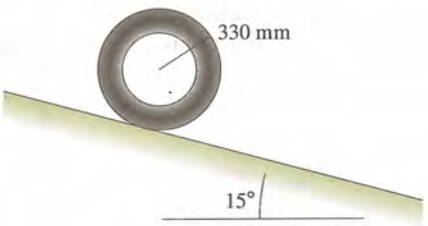
P7.104

7.105 La barra esbelta AB de 2 slug tiene 3 pies de longitud. Está articulada al carro en A y se apoya sobre él en B.
(a) Si la aceleración del carro es $a = 20$ pie/s^2, ¿qué fuerza normal ejerce el carro sobre la barra en B?
(b) ¿Cuál es la aceleración máxima a para la cual la barra permanecerá en contacto con la superficie en B?



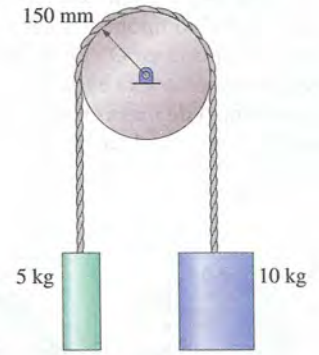
P7.105

7.106 Para determinar el momento de inercia de masa de un neumático de 4.5 kg, un ingeniero lo deja rodar sobre una superficie inclinada. Si tarda 3.5 s en rodar 3 m partiendo del reposo, ¿cuál es el momento de inercia de masa del neumático respecto a su centro de masa?



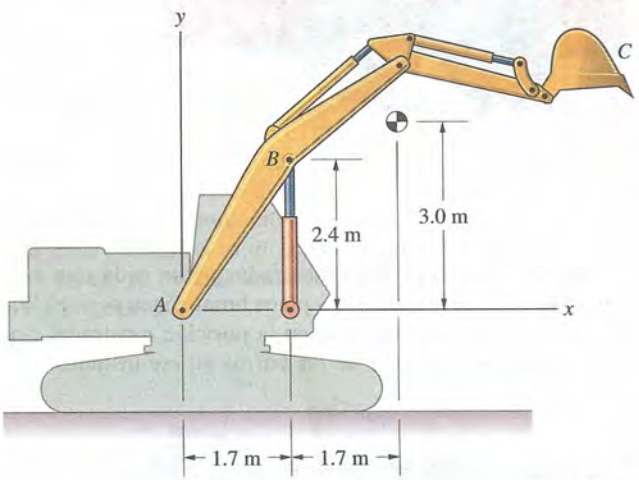
P7.106

7.107 El momento de inercia de masa del disco mostrado es de 0.2 kg-m^2. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática mínimo entre la cuerda y el disco para el cual la cuerda no resbalará cuando el sistema se libere del reposo?



P7.107

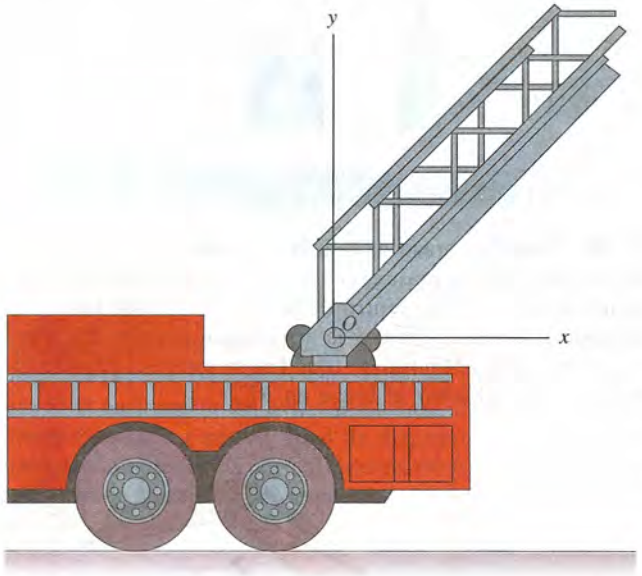
7.108 Modele el brazo ABC de la excavadora mostrada como un cuerpo rígido. Su masa es de 1200 kg, y el momento de inercia de masa respecto a su centro de masa es $I = 3600$ kg-m^2. Si el punto A está en reposo y la aceleración angular del brazo es de 1.0 rad/s^2 antihoraria, ¿qué fuerza ejerce el cilindro hidráulico vertical sobre el brazo en B?



P7.108

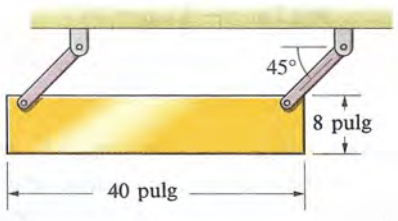
7.109 En el Prob. 7.108, si la aceleración angular del brazo ABC es de 1.0 rad/s^2 antihoraria y su velocidad angular es de 2.0 rad/s antihoraria, ¿cuáles son las componentes de la fuerza ejercida sobre el brazo en A?

7.110 Para reducir el ángulo de elevación de la escalera fija de 200 kg de la figura, los engranes que la elevan se desacoplan y una fracción de segundo después un segundo conjunto de engranes que la bajan se acoplan. En el instante en que los engranes que la elevan se desacoplan, ¿cuál es la aceleración angular de la escalera y cuáles son las componentes de la fuerza ejercida sobre la escalera por su soporte en O? El momento de inercia de masa de la escalera respecto a O es $I_0 = 14\,000$ kg-m^2, y las coordenadas de su centro de masa en el instante en que los engranes se desacoplan son $\bar{x} = 3$ m, $\bar{y} = 4$ m.



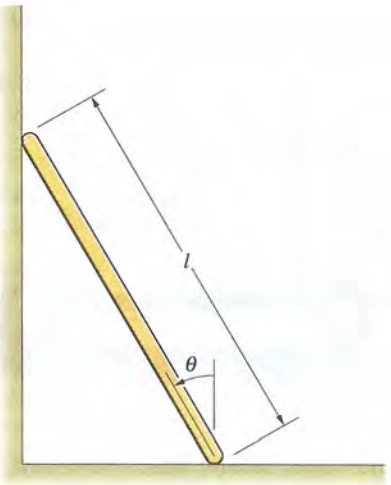
P7.110

7.111 Las barras esbeltas mostradas pesan cada una 4 lb y tienen 10 pulg de longitud. La placa homogénea pesa 10 lb. Si el sistema se libera del reposo en la posición mostrada, ¿cuál es la aceleración angular de las barras en ese instante?



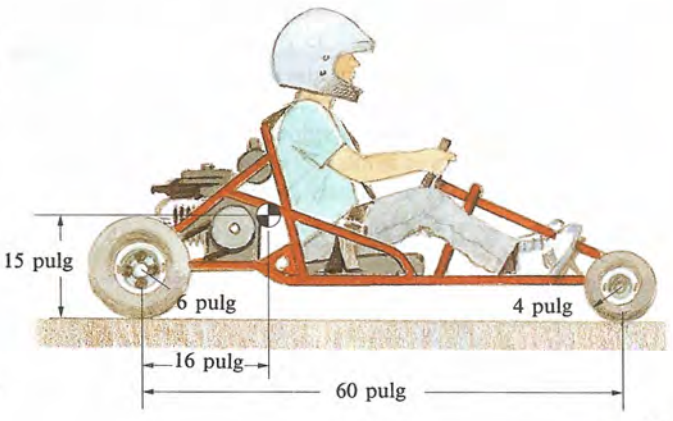
P7.111

7.112 Una barra esbelta de masa m se libera del reposo en la posición mostrada. Los coeficientes estático y cinético de fricción en el piso y la pared tienen el mismo valor μ. Si la barra resbala, ¿cuál es su aceleración angular en el instante en que se libera?



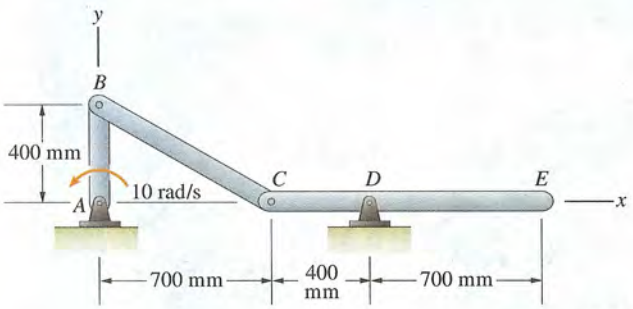
P7.112

7.113 Cada una de las ruedas frontales del vehículo mostrado pesa 5 lb y tiene un momento de inercia de masa de 0.01 slug-pie^2. Las dos ruedas traseras y el eje trasero forman un cuerpo libre que pesa 40 lb y tiene un momento de inercia de masa de 0.1 slug-pie^2. El peso total del vehículo y el conductor es de 240 lb (se muestra la posición del centro de masa del vehículo y el conductor *sin incluir* las ruedas frontales, las ruedas traseras o el eje trasero). Si el motor ejerce un par de 12 pie-lb sobre el eje trasero, ¿cuál es la aceleración del vehículo?



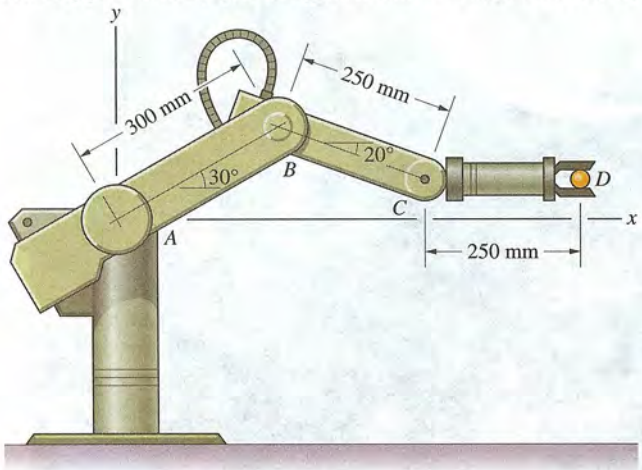
P7.113

7.114 La barra AB gira con velocidad angular constante de 10 rad/s en dirección antihoraria. Las masas de BC y CDE son 2 kg y 3.6 kg respectivamente. El eje y señala hacia arriba. Determine las componentes de las fuerzas ejercidas por los pasadores en B y C sobre la barra BC en el instante mostrado.



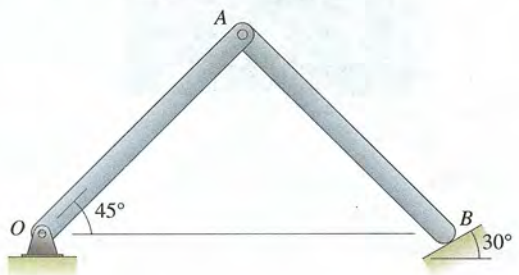
P7.114

7.115 En el instante mostrado, los brazos del robot tienen velocidades angulares constantes antihorarias $\omega_{AB} = -0.5$ rad/s, $\omega_{BC} = 2$ rad/s y $\omega_{CD} = 4$ rad/s. La masa del brazo CD es de 10 kg, y su centro de masa está en su punto medio. En este instante, ¿qué fuerza y par se ejercen sobre el brazo CD en C?



P7.115

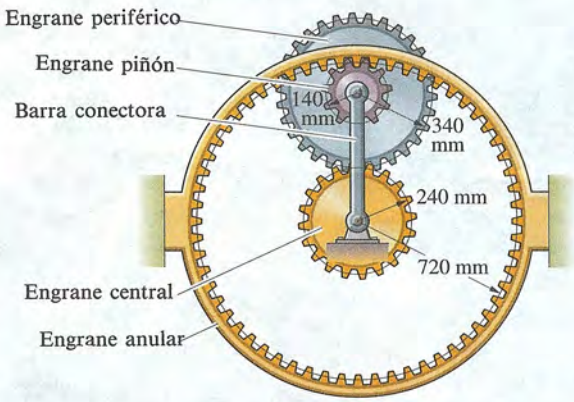
7.116 En la Fig. P7.116 cada barra tiene 1 m de longitud y masa de 4 kg. La superficie inclinada es lisa. Si el sistema se libera del reposo en la posición mostrada, ¿cuáles son las aceleraciones angulares de las barras en ese instante?



P7.116

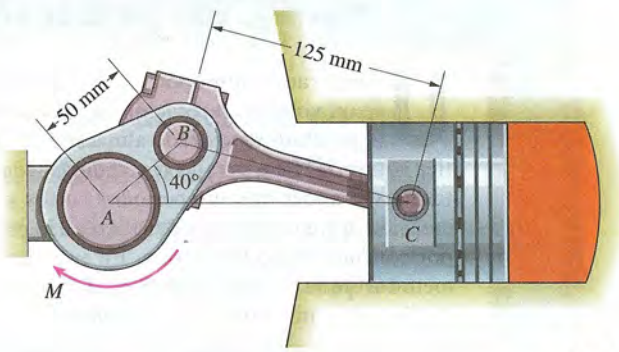
7.117 En el instante en que se libera el sistema del Prob. 7.116, ¿cuál es la magnitud de la fuerza ejercida sobre la barra OA por el soporte en O?

7.118 El engrane anular fijo está *en un plano horizontal*. Los engranes piñón y periférico están unidos. La masa y el momento de inercia de masa de los engranes piñón y periférico combinados son $m_{PH} = 130$ kg e $I_{PH} = 130$ kg-m^2. El momento de inercia de masa del engrane central es $I = 60$ kg-m^2. La masa de la barra conectora es de 5 kg y se puede idealizar como una barra esbelta. Si se aplica al engrane central un par antihorario de 1 kN-m, ¿cuál es la aceleración angular resultante en los engranes piñón y periférico unidos?



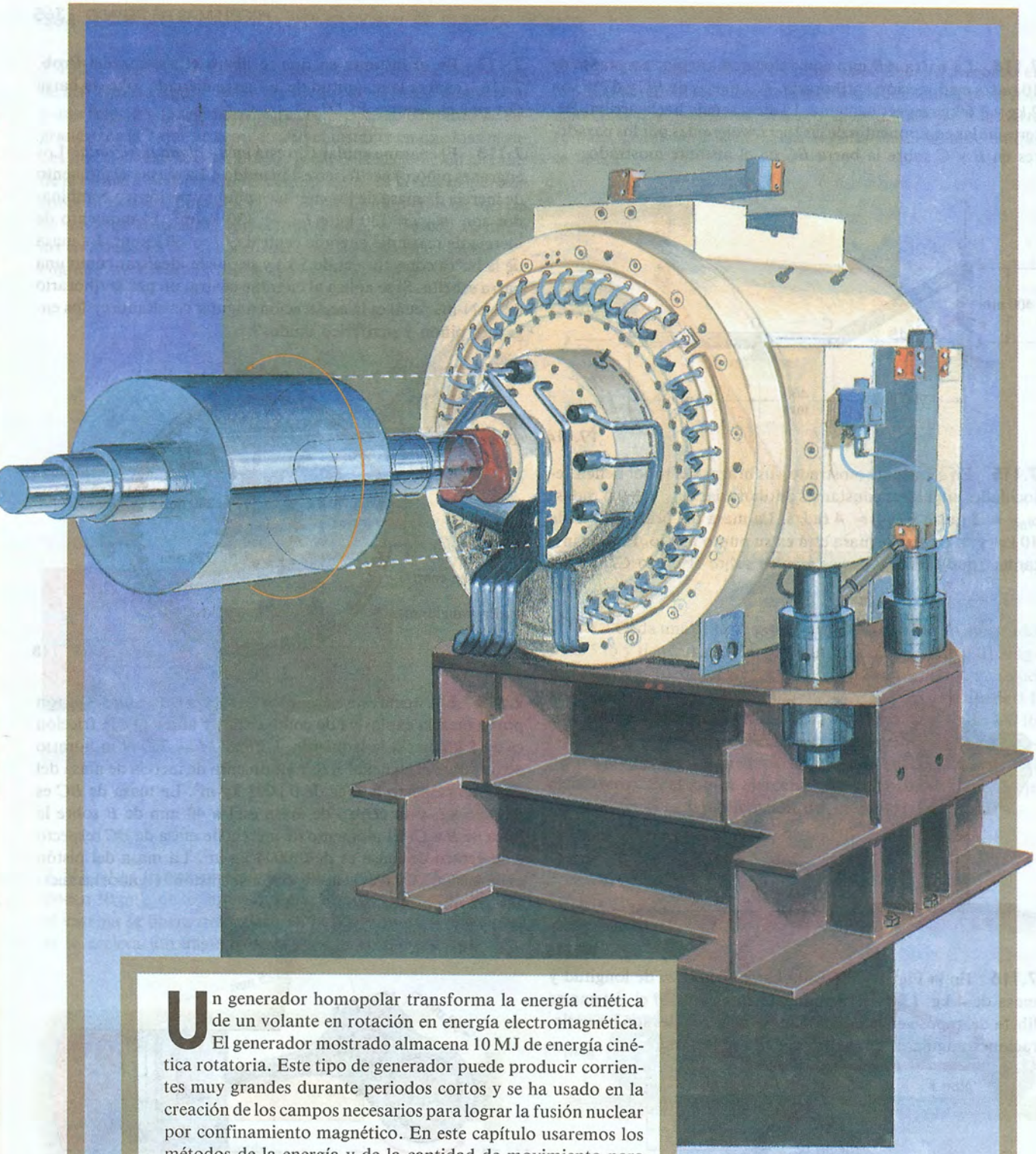
P7.118

7.119 El sistema está en reposo. La fuerza neta sobre el pistón por la mezcla explosiva de combustible y aire y por la fricción es de 5 kN hacia la izquierda. Un par $M = 200$ N-m horario actúa sobre el cigüeñal AB. El momento de inercia de masa del cigüeñal respecto a A es de 0.0003 kg-m^2. La masa de BC es de 0.36 kg, y su centro de masa está a 40 mm de B sobre la línea de B a C. El momento de inercia de masa de BC respecto a su centro de masa es de 0.0004 kg-m^2. La masa del pistón es de 4.6 kg. ¿Cuál es la aceleración del pistón? (Ignore las fuerzas gravitatorias.)



P7.119

7.120 Si el cigüeñal AB del Prob. 7.119 tiene una velocidad angular antihoraria de 2000 rpm en el instante mostrado, ¿cuál es la aceleración del pistón?



Un generador homopolar transforma la energía cinética de un volante en rotación en energía electromagnética. El generador mostrado almacena 10 MJ de energía cinética rotatoria. Este tipo de generador puede producir corrientes muy grandes durante periodos cortos y se ha usado en la creación de los campos necesarios para lograr la fusión nuclear por confinamiento magnético. En este capítulo usaremos los métodos de la energía y de la cantidad de movimiento para analizar movimientos bidimensionales de cuerpos rígidos.

Capítulo 8

Energía y cantidad de movimiento en la dinámica plana de cuerpos rígidos

EN los capítulos 4 y 5 hemos visto que los métodos de la energía y de la cantidad de movimiento son muy útiles para resolver ciertos tipos de problemas de dinámica. Si las fuerzas sobre un cuerpo se conocen como funciones de la posición, se puede usar el principio del trabajo y la energía para relacionar el cambio en la magnitud de la velocidad del cuerpo con el cambio en su posición. Si las fuerzas se conocen como funciones del tiempo, se puede usar el principio del impulso y la cantidad de movimiento para determinar el cambio en la velocidad del cuerpo durante un intervalo de tiempo. En este capítulo ampliamos esos métodos a los casos en que se deben considerar los movimientos traslacionales y rotatorios de los cuerpos.

8.1 *Principio del trabajo y la energía*

El principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido en movimiento plano es un enunciado simple e implica ecuaciones sencillas, aunque la deducción de éstas es algo complicada. Como ayuda en la deducción, empezaremos resumiendo el principio. Sea T la energía cinética de un cuerpo rígido. El principio del trabajo y la energía establece que el trabajo U hecho por fuerzas y pares externos al moverse el cuerpo rígido entre dos posiciones 1 y 2 es igual al cambio en su energía cinética:

$$U = T_2 - T_1.$$

En el movimiento plano general la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

donde v es la magnitud de la velocidad del centro de masa e I es el momento de inercia de masa respecto al centro de masa. En el caso de una rotación alrededor de un eje fijo O, la energía cinética también se puede expresar como

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2.$$

Para deducir estos resultados, adoptamos el mismo enfoque usado en el Cap. 7 para deducir las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido. Obtenemos el principio del trabajo y la energía para un sistema de partículas y los usamos para obtener el principio para un cuerpo rígido.

Sistema de partículas

Sea m_i la masa de la i-ésima partícula de un sistema de N partículas, y sea $\mathbf{r}_i$ su posición respecto a un punto de referencia O fijo (Fig. 8.1). Denotamos con T la suma de las energías cinéticas de las partículas,

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i, \tag{8.1}$$

donde $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ es la velocidad de la i-ésima partícula. Nuestro objeti-

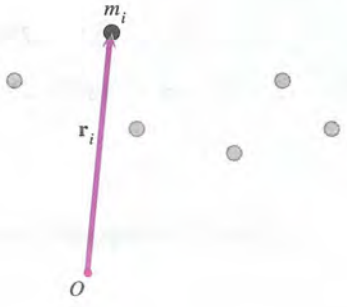


Figura 8.1
Sistema de partículas. El vector $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la i-ésima partícula.

vo es relacionar el trabajo realizado sobre el sistema con el cambio en T. Comenzamos con la segunda ley de Newton para la i-ésima partícula,

$$\sum_j \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i^{\mathrm{E}} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i), \tag{8.2}$$

donde $\mathbf{f}_{ij}$ es la fuerza que ejerce la j-ésima partícula sobre la i-ésima partícula y $\mathbf{f}_i^{\mathrm{E}}$ es la fuerza externa sobre la i-ésima partícula. Formamos el producto escalar de esta ecuación con $\mathbf{v}_i$ y sumamos de $i = 1$ a N:

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{f}_i^{\mathrm{E}} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i). \tag{8.3}$$

Podemos expresar el término del lado derecho de esta ecuación como la razón de cambio de la energía cinética total:

$$\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \frac{dT}{dt}.$$

Por tanto, multiplicando la Ec. (8.3) por dt se obtiene

$$\sum_i \sum_j \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i^{\mathrm{E}} \cdot d\mathbf{r}_i = dT.$$

Integramos esta ecuación y obtenemos

$$\sum_i \sum_j \int_{(\mathbf{r}_i)_1}^{(\mathbf{r}_i)_2} \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_i \int_{(\mathbf{r}_i)_1}^{(\mathbf{r}_i)_2} \mathbf{f}_i^{\mathrm{E}} \cdot d\mathbf{r}_i = T_2 - T_1.$$

Los términos del primer miembro son el trabajo que efectúan las fuerzas internas y externas sobre el sistema cuando las partículas se mueven de las posiciones $(\mathbf{r}_i)_1$ a $(\mathbf{r}_i)_2$. Así, obtenemos el **principio del trabajo y la energía para un sistema de partículas:** el trabajo U efectuado por las fuerzas internas y externas es igual al cambio en la energía cinética total:

$$\boxed{U = T_2 - T_1.} \tag{8.4}$$

Este resultado se aplica a cualquier cuerpo o colección de cuerpos, incluyendo un cuerpo rígido.

Cuerpo rígido en movimiento plano

Hemos demostrado que el trabajo realizado por fuerzas internas y externas sobre un cuerpo rígido cuando se mueve entre dos posiciones es igual al cambio en su energía cinética. Si las fuerzas internas entre cada par de partículas están dirigidas a lo largo de la recta que las une, *el trabajo que realizan las fuerzas internas sobre un cuerpo rígido es cero*. Para demostrar esto, consideremos en un cuerpo rígido dos partículas 1 y 2 (Fig. 8.2). La suma de las fuerzas que ejercen entre sí es cero, $\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21} = \mathbf{0}$, por lo que la razón a la que las fuerzas efectúan trabajo (la potencia) es

$$\mathbf{f}_{12} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{f}_{21} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{f}_{21} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).$$

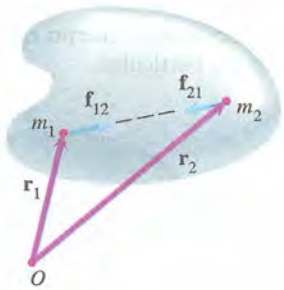


Figura 8.2

Las partículas 1 y 2 y las fuerzas que ejercen entre sí.

Podemos demostrar que $\mathbf{f}_{21}$ es perpendicular a $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, y la razón a la que las fuerzas internas efectúan trabajo entre las partículas es cero. Como estas últimas son puntos de un cuerpo rígido, podemos expresar su velocidad relativa en función de la velocidad angular ω del cuerpo como

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \omega \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{8.5}$$

Esto muestra que la velocidad relativa $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ es perpendicular a $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, que es el vector de posición de la partícula 1 a la 2. Como $\mathbf{f}_{21}$ es paralela a $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, es perpendicular a $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Podemos razonar igual para cada par de partículas del cuerpo rígido y ver que la razón total a la que efectúan trabajo las fuerzas internas es cero. Esto implica que el trabajo que realizan cuando el cuerpo se mueve entre dos posiciones es cero.

El sistema de fuerzas externas se puede representar como fuerzas y pares, y obtenemos el **principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido:** el trabajo efectuado por fuerzas y pares externos cuando un cuerpo rígido se mueve es igual al cambio en su energía cinética. También podemos establecer este principio para un sistema de cuerpos rígidos: el trabajo efectuado por fuerzas y pares externos *e internos* cuando un sistema de cuerpos rígidos se mueve es igual al cambio en su energía cinética total.

Para completar la deducción del principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido en movimiento plano, debemos expresar la energía cinética en función de la velocidad del centro de masa del cuerpo rígido y de su velocidad angular. Primero consideraremos un movimiento plano general y luego la rotación alrededor de un eje fijo.

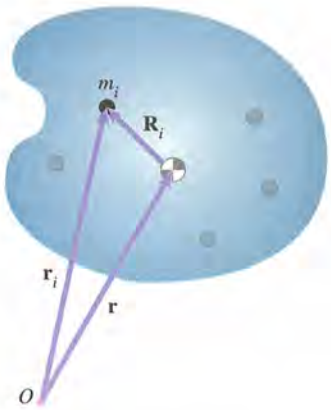


Figura 8.3

Representación de un cuerpo rígido como un sistema de partículas.

Energía cinética en el movimiento plano general Representemos un cuerpo rígido como un sistema de partículas, y sea $\mathbf{R}_i$ el vector de posición de la i-ésima partícula respecto al centro de masa (Fig. 8.3). La posición del centro de masa es

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m}, \tag{8.6}$$

donde m es la masa del cuerpo rígido. La posición de la i-ésima partícula respecto a O está relacionada con su posición respecto al centro de masa por

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \mathbf{R}_i, \tag{8.7}$$

y los vectores $\mathbf{R}_i$ satisfacen la relación

$$\sum_i m_i \mathbf{R}_i = \mathbf{0}. \tag{8.8}$$

La energía cinética del cuerpo rígido es la suma de las energías cinéticas de sus partículas, dada por la Ec. (8.1):

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i. \tag{8.9}$$

Derivando con respecto al tiempo la Ec. (8.7) obtenemos

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{R}_i}{dt},$$

donde **v** es la velocidad del centro de masa. Sustituyendo esta expresión en la Ec. (8.9) y usando la Ec. (8.8), obtenemos la energía cinética en la forma

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{R}_i}{dt}, \tag{8.10}$$

donde v es la magnitud de la velocidad del centro de masa.

Sea L_0 el eje que pasa por un punto fijo O perpendicular al plano del movimiento, y L el eje paralelo por el centro de masa (Fig. 8.4a). En este sistema coordenado podemos expresar el vector de velocidad angular como $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$. La velocidad de la i-ésima partícula respecto al centro de masa es $d\mathbf{R}_i/dt = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i$, por lo que podemos escribir la Ec. (8.10) como

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left[\sum_i m_i(\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i)\right]\omega^2. \tag{8.11}$$

La magnitud del vector $\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i$ es la distancia perpendicular r_i de L a la i-ésima partícula (Fig. 8.4b), por lo que el término entre corchetes en la Ec. (8.11) es el momento de inercia de masa respecto a L:

$$\sum_i m_i(\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i) = \sum_i m_i|\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i|^2 = \sum_i m_i r_i^2 = I.$$

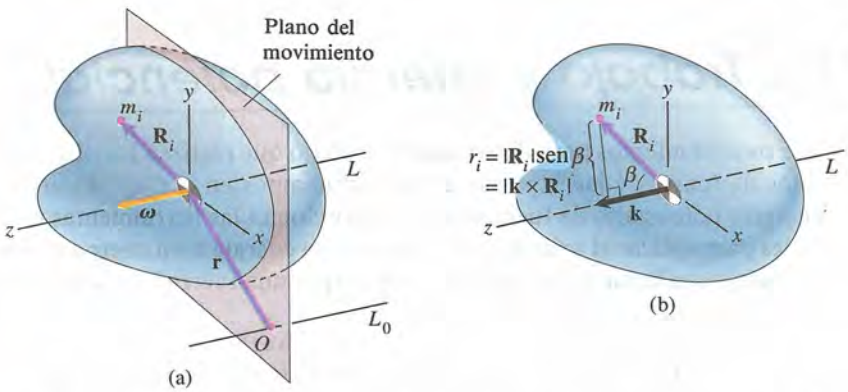


Figura 8.4
(a) Sistema coordenado con el eje z alineado con L.
(b) La magnitud de $\mathbf{k} \times \mathbf{R}_i$ es la distancia perpendicular de L a m_i.

Así, obtenemos la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano general en la forma

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.} \tag{8.12}$$

La energía cinética consiste en dos términos: la **energía cinética traslacional,** expresada en función de la velocidad del centro de masa, y la **energía cinética rotatoria** (Fig. 8.5).

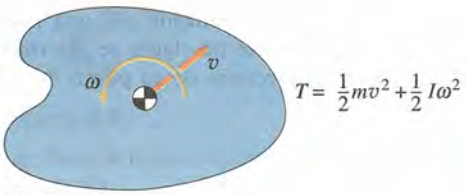


Figura 8.5
Energía cinética en movimiento plano general.

Energía cinética en la rotación con un eje fijo Un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo está en movimiento plano general, y su energía cinética está dada por la Ec. (8.12). Hay otra expresión para la energía cinética que suele ser útil en algunos casos. Supongamos que un cuerpo rígido gira con velocidad angular ω respecto a un eje fijo O. En función

de la distancia d de O al centro de masa, la velocidad del centro de masa es $v = \omega d$ (Fig. 8.6a). Según la Ec. (8.12), la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(\omega d)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I + d^2m)\omega^2.$$

De acuerdo con el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia de masa respecto a O es $I_0 = I + d^2m$, por lo que obtenemos la energía cinética de un cuerpo rígido girando respecto a un eje fijo O en la forma (Fig. 8.6b)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}I_0\omega^2.} \tag{8.13}$$

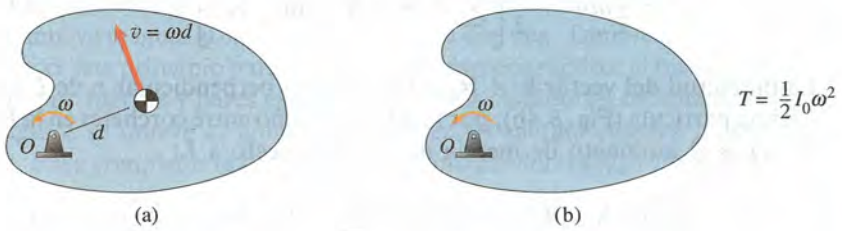


Figura 8.6
(a) Velocidad del centro de masa. (b) Energía cinética de un cuerpo rígido girando alrededor de un eje fijo.

8.2 *Trabajo y energía potencial*

Los procedimientos para determinar el trabajo que realizan los diferentes tipos de fuerzas y las expresiones que estudiamos en el Cap. 4 para las energías potenciales de fuerzas, nos proporcionan las herramientas esenciales para aplicar el principio del trabajo y la energía a un cuerpo rígido. El trabajo realizado sobre un cuerpo rígido por una fuerza $\mathbf{F}$ está dado por

$$\boxed{U = \int_{(\mathbf{r}_p)_1}^{(\mathbf{r}_p)_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_p,} \tag{8.14}$$

donde $\mathbf{r}_p$ es la posición del *punto de aplicación* de $\mathbf{F}$ (Fig. 8.7). Si el punto de aplicación está fijo, o si la dirección de su movimiento es perpendicular a $\mathbf{F}$, no se efectúa trabajo.

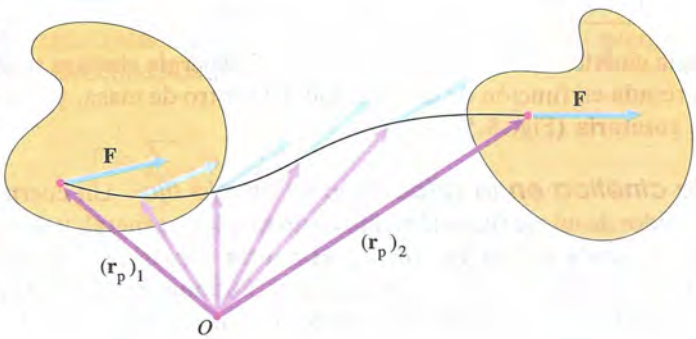


Figura 8.7
El trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo rígido se determina por la trayectoria de su punto de aplicación.

Una fuerza **F** es conservativa si existe una energía potencial V tal que

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_p = -dV. \tag{8.15}$$

En función de V, el trabajo efectuado por una fuerza conservativa **F** es

$$U = \int_{(\mathbf{r}_p)_1}^{(\mathbf{r}_p)_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_p = \int_{V_1}^{V_2} -dV = V_1 - V_2,$$

donde V_1 y V_2 son los valores de V en $(\mathbf{r}_p)_1$ y $(\mathbf{r}_p)_2$.

Si un cuerpo rígido está sometido a un par M (Fig. 8.8a), ¿qué trabajo se efectúa cuando se mueve entre dos posiciones? Podemos evaluar el trabajo representando el par por fuerzas (Fig. 8.8b) y determinando el trabajo que efectúan. Si el cuerpo gira un ángulo $d\theta$ en la dirección del par (Fig. 8.8c), el trabajo que realiza cada fuerza es $(\frac{1}{2}Dd\theta)F$, y el trabajo total es $DFd\theta = Md\theta$. Integrando esta expresión obtenemos el trabajo efectuado por un par M al girar el cuerpo de θ_1 a θ_2 en la dirección de M:

$$\boxed{U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta.} \tag{8.16}$$

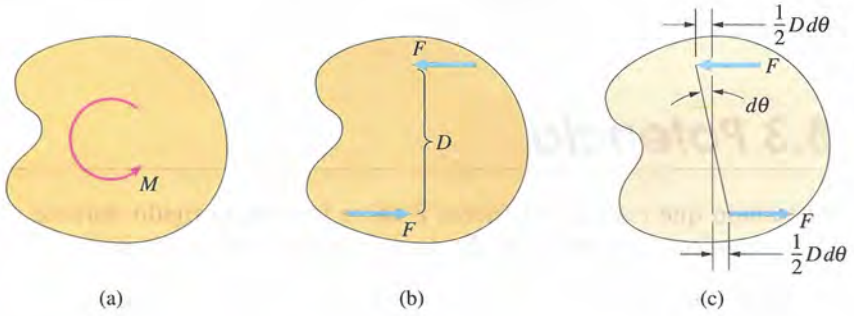


Figura 8.8
(a) Cuerpo rígido sometido a un par.
(b) Par equivalente que consiste en dos fuerzas: $DF = M$.
(c) Determinación del trabajo realizado por las fuerzas.

Si M es constante entre θ_1 y θ_2, el trabajo es simplemente el producto del par por el desplazamiento angular:

$$U = M(\theta_2 - \theta_1). \qquad \textbf{Par constante}$$

Un par M es conservativo si existe una energía potencial V tal que

$$M\, d\theta = -dV. \tag{8.17}$$

Podemos expresar el trabajo efectuado por un par conservativo en función de su energía potencial:

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta = \int_{V_1}^{V_2} -dV = V_1 - V_2.$$

Por ejemplo, en la Fig. 8.9 un resorte torsional ejerce sobre una barra un par proporcional al ángulo de rotación de la barra: $M = -k\theta$. Como

$$M\, d\theta = -k\theta\, d\theta = -dV,$$

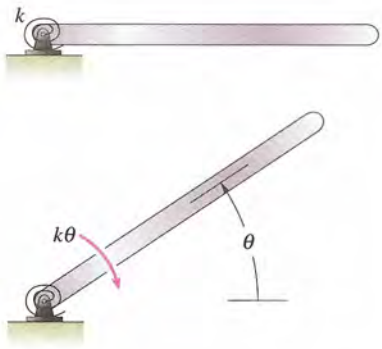


Figura 8.9
(a) Resorte torsional lineal conectado a una barra.
(b) El resorte ejerce un par de magnitud $k\theta$ en la dirección opuesta a la rotación de la barra.

vemos que la energía potencial debe satisfacer la relación

$$\frac{dV}{d\theta} = k\theta.$$

Integrando, vemos que la energía potencial del resorte torsional es

$$V = \frac{1}{2}k\theta^2. \tag{8.18}$$

Si *todos* los pares y fuerzas que trabajan sobre un cuerpo rígido son conservativos, podemos expresar el trabajo realizado al moverse entre las posiciones 1 y 2 en función de la energía potencial total de las fuerzas y pares:

$$U = V_1 - V_2.$$

Combinando esta relación con el principio del trabajo y la energía, concluimos que la suma de la energía cinética y la energía potencial total es constante (la energía se conserva):

$$\boxed{T + V = \text{constante.}} \tag{8.19}$$

8.3 *Potencia*

El trabajo que realiza una fuerza $\mathbf{F}$ sobre un cuerpo rígido durante un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}_p$ de su punto de aplicación es

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_p.$$

Obtenemos la potencia P transmitida al cuerpo rígido, es decir, la razón a la que se efectúa trabajo sobre él, dividiendo esta expresión entre el intervalo de tiempo dt durante el cual tiene lugar el desplazamiento:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_p, \tag{8.20}$$

donde $\mathbf{v}_p$ es la velocidad del punto de aplicación de $\mathbf{F}$.

De igual manera, el trabajo realizado por un par M sobre un cuerpo rígido en movimiento plano durante una rotación infinitesimal $d\theta$ en la dirección de M es

$$M\,d\theta.$$

Dividiendo esta expresión entre dt, la potencia transmitida al cuerpo rígido es el producto del par por la velocidad angular:

$$P = M\omega. \tag{8.21}$$

El trabajo total realizado sobre un cuerpo rígido durante un intervalo de tiempo es igual al cambio en su energía cinética, por lo que la potencia

total transmitida es igual a la razón de cambio de su energía cinética:

$$P = \frac{dT}{dt}.$$

El promedio con respecto al tiempo de la potencia durante un intervalo de tiempo de t_1 a t_2 es

$$P_{\text{media}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}.$$

Esta expresión muestra que la potencia media transmitida a un cuerpo rígido o desde él durante un intervalo de tiempo se puede determinar dividiendo el cambio en su energía cinética, o el trabajo total efectuado, entre el intervalo de tiempo:

$$P_{\text{media}} = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1} = \frac{U}{t_2 - t_1}. \tag{8.22}$$

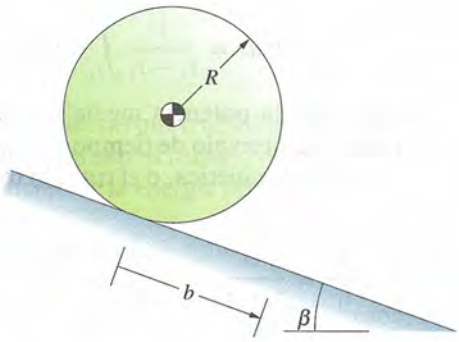
En los siguientes ejemplos usamos métodos energéticos para analizar movimientos de cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos. Se debe considerar el uso de los métodos energéticos cuando se quieren relacionar cambios en las velocidades traslacionales y rotatorias de un cuerpo con un cambio en su posición. Esto suele implicar tres pasos:

1. Identificar las fuerzas y los pares que trabajan. *Se deben usar diagramas de cuerpo libre para determinar qué fuerzas y pares externos trabajan.*
2. Aplicar el trabajo y la energía o la conservación de la energía. *Iguale el trabajo total efectuado durante un cambio de posición con el cambio en la energía cinética, o bien iguale la suma de las energías cinética y potencial en las dos posiciones.*
3. Determinar relaciones cinemáticas. *Para completar la solución se necesita a menudo relacionar la velocidad del centro de masa de un cuerpo rígido con su velocidad angular.*

Ejemplo 8.1

Un disco de masa m y momento de inercia I se libera del reposo sobre una superficie inclinada (Fig. 8.10). Suponiendo que rueda, ¿cuál es la velocidad del centro del disco cuando se ha desplazado una distancia b?

Figura 8.10



ESTRATEGIA

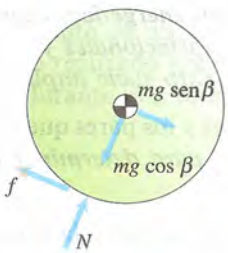
Podemos determinar la velocidad igualando el trabajo total efectuado al rodar el disco una distancia b con el cambio en su energía cinética.

SOLUCIÓN

Identificación de las fuerzas y los pares que efectúan trabajo Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del disco de la Fig. (a). El peso del disco efectúa trabajo al rodar, pero la fuerza normal N y la fuerza de fricción f no efectúan trabajo. Para ayudar a entender por qué la fuerza de fricción no trabaja, escribimos el trabajo efectuado por una fuerza $\mathbf{F}$ como

$$\int_{(\mathbf{r}_p)_1}^{(\mathbf{r}_p)_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_p = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}_p}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_p\, dt,$$

donde $\mathbf{v}_p$ es la velocidad del punto de aplicación de $\mathbf{F}$. Como la velocidad del punto en que f actúa es cero mientras el disco rueda, el trabajo efectuado por f es cero.



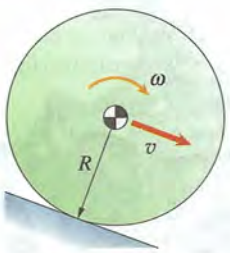
(a) Diagrama de cuerpo libre del disco.

Aplicación del trabajo y la energía Podemos determinar el trabajo efectuado por el peso multiplicando la componente en la dirección del movimiento del centro del disco por la distancia b:

$$U = (mg \text{ sen } \beta)b.$$

Si v y ω son la velocidad y la velocidad angular del centro del disco cuando éste se ha movido una distancia b (Fig. b), al igualar el trabajo con el cambio en la energía cinética del disco obtenemos

$$mgb \text{ sen } \beta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - 0. \tag{8.23}$$



(b) Velocidad del centro y velocidad angular cuando el disco se ha movido una distancia b.

Determinación de las relaciones cinemáticas La velocidad angular ω del disco en rodamiento está relacionada con la velocidad v por $\omega = v/R$. Sustituyendo esta relación en la Ec. (8.23) y despejando v, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{2gb \text{ sen } \beta}{1 + I/mR^2}}.$$

COMENTARIO

Supongamos que la superficie es lisa, por lo que el disco resbala en vez de rodar. En este caso, el disco no tiene velocidad angular y la Ec. (8.23) se convierte en

$$mgb \text{ sen } \beta = \frac{1}{2}mv^2 - 0,$$

y la velocidad del centro del disco es

$$v = \sqrt{2gb \text{ sen } \beta}.$$

La velocidad es mayor cuando el disco resbala. Se puede ver por qué al comparar las dos expresiones para el principio del trabajo y la energía. El trabajo efectuado por el peso del disco es el mismo en cada caso. Cuando el disco rueda, parte del trabajo incrementa la energía cinética traslacional del disco y parte incrementa su energía cinética rotatoria. Cuando el disco resbala, todo el trabajo incrementa su energía cinética traslacional.

Ejemplo 8.2

Cada rueda de la motocicleta en la Fig. 8.11 tiene masa $m_W = 9$ kg, radio $R = 330$ mm y momento de inercia $I = 0.8$ kg-m^2. La masa combinada del conductor y la motocicleta, sin incluir las ruedas, es $m_C = 142$ kg. La motocicleta parte del reposo y su motor ejerce un par constante $M = 140$ N-m sobre la rueda trasera. Suponga que las ruedas no resbalan.

(a) ¿Qué distancia horizontal b debe recorrer la motocicleta para alcanzar una velocidad de 25 m/s?

(b) ¿Cuál es la máxima potencia transmitida a la motocicleta por su motor durante el movimiento descrito en la parte (a)?

Figura 8.11

ESTRATEGIA

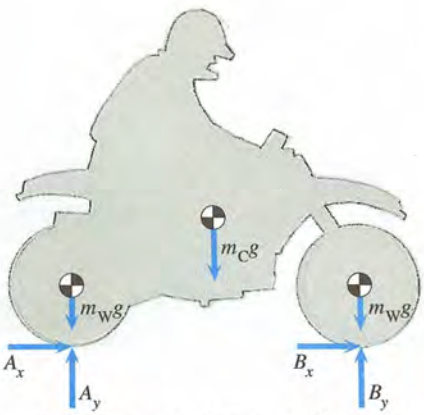
(a) Para determinar la distancia b podemos aplicar el principio del trabajo y la energía al sistema que consiste en el conductor, la motocicleta y las ruedas.

(b) La potencia transmitida por el par ejercido sobre la rueda trasera está dada por la Ec. (8.21). Para determinar la potencia máxima, debemos determinar la máxima velocidad angular de la rueda.

SOLUCIÓN

(a) La determinación de la distancia b por métodos energéticos requiere tres pasos.

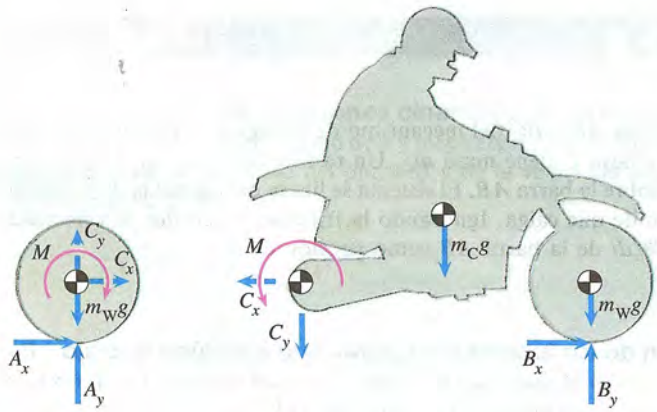
Identificación de las fuerzas y los pares que realizan trabajo En la Fig. (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre del sistema. Los pesos no trabajan porque el movimiento es horizontal, y las fuerzas ejercidas por el camino sobre las ruedas no trabajan porque la velocidad de sus puntos de aplicación es cero (véase el Ej. 8.1). Así pues, ¡ningún trabajo es realizado por fuerzas y pares externos! Sin embargo, el par M que ejerce el motor sobre la rueda trasera sí trabaja (Fig. b). Aunque se trata de un par interno para el sistema considerado (las ruedas ejercen un par opuesto sobre el cuerpo de la motocicleta), se realiza un trabajo neto porque las ruedas giran y el cuerpo no.



(a) Diagrama de cuerpo libre del sistema.

Aplicación del trabajo y la energía Si la motocicleta se mueve una distancia horizontal b, las ruedas giran un ángulo b/R rad y el trabajo realizado por el par constante M es

$$U = M(\theta_2 - \theta_1) = M\left(\frac{b}{R}\right).$$



(b) Rueda trasera aislada.

Sea v la velocidad de la motocicleta y ω la velocidad angular de las ruedas cuando se ha movido una distancia b. El trabajo es igual al cambio en la energía cinética total:

$$M\left(\frac{b}{R}\right) = \frac{1}{2}m_C v^2 + 2\left[\frac{1}{2}m_W v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right]. \tag{8.24}$$

Determinación de las relaciones cinemáticas La velocidad angular de las ruedas está relacionada con la velocidad v por $\omega = v/R$. Sustituyendo esta relación en la Ec. (8.24) y despejando b obtenemos

$$b = \left(\frac{1}{2}m_C + m_W + \frac{I}{R^2}\right)\frac{Rv^2}{M}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(142) + (9) + \frac{(0.8)}{(0.33)^2}\right]\frac{(0.33)(25)^2}{(140)}$$

$$= 128.7 \text{ m}.$$

(b) La velocidad angular de las ruedas cuando la motocicleta alcanza su velocidad máxima es

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{25}{0.33} = 75.8 \text{ rad/s}.$$

De la Ec. (8.21), la potencia máxima es

$$P = M\omega = (140)(75.8) = 10\,600 \text{ W}.$$

COMENTARIO

Aunque dibujamos por separado los diagramas de cuerpo libre de la motocicleta y su rueda trasera para clarificar el trabajo realizado por el par que ejerce el motor, observe que tratamos a la motocicleta, incluyendo sus ruedas, como un solo sistema al aplicar el principio del trabajo y la energía. Al hacerlo así, no tuvimos que considerar el trabajo realizado por las fuerzas internas entre el cuerpo de la motocicleta y sus ruedas. Al aplicar el principio del trabajo y la energía a un sistema de cuerpos rígidos, suele ser más sencillo expresar el principio para el sistema en su conjunto, a diferencia de lo que se hace al determinar el movimiento de un sistema de cuerpos rígidos usando la ecuación de movimiento, es decir, dibujando diagramas de cuerpo libre de cada cuerpo rígido.

Ejemplo 8.3

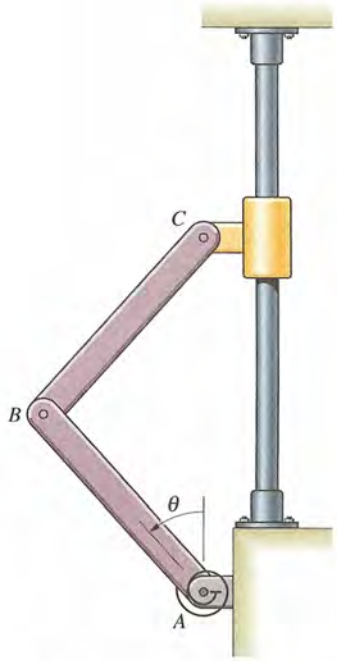


Figura 8.12

Las barras esbeltas AB y BC del mecanismo de la Fig. 8.12 tienen masa m y longitud l; el collarín C tiene masa m_C. Un resorte torsional en A ejerce un par horario $k\theta$ sobre la barra AB. El sistema se libera del reposo en la posición $\theta = 0$ y se permite que caiga. Ignorando la fricción, determine la velocidad angular $\omega = d\theta/dt$ de la barra AB como función de θ.

SOLUCIÓN

Identificación de las fuerzas y los pares que efectúan trabajo En la Fig. (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre del sistema. Las fuerzas y pares que trabajan —los pesos de las barras y el collarín y el par ejercido por el resorte torsional— son conservativos. Para determinar ω en función de θ, podemos usar la conservación de la energía y las relaciones cinemáticas entre las velocidades angulares de las barras y la velocidad del collarín.

Aplicación de la conservación de la energía Sea G el centro de masa de la barra BC, y ω_{BC} su velocidad angular (Fig. b). El momento de inercia de cada barra respecto a su centro de masa es $I = \frac{1}{12}ml^2$. Como AB gira respecto al punto fijo A, podemos escribir su energía cinética como

$$T_{\text{barra}\,AB} = \frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{1}{2}\left[I + \left(\frac{1}{2}l\right)^2 m\right]\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

La energía cinética de la barra BC es

$$T_{\text{barra}\,BC} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega_{BC}^2 = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{24}ml^2\omega_{BC}^2.$$

La energía cinética del collarín C es

$$T_{\text{collarín}} = \frac{1}{2}m_C v_C^2.$$

Usando el plano de referencia de la Fig. (a), las energías potenciales son:

$$V_{\text{barra}\,AB} + V_{\text{barra}\,BC} + V_{\text{collarín}} = mg\left(\frac{1}{2}l\cos\theta\right) + mg\left(\frac{3}{2}l\cos\theta\right) + m_C g(2l\cos\theta).$$

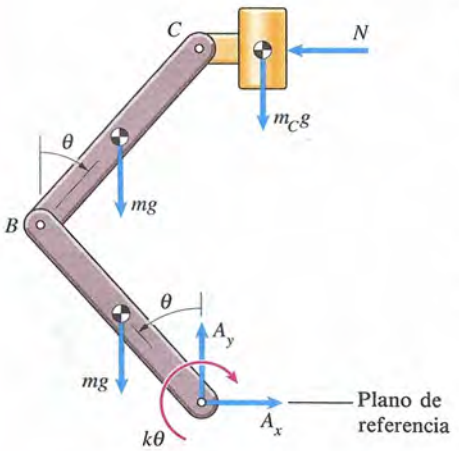
La energía potencial del resorte torsional está dada por la Ec. (8.18):

$$V_{\text{resorte}} = \frac{1}{2}k\theta^2.$$

Tenemos ahora todos los elementos para aplicar la conservación de la energía. Igualamos la suma de las energías cinética y potencial en la posición $\theta = 0$ con la suma de las energías cinética y potencial en un valor arbitrario de θ:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2:$$

$$0 + 2mgl + 2m_C gl = \frac{1}{6}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{24}ml^2\omega_{BC}^2 + \frac{1}{2}m_C v_C^2 + 2mgl\cos\theta + 2m_C gl\cos\theta + \frac{1}{2}k\theta^2.$$



(a) Diagrama de cuerpo libre del sistema.

Para determinar ω de esta ecuación, debemos expresar las velocidades v_G, v_C y ω_{BC} como funciones de ω.

Determinación de las relaciones cinemáticas Podemos determinar la velocidad del punto B en función de ω y luego expresar la velocidad del punto C en función de la velocidad del punto B y de la velocidad angular ω_{BC}.

La velocidad de B es

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -l\,\text{sen}\,\theta & l\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -l\omega\cos\theta\,\mathbf{i} - l\omega\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}.$$

La velocidad de C expresada en función de la velocidad de B es

$$v_C\,\mathbf{j} = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$$

$$= -l\omega\cos\theta\,\mathbf{i} - l\omega\,\text{sen}\theta\,\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ l\,\text{sen}\,\theta & l\cos\theta & 0 \end{vmatrix},$$

Igualando las componentes **i** y **j** obtenemos

$$\omega_{BC} = -\omega, \qquad v_C = -2l\omega\,\text{sen}\theta.$$

(El signo menos indica que las direcciones de las velocidades son opuestas a las direcciones supuestas en la Fig. (b). Ahora que conocemos la velocidad angular de la barra BC en función de ω, podemos determinar la velocidad de su centro de masa en función de ω, expresándola en función de $\mathbf{v}_B$:

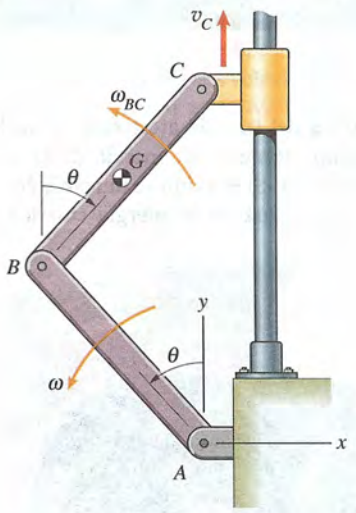
$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{G/B}$$

$$= -l\omega\cos\theta\,\mathbf{i} - l\omega\,\text{sen}\theta\,\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ \frac{1}{2}l\,\text{sen}\,\theta & \frac{1}{2}l\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}l\omega\cos\theta\,\mathbf{i} - \frac{3}{2}l\omega\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}.$$

Sustituyendo estas expresiones para ω_{BC}, v_C y $\mathbf{v}_G$ en la ecuación de la conservación de la energía y despejando ω obtenemos

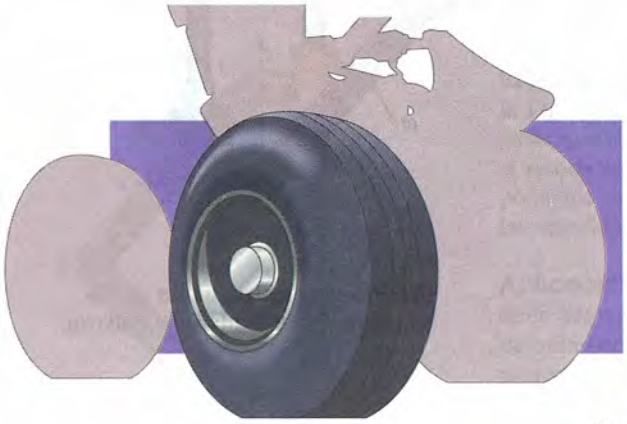
$$\omega = \left[\frac{2gl(m+m_C)(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}k\theta^2}{\frac{1}{3}ml^2 + (m+2m_C)l^2\,\text{sen}^2\,\theta}\right]^{1/2}.$$



(b) Velocidades angulares de las barras y velocidad del collarín.

Problemas

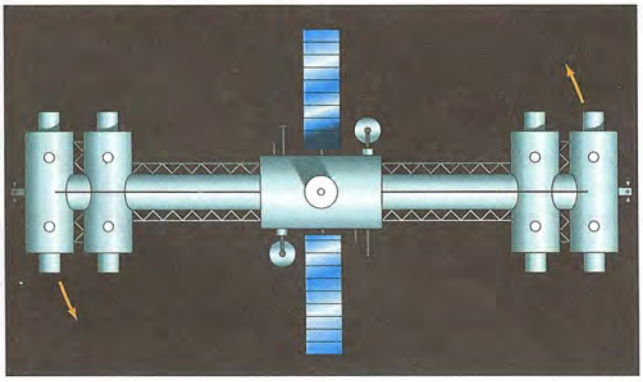
8.1 Una rueda del tren de aterrizaje de un Boeing 747 pesa 240 lb, tiene un momento de inercia de masa de 17 slug-pie^2 y un radio de 2 pies. Si el avión se mueve a 245 pie/s y la rueda gira sin resbalar, ¿cuál es la energía cinética de la rueda?



P8.1

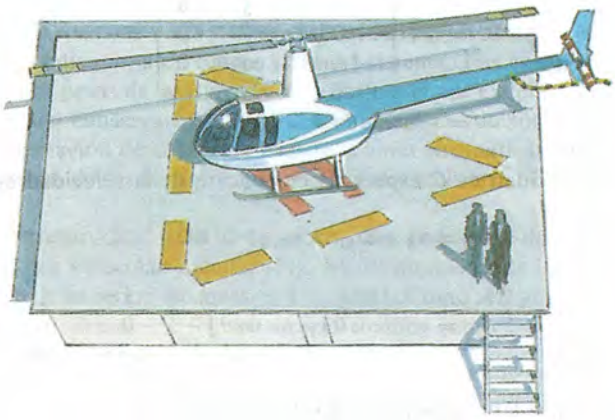
8.2 El volante del generador homopolar mostrado en la página 366 se puede modelar como un cilindro homogéneo de 1200 kg con radio de 280 mm. Suponga que el volante gira a 6200 rpm. Convirtiendo parte de la energía cinética del volante en corriente eléctrica, el generador se usa para impulsar una pistola electromagnética que acelera un proyectil de 0.28 kg a una velocidad de 5.3 km/s. Si se supone que toda la energía obtenida del volante se convierte en energía cinética del proyectil, ¿cuál es la velocidad angular final del volante?

8.3 La velocidad angular de la estación espacial es de 1 rpm. Use el trabajo y la energía para determinar el par constante que el sistema de control tendría que ejercer para reducir su velocidad angular a cero en 100 revoluciones. El momento de inercia de masa de la estación es $I = 1.5 \times 10^{10}$ kg-m^2.



P8.3

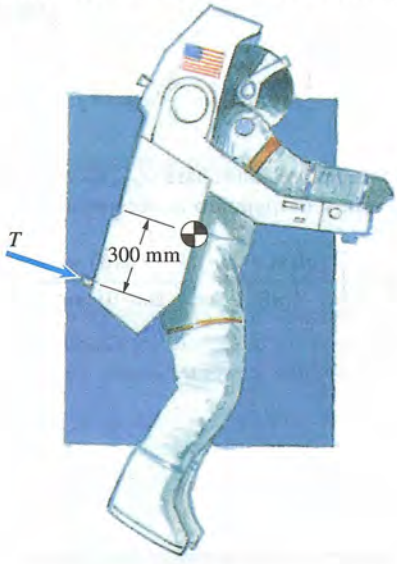
8.4 El momento de inercia de masa del rotor del helicóptero mostrado es de 400 slug-pie^2. Si el rotor parte del reposo, el motor ejerce un par constante de 500 pie-lb sobre él. Ignorando la resistencia aerodinámica, use el principio del trabajo y la energía para determinar cuántas revoluciones debe girar el rotor para alcanzar una velocidad angular de 2 revoluciones por segundo.



P8.4

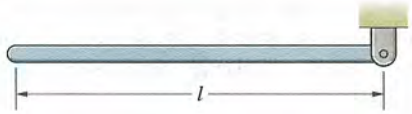
8.5 ¿Qué potencia media se transmite al rotor del Prob. 8.4 al acelerarlo del reposo a 2 revoluciones por segundo?

8.6 Durante una actividad extravehicular, un astronauta dispara un impulsor de su unidad de maniobras, ejerciendo una fuerza constante $T = 20$ N. El momento de inercia de masa del astronauta y su equipo respecto al centro de masa común es de 45 kg-m^2. Usando el principio del trabajo y la energía, determine su razón de giro en revoluciones por segundo cuando él ha girado 1/4 de revolución desde su orientación inicial.



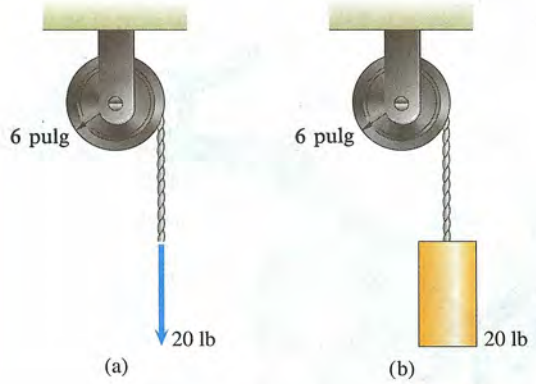
P8.6

8.7 Una barra esbelta de masa m se libera del reposo en la posición horizontal mostrada. Determine su velocidad angular cuando esté vertical usando (a) el principio del trabajo y la energía; (b) la conservación de la energía.



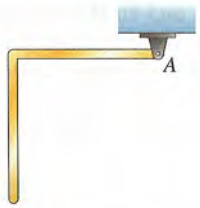
P8.7

8.8 El momento de inercia de masa de la polea mostrada es de 0.4 slug-pie^2. La polea parte del reposo. En ambos casos, use el principio del trabajo y la energía para determinar la velocidad angular de la polea cuando ha girado una revolución.



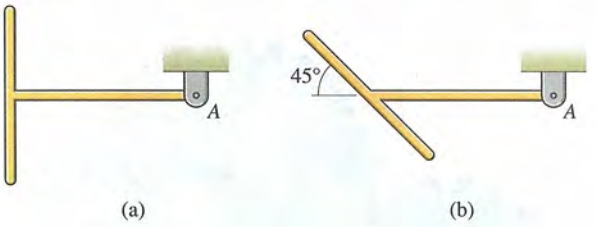
P8.8

8.9 El cuerpo mostrado consiste en barras idénticas de 1 m y 5 kg soldadas entre sí. Si se libera del reposo en la posición mostrada, ¿cuál será su velocidad angular cuando la barra soportada en A esté vertical?



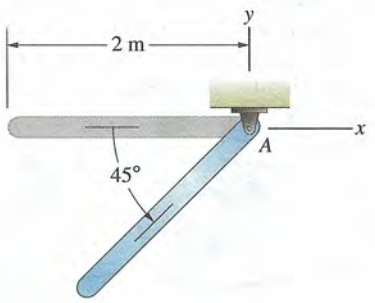
P8.9

8.10 Los cuerpos de la figura consisten en barras idénticas de 3 pies y 10 lb soldadas entre sí. Si se liberan del reposo en las posiciones mostradas, ¿cuáles son sus velocidades angulares cuando las barras soportadas en A están verticales?



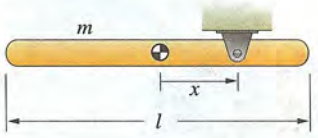
P8.10

8.11 La barra esbelta de 8 kg se libera del reposo en la posición horizontal. Cuando ha caído a la posición mostrada, ¿cuáles son las componentes x y y de la fuerza ejercida sobre la barra por el soporte de pasador en A?



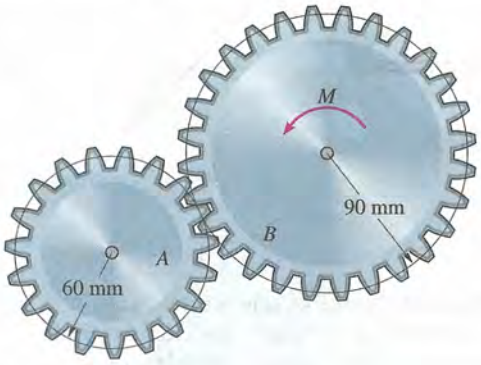
P8.11

8.12 La barra esbelta se libera del reposo en la posición mostrada.
(a) Use la conservación de la energía para determinar la velocidad angular cuando la barra esté vertical.
(b) ¿Para qué valor de x es la velocidad angular determinada en la parte (a) un máximo?



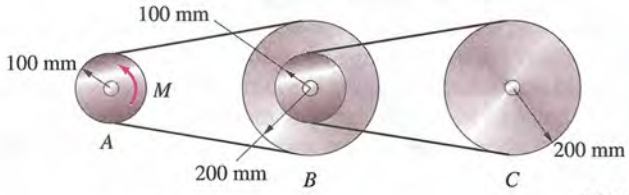
P8.12

8.13 Los engranes giran libremente sobre sus soportes de pasador. Sus momentos de inercia de masa son $I_A = 0.002$ kg-m^2 e $I_B = 0.006$ kg-m^2. Los engranes están en reposo al aplicar un par constante $M = 2$ N-m al engrane B. Ignorando la fricción, use el principio del trabajo y la energía para las velocidades angulares cuando el engrane A ha girado 100 revoluciones.



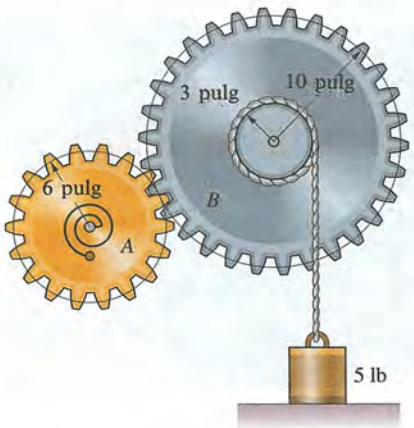
P8.13

8.14 Las poleas pueden girar libremente sobre sus soportes de pasador. Sus momentos de inercia de masa son $I_A = 0.002$ kg-m^2, $I_B = 0.036$ kg-m^2 e $I_C = 0.032$ kg-m^2. Las poleas están en reposo cuando un par constante $M = 2$ N-m se aplica a A. ¿Cuál es la velocidad angular de A después de 10 revoluciones?



P8.14

8.15 Los momentos de inercia de masa de los engranes A y B son $I_A = 0.014$ slug-pie^2 e $I_B = 0.100$ slug-pie^2. A está conectado a un resorte torsional con $k = 0.2$ pie-lb/rad. Si el resorte no está estirado y se retira la superficie que soporta al peso de 5 lb, ¿cuál es la velocidad del peso cuando ha caído 3 pulg?

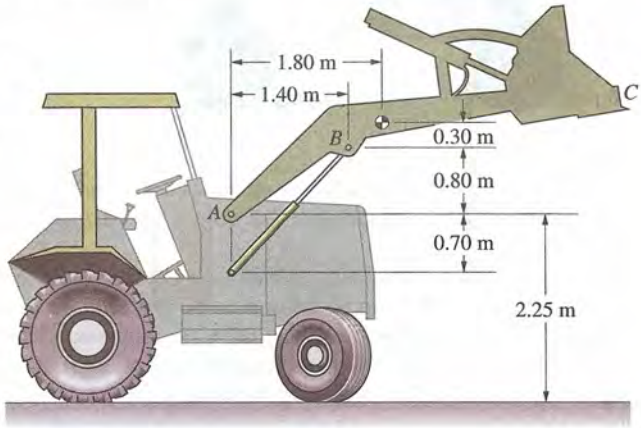


P8.15

8.16 Considere el sistema del Prob. 8.15.
(a) ¿Qué distancia máxima cae el peso de 5 lb cuando se retira la superficie de soporte?
(b) ¿Qué velocidad máxima adquiere el peso?

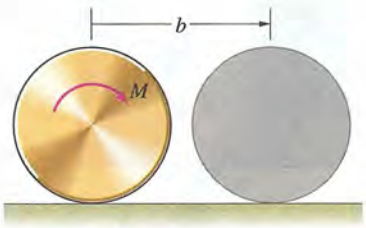
8.17 Considere el sistema del Prob. 8.15. Suponga que el resorte torsional está estirado en la posición mostrada y que la tensión resultante en la cuerda es de 2 lb. Si se retira la superficie de soporte del peso de 5 lb, ¿cuál es la velocidad del peso cuando éste ha caído 3 pulg?

8.18 Modele el brazo ABC de la figura como un solo cuerpo rígido. Su masa es de 300 kg y el momento de inercia de masa respecto a su centro de masa es $I = 360$ kg-m^2. Partiendo del reposo con su centro de masa 2 m arriba del suelo (posición 1), los cilindros hidráulicos empujan el brazo ABC hacia arriba. Cuando está en la posición mostrada (posición 2), su velocidad angular antihoraria es de 1.4 rad/s. ¿Cuánto trabajo efectúan los cilindros hidráulicos sobre el brazo al moverlo de la posición 1 a la posición 2?



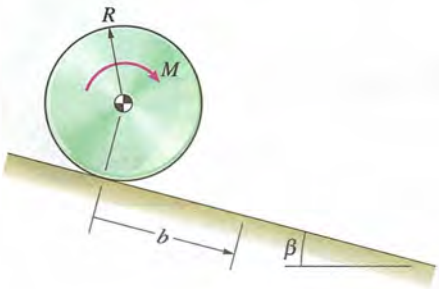
P8.18

8.19 La masa del disco cilíndrico homogéneo mostrado es m y su radio es R. El disco está en reposo cuando se le aplica un par M constante horario. Use el trabajo y la energía para determinar la velocidad angular del disco cuando éste ha rodado una distancia b.



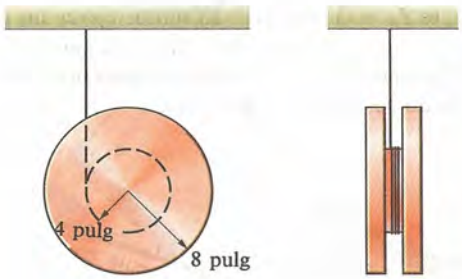
P8.19

8.20 Un disco de masa m y momento de inercia I parte del reposo sobre una superficie inclinada y está sometido a un par M constante horario. Suponiendo que rueda, ¿cuál es su velocidad angular cuando se ha movido una distancia b?



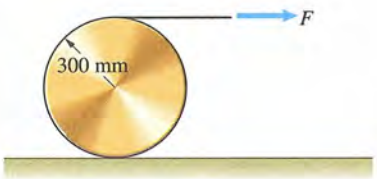
P8.20

8.21 En la Fig. P8.21 el disco escalonado pesa 40 lb y su momento de inercia de masa es $I = 0.2$ slug-pie^2. Si se libera del reposo, ¿cuál es su velocidad angular cuando el centro del disco ha caído 3 pies?



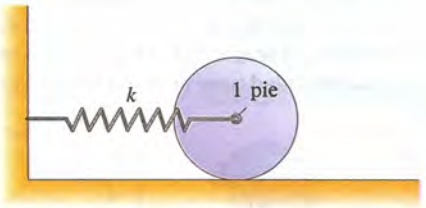
P8.21

8.22 El disco cilíndrico homogéneo de 100 kg mostrado está en reposo cuando se aplica la fuerza $F = 500$ N a una cuerda enrollada alrededor de él, ocasionando que el disco ruede. Use el principio del trabajo y la energía para determinar la velocidad angular del disco cuando éste ha girado una revolución.



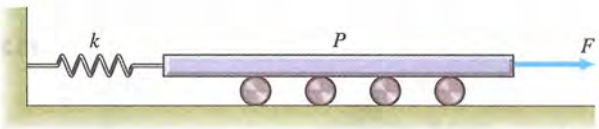
P8.22

8.23 En la Fig. P8.23, al disco cilíndrico homogéneo de 1 slug se le imparte una velocidad angular horaria de 2 rad/s con el resorte sin estirar. La constante del resorte es $k = 3$ lb/pie. Si el disco rueda, ¿cuánto se moverá su centro hacia la derecha?



P8.23

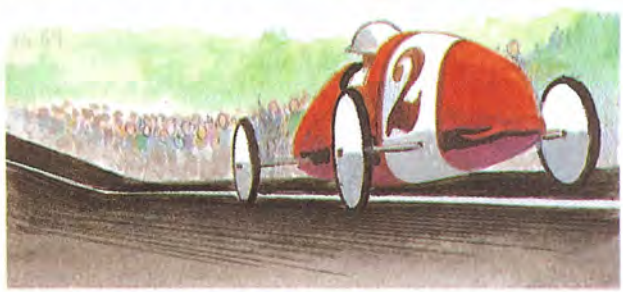
8.24 La placa P de 22 kg mostrada descansa sobre cuatro rodillos. Éstos se pueden modelar como cilindros homogéneos de 1 kg con radio de 30 mm. La placa está en reposo y el resorte ($k = 900$ N/m) no está estirado cuando se aplica una fuerza horizontal constante $F = 100$ N como se muestra. ¿Cuál es la velocidad de la placa cuando se ha movido 200 mm hacia la derecha?



P8.24

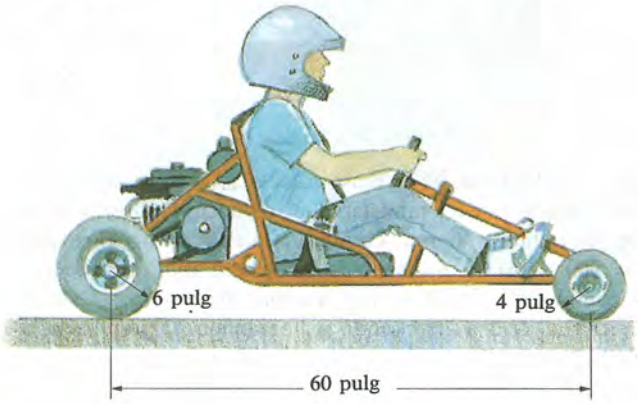
8.25 Considere el sistema descrito en el Prob. 8.24.
(a) ¿Qué distancia máxima se mueve la placa hacia la derecha cuando se aplica la fuerza F?
(b) ¿Qué velocidad máxima alcanza la placa, y qué distancia se ha movido la placa hacia la derecha cuando esto ocurre?

8.26 El reglamento de una carrera de autos especifica el peso combinado del auto y el conductor, así como el radio de las ruedas. Un participante considera dos posibilidades: (a) usar ruedas pesadas; (b) usar ruedas ligeras, compensando el peso con balasto. Analice este problema usando el principio del trabajo y la energía, y explique qué aconsejaría usted.



P8.26

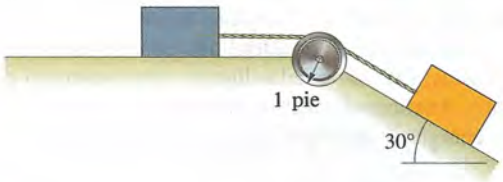
8.27 Cada una de las ruedas frontales del vehículo mostrado pesa 5 lb y tiene un momento de inercia de masa de 0.01 slug-pie^2. Las dos ruedas y el eje traseros forman un solo cuerpo rígido que pesa 40 lb y tiene un momento de inercia de masa de 0.1 slug-pie^2. El peso total del conductor y el vehículo, incluyendo las ruedas es de 240 lb. El vehículo parte del reposo, su motor ejerce un par constante de 15 pie-lb sobre el eje trasero y sus ruedas no resbalan. Si se ignoran la fricción y la resistencia aerodinámica, ¿qué velocidad tiene el vehículo cuando ha recorrido 50 pies?



P8.27

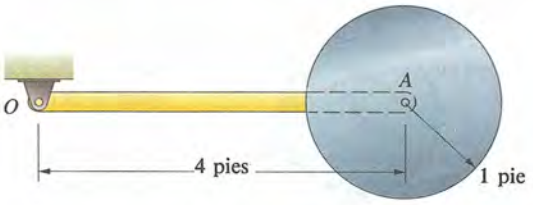
8.28 Determine la potencia máxima y la potencia media que recibe de su motor el vehículo del Prob. 8.27.

8.29 En la Fig. P8.29 cada caja pesa 50 lb, el momento de inercia de la polea es de 0.6 slug-pie^2 y la fricción se puede ignorar. Si las cajas parten del reposo, determine la magnitud de sus velocidades cuando se han movido 4 pies desde sus posiciones iniciales.



P8.29

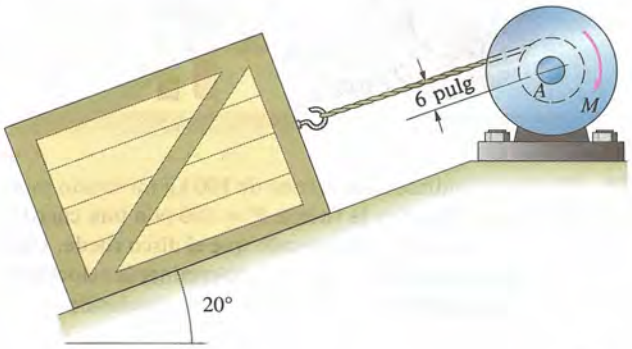
8.30 La barra esbelta mostrada pesa 30 lb y el disco cilíndrico 20 lb. El sistema se libera del reposo con la barra horizontal. Determine la magnitud de la velocidad angular de la barra cuando esté vertical si la barra y el disco están soldados en A.



P8.30

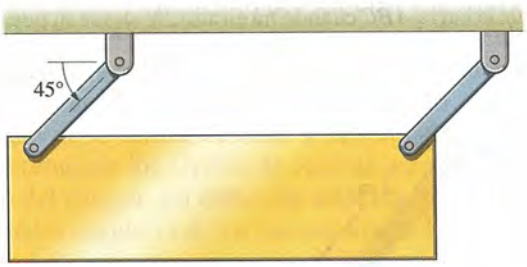
8.31 En el Prob. 8.30, determine la magnitud de la velocidad angular de la barra cuando ésta ha alcanzado la posición vertical si la barra y el disco están conectados por un pasador liso en A.

8.32 En la Fig. P8.32 la caja de 100 lb es jalada por el malacate hacia arriba sobre el plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es $\mu_k = 0.4$. El momento de inercia de masa del tambor en que está enrollado el cable, incluido éste, es $I_A = 3$ slug-pie^2. El motor ejerce un par $M = 40$ pie-lb constante sobre el tambor. Si la caja parte del reposo, use el principio del trabajo y la energía para determinar su velocidad cuando se ha desplazado 2 pies.



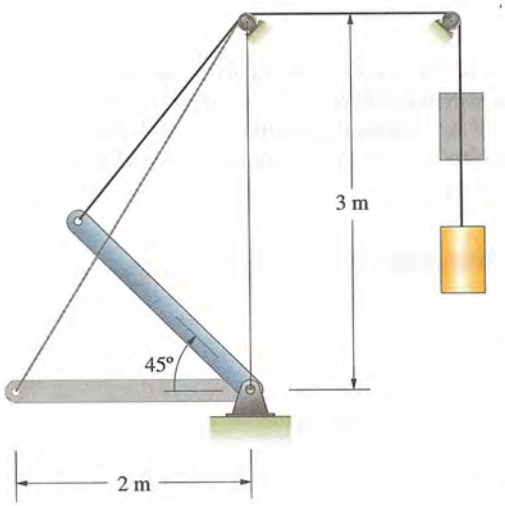
P8.32

8.33 En la Fig. P8.33, cada una de las barras esbeltas de 2 pies pesa 4 lb y la placa rectangular pesa 20 lb. Si el sistema se libera del reposo en la posición mostrada, ¿cuál será la velocidad de la placa cuando las barras estén verticales?



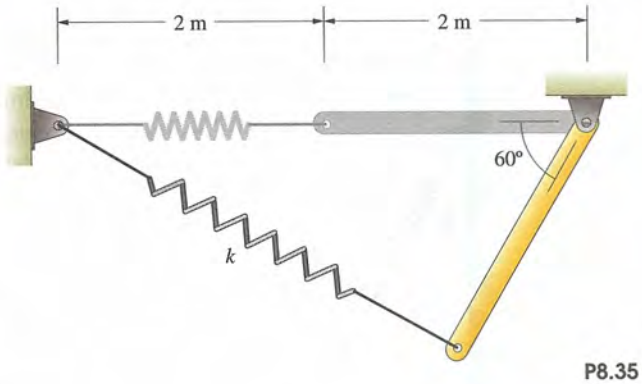
P8.33

8.34 El sistema mostrado parte del reposo con la barra esbelta de 4 kg horizontal. La masa del cilindro suspendido es de 10 kg. ¿Cuál es la velocidad angular de la barra cuando está en la posición mostrada?



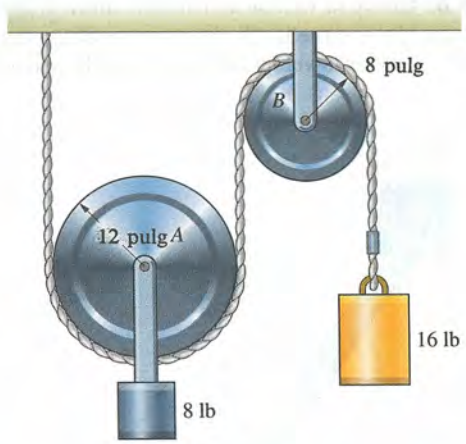
P8.34

8.35 La longitud del resorte sin estirar es de 1.5 m y su constante es $k = 50$ N/m. Cuando la barra esbelta de 15 kg está horizontal, su velocidad angular es de 0.1 rad/s. ¿Cuál es su velocidad angular cuando está en la posición mostrada?



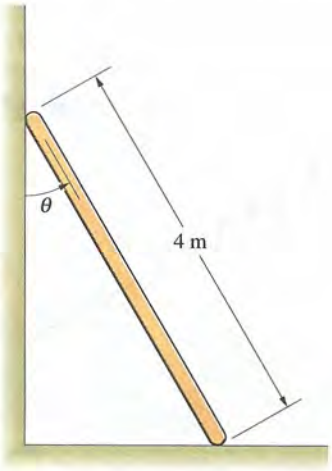
P8.35

8.36 La polea A mostrada pesa 4 lb, $I_A = 0.060$ slug-pie^2 e $I_B = 0.014$ slug-pie^2. Si el sistema parte del reposo, ¿cuál es la velocidad del peso de 16 lb cuando ha caído 2 pies?



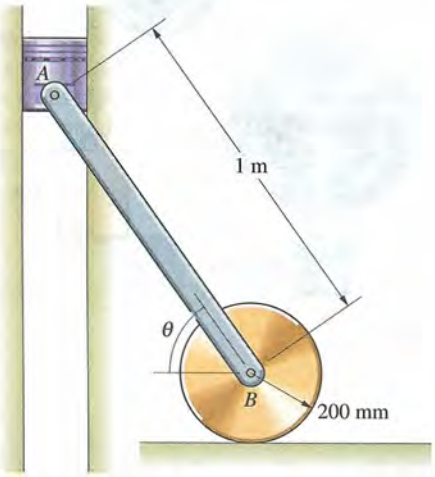
P8.36

8.37 La escalera de 18 kg mostrada se libera del reposo con $\theta = 10°$. La pared y el piso son lisos. Modelando la escalera como una barra esbelta, use la conservación de la energía para determinar su velocidad angular cuando $\theta = 40°$.



P8.37

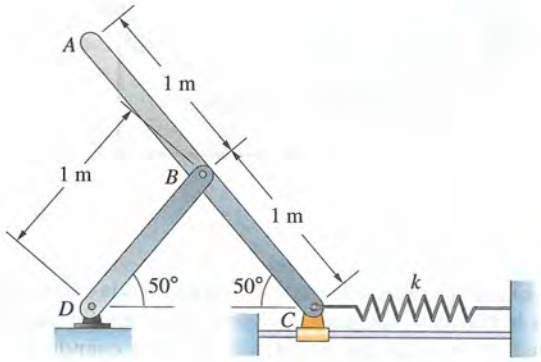
8.38 En la Fig. P8.38, la barra esbelta de 4 kg está articulada a un deslizador A de 2 kg y a un disco cilíndrico homogéneo de 4 kg en B. Ignore la fuerza de fricción sobre el deslizador y suponga que el disco rueda. Si el sistema se libera del reposo con $\theta = 60°$, ¿cuál es la velocidad angular de la barra cuando $\theta = 0$?



P8.38

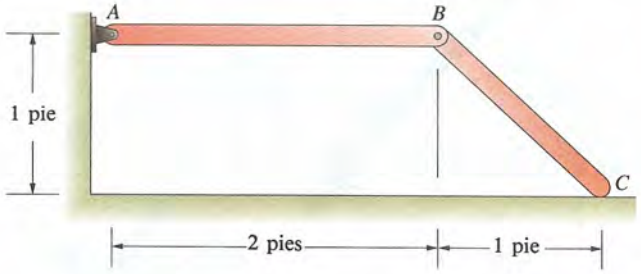
8.39 Si el sistema del Prob. 8.38 se libera del reposo con $\theta = 80°$, ¿cuál es la velocidad angular de la barra cuando $\theta = 20°$?

8.40 El sistema está en equilibrio en la posición mostrada. La masa de la barra esbelta ABC es de 6 kg, la masa de la barra esbelta BD es de 3 kg y la masa del deslizador en C es de 1 kg. La constante del resorte es $k = 200$ N/m. Si se aplica en A una fuerza constante de 100 N hacia abajo, ¿cuál es la velocidad angular de la barra ABC cuando ha girado 20° desde su posición inicial?



P8.40

8.41 En la Fig. P8.41 la barra AB pesa 10 lb y la barra BC 6 lb. Si el sistema se libera del reposo en la posición mostrada, ¿cuáles son las velocidades angulares de las barras en el instante inmediato anterior en que la junta B toca el piso liso?



P8.41

8.42 Si la barra AB del Prob. 8.41 está girando a 1 rad/s con dirección horaria en el instante mostrado, ¿cuáles son las velocidades angulares de las barras en el instante inmediato anterior en que la junta B toca el piso liso?

8.4 Principios del impulso y la cantidad de movimiento

Aquí repasamos el principio del impulso y la cantidad de movimiento lineales del Cap. 5 y deducimos el principio del impulso y el momento angulares para un cuerpo rígido. Estos principios relacionan integrales de tiempo de las fuerzas y pares sobre un cuerpo rígido, con cambios en la velocidad de su centro de masa y su velocidad angular, y se pueden usar para determinar los efectos de fuerzas y pares impulsores sobre el movimiento del cuerpo, así como las velocidades de los centros de masa y las velocidades angulares de los cuerpos después de que han sufrido colisiones.

Cantidad de movimiento lineal

La segunda ley de Newton integrada respecto al tiempo da el principio del impulso y la cantidad de movimiento lineales para un cuerpo rígido:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1,} \tag{8.25}$$

donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son las velocidades del centro de masa en los tiempos t_1 y t_2 (Fig. 8.13). Si se conocen las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido en función del tiempo, podemos determinar el cambio en la velocidad del centro de masa durante un intervalo de tiempo. En función del promedio respecto al tiempo de la fuerza total entre t_1 y t_2,

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{media}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{F}\, dt,$$

podemos escribir la Ec. (8.25) como

$$(t_2 - t_1)\Sigma \mathbf{F}_{\text{media}} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1. \tag{8.26}$$

Esta forma del principio del impulso y la cantidad de movimiento lineales suele ser útil cuando un cuerpo está sometido a fuerzas impulsoras.

Si las únicas fuerzas que actúan sobre dos cuerpos rígidos A y B son las fuerzas que se ejercen entre sí, o si otras fuerzas son insignificantes, su cantidad de movimiento lineal total se conserva:

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = \text{constante}. \tag{8.27}$$

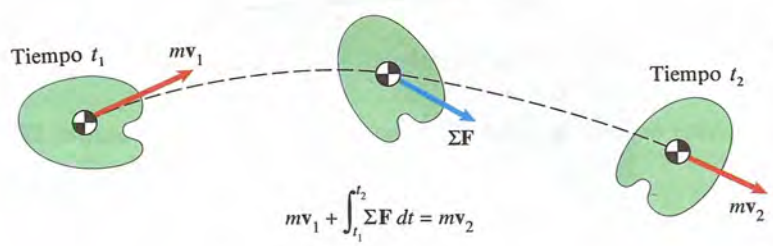


Figura 8.13
Principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal.

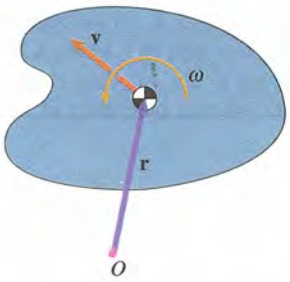


Figura 8.14

Cuerpo rígido en movimiento plano con velocidad **v** y velocidad angular ω.

Momento angular

Cuando aplicamos los principios de las cantidades de movimiento a cuerpos rígidos, nos interesan las velocidades de sus centros de masa y sus velocidades angulares. Para esto, no basta el principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal. Ahora deducimos el principio del impulso y el momento angulares para un cuerpo rígido en movimiento plano.

Consideremos un cuerpo rígido en movimiento plano general respecto a un punto de referencia O fijo (Fig. 8.14). En el Cap. 7, expresamos la relación entre el momento total respecto a O debido a fuerzas y pares externos y la razón de cambio del momento angular del cuerpo rígido respecto a O en la forma (véanse las Ecs. 7.11 y 7.20)

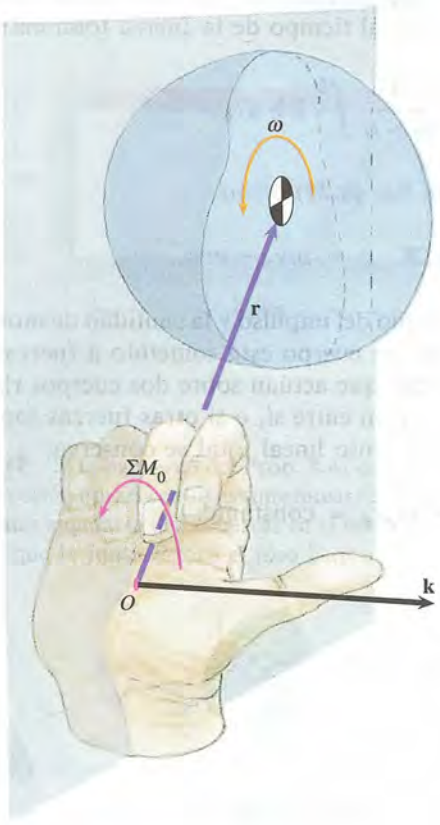
$$\Sigma M_O = \frac{d}{dt}[(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega], \tag{8.28}$$

donde I es el momento de inercia de masa del cuerpo rígido respecto a su centro de masa. Esta ecuación expresa el momento angular como la suma de los momentos angulares respecto a O debido a la velocidad del centro de masa y el momento angular respecto al centro de masa. El vector unitario **k** es perpendicular al plano de movimiento, y su dirección es definida por la elección de la dirección positiva para el momento y la velocidad angular. Si se definen momentos antihorarios y velocidades angulares antihorarias como positivos, **k** apunta hacia afuera de la página (Fig. 8.15).

En vez de usar el producto vectorial para evaluar el momento angular de un cuerpo rígido en movimiento plano, se puede proceder como se hizo

Figura 8.15

Determinación de la dirección de **k**.



para determinar los momentos de fuerzas en problemas bidimensionales. La magnitud del "momento" de la cantidad de movimiento lineal $(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k}$ es igual al producto de la magnitud de la cantidad de movimiento lineal por la distancia perpendicular de O a la línea de acción de la cantidad de movimiento lineal (Fig. 8.16). Es positivo si el "momento" tiene la dirección de la ω positiva y negativo en dirección opuesta.

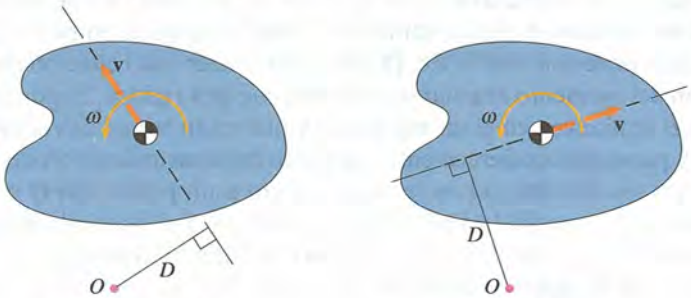


Figura 8.16
Determinación del momento angular respecto a O calculando el "momento" de la cantidad de movimiento lineal.

Integrando la Ec. (8.28) respecto al tiempo obtenemos el **principio del impulso angular y el momento angular:**

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_0 \, dt = [(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_2 - [(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_1. \quad (8.29)$$

El impulso angular respecto a O durante el intervalo de t_1 a t_2 es igual al cambio en el momento angular del cuerpo rígido respecto a O (Fig. 8.17). También podemos expresar el principio del impulso angular y del momento angular en función del momento total respecto al centro de masa. Integrando la Ec. (7.23) con respecto al tiempo obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M \, dt = I\omega_2 - I\omega_1. \quad (8.30)$$

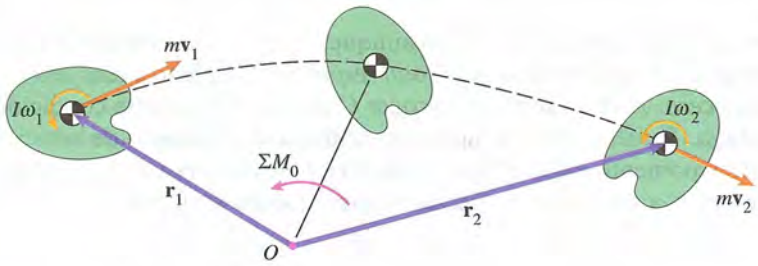


Figura 8.17
Principio del impulso angular y el momento angular.

$$(\mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{k} + I\omega_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_0 dt = (\mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{k} + I\omega_2$$

El promedio del momento respecto a O con el tiempo entre t_1 y t_2 es

$$(\Sigma M_0)_{\text{media}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_0 \, dt,$$

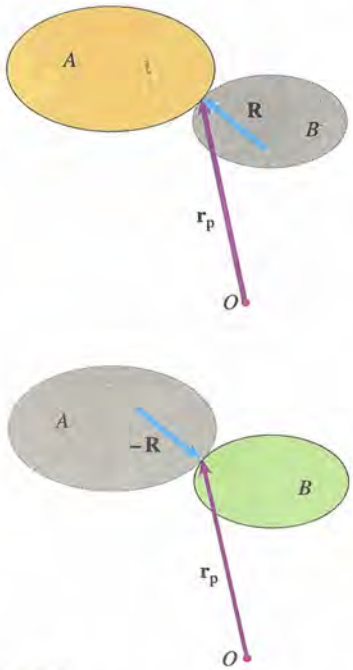


Figura 8.18
Cuerpos rígidos A y B ejerciendo por contacto fuerzas entre sí.

por lo que podemos escribir la Ec. (8.29) como

$$(t_2 - t_1)(\Sigma M_O)_{\text{media}} = [(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_2 - [(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_1. \tag{8.31}$$

Esta ecuación se puede usar para determinar el cambio en el momento angular de un cuerpo rígido sometido a fuerzas y pares impulsores.

También podemos usar la Ec. (8.29) para obtener una ecuación de conservación del momento angular total de dos cuerpos rígidos. Supongamos que A y B se mueven en el mismo plano y que están sometidos sólo a las fuerzas y pares que se ejercen entre sí, o que las otras fuerzas y pares son insignificantes. Sea M_{OA} el momento respecto a un punto fijo O debido a las fuerzas y pares que actúan sobre A, y sea M_{OB} el momento respecto a O debido a las que actúan sobre B. Con la misma hipótesis que hicimos al deducir las ecuaciones de movimiento (las fuerzas entre cada par de partículas actúan en la línea entre éstas), $M_{OA} = -M_{OB}$. Por ejemplo, en la Fig. 8.18 A y B ejercen fuerzas de contacto entre sí. Los momentos resultantes respecto a O son $\mathbf{M}_{OA} = \mathbf{r}_p \times \mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_{OB} = \mathbf{r}_p \times (-\mathbf{R}) = -\mathbf{r}_p \times \mathbf{R}$. Aplicamos el principio del impulso y el momento angulares a A y B para los tiempos arbitrarios t_1 y t_2 y obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} M_{OA}\, dt = [(\mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{k} + I_A\omega_A]_2 - [(\mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{k} + I_A\omega_A]_1,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M_{OB}\, dt = [(\mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{k} + I_B\omega_B]_2 - [(\mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{k} + I_B\omega_B]_1.$$

Sumando, los términos de la izquierda se cancelan y obtenemos

$$[(\mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{k} + I_A\omega_A]_1 + [(\mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{k} + I_B\omega_B]_1 = [(\mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{k} + I_A\omega_A]_2 + [(\mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{k} + I_B\omega_B]_2.$$

El momento angular total de A y B respecto a O se conserva:

$$(\mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{k} + I_A\omega_A + (\mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{k} + I_B\omega_B = \text{constante}. \tag{8.32}$$

Observe que este resultado es válido aunque A y B estén sometidos a fuerzas y pares externos *si el momento total respecto a O debido a esas fuerzas y pares es cero*. A veces se puede escoger O de manera que esta condición se satisfaga. Esto también se aplica a un número arbitrario de cuerpos rígidos: su momento angular total respecto a O se conserva si el momento total respecto a O debido a fuerzas y pares externos es cero.

En los siguientes ejemplos mostramos el uso de los principios del impulso y la cantidad de movimiento lineal y del impulso y el momento angulares para analizar movimientos de cuerpos rígidos. Se debe considerar el uso de la cantidad de movimiento cuando se conocen las fuerzas y pares sobre un cuerpo en función del tiempo y se les quiere relacionar con los cambios en la velocidad de su centro de masa y con su velocidad angular.

Ejemplo 8.4

El disco A de la Fig. 8.19 tiene inicialmente una velocidad angular antihoraria ω_0 y el disco B está en reposo. En $t = 0$, los discos se ponen en contacto. Debido a la fricción en el punto de contacto, la velocidad angular de A disminuye y la de B aumenta hasta que no hay resbalamiento entre ellos. ¿Cuáles son sus velocidades angulares finales ω_A y ω_B? Los discos están soportados en sus centros de masa, y sus momentos de inercia de masa son I_A e I_B.

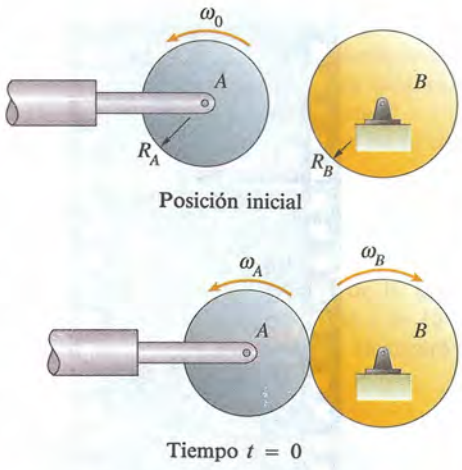


Figura 8.19

ESTRATEGIA

Como los discos giran respecto a ejes fijos que pasan por sus centros de masa mientras están en contacto, podemos aplicar el principio del impulso y el momento angulares según la Ec. (8.30) a cada disco. Cuando ya no hay resbalamiento entre los discos, sus velocidades son iguales en su punto de contacto. Con esta relación cinemática y las expresiones que se obtienen con el principio del impulso y el momento angulares, podemos determinar las velocidades finales.

SOLUCIÓN

En la Fig. (a) dibujamos los diagramas de cuerpo libre de los discos mientras resbalan, mostrando las fuerzas normales y de fricción que ejercen entre sí. Para aplicar la Ec. (8.30) al disco A, hacemos coincidir el punto fijo O con su centro. Si t_f es el tiempo en que el resbalamiento cesa,

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_0\, dt = I\omega_2 - I\omega_1 :$$

$$\int_0^{t_f} -R_A f\, dt = I_A\omega_A - I_A\omega_0.$$

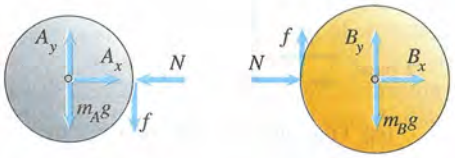
También aplicamos la Ec. (8.30) al disco B:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_0\, dt = I\omega_2 - I\omega_1 :$$

$$\int_0^{t_f} -R_B f\, dt = -I_B\omega_B - 0.$$

(Observe que hemos definido ω_B como positiva en la dirección horaria.) Dividimos la primera ecuación entre la segunda y escribimos el resultado como

$$\omega_A + \frac{R_A I_B}{R_B I_A}\omega_B = \omega_0.$$



(a) Diagramas de cuerpo libre de los discos.

Sin resbalamiento, las velocidades son iguales en el punto de contacto:

$$R_A\omega_A = R_B\omega_B.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones obtenemos

$$\omega_A = \omega_0\left[\frac{1}{1 + \dfrac{R_A^2 I_B}{R_B^2 I_A}}\right], \qquad \omega_B = \omega_0\left[\frac{R_A/R_B}{1 + \dfrac{R_A^2 I_B}{R_B^2 I_A}}\right].$$

Observe que si los discos tienen el mismo radio y momento de inercia de masa, $\omega_A = \frac{1}{2}\omega_0$ y $\omega_B = \frac{1}{2}\omega_0$.

Ejemplo 8.5

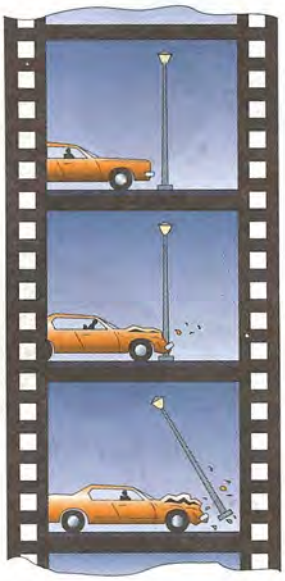


Figura 8.20

Se quiere diseñar un poste de alumbrado público que falle al nivel del suelo al ser golpeado por un vehículo, a fin de prevenir daños a los pasajeros (Fig. 8.20). En una prueba del impacto la velocidad angular del poste es de 0.74 rad/s y la velocidad horizontal de su punto central es de 22 pie/s después del impacto, cuya duración es de $\Delta t = 0.01$ s. Si el poste se modela como una barra esbelta de 20 pies y 140 lb, y si se supone que el auto lo golpea a 2 pies sobre el terreno y que el par ejercido sobre el poste por sus soportes se puede ignorar, ¿qué fuerza media cortará los pernos que soportan al poste?

ESTRATEGIA

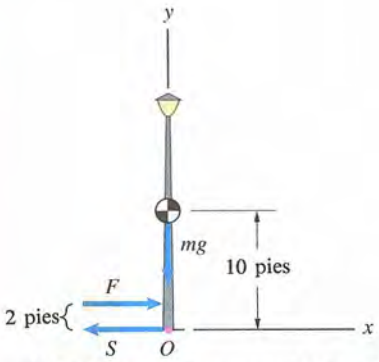
Podemos usar los principios del impulso angular y el momento angular, expresados en función de la fuerza media y el momento medio ejercidos sobre el poste, para determinar la fuerza cortante media.

SOLUCIÓN

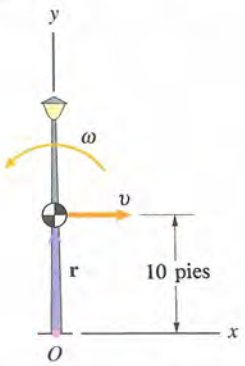
En la Fig. (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre del poste, donde F es la fuerza media ejercida por el auto y S es la fuerza cortante media ejercida por los pernos sobre el poste. Sea m la masa del poste, y v y ω la velocidad de su centro de masa y su velocidad angular al final del impacto (Fig. b). El principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal expresado en función de la fuerza horizontal media es

$$(t_2 - t_1)(\Sigma F_x)_{\text{media}} = (mv_x)_2 - (mv_x)_1 :$$

$$\Delta t(F - S) = mv - 0. \tag{8.33}$$



(a) Diagrama de cuerpo libre del poste.



(b) Velocidad y velocidad angular al final del impacto.

Para aplicar el principio del impulso angular y el momento angular, usamos la Ec. (8.31) colocando el punto fijo O en el extremo inferior del poste (Fig. a). El momento angular del poste respecto a O al final del impacto es

$$[(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_2 = [(10\,\mathbf{j}) \times m(v\,\mathbf{i})] \cdot \mathbf{k} + I\omega = -10mv + I\omega.$$

(También podemos obtener esto calculando el "momento" de la cantidad de movimiento lineal respecto a O y sumando el término $I\omega$. La magnitud del "momento" es el producto de la magnitud de la cantidad de movimiento lineal (mv) por la distancia perpendicular de O a la línea de acción de la cantidad de movimiento lineal (10 pies), y es negativo porque el "momento" tiene dirección opuesta a la de la ω positiva. Véase la Fig. 8.16.) Expresamos el principio del impulso y el momento angulares en función del momento medio respecto a O:

$$(t_2 - t_1)(\Sigma M_O)_{\text{media}} = [(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_2 - [(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_1 :$$

$$\Delta t(-2F) = -10mv + I\omega - 0.$$

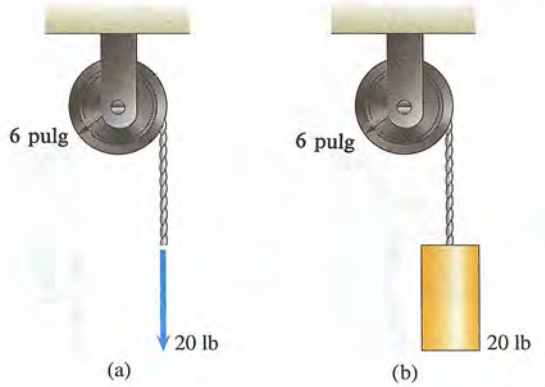
Resolviendo esta ecuación junto con la Ec. (8.33) para la fuerza cortante media S, obtenemos

$$S = \frac{8mv - I\omega}{2\Delta t} = \frac{8(140/32.2)(22) - \frac{1}{12}(140/32.2)(20)^2(0.74)}{2(0.01)}$$

$$= 32\,900 \text{ lb}.$$

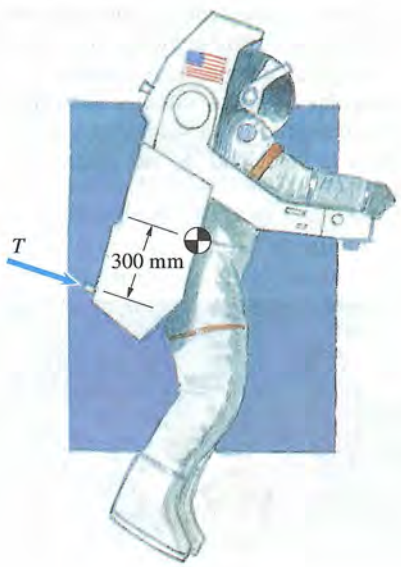
Problemas

8.43 El momento de inercia de masa de la polea mostrada es de 0.4 slug-pie^2. La polea parte del reposo en $t = 0$. En ambos casos, use los principios de la cantidad de movimiento para determinar la velocidad angular de las poleas en $t = 1$ s.



P8.43

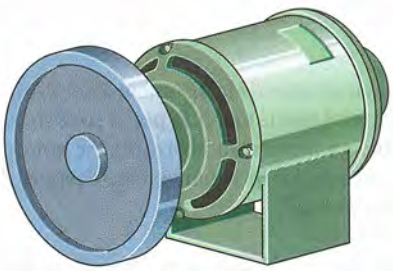
8.44 Un astronauta dispara un impulsor de su unidad de maniobras ejerciendo una fuerza $T = 2(1 + t)$ N, donde t está en segundos. La masa combinada del astronauta y su equipo es de 122 kg, y el momento de inercia de masa respecto al centro de masa común es de 45 kg-m^2. Modelando al astronauta y a su equipo como un cuerpo rígido, use el principio del impulso angular y el momento angular para determinar cuánto tarda su velocidad angular en alcanzar el valor de 0.1 rad/s.



P8.44

8.45 La unidad de maniobras del Prob. 8.44 ejerce una fuerza impulsora T de 0.2 s de duración, dando al astronauta una velocidad angular antihoraria de una revolución por minuto.
(a) ¿Cuál es el valor medio de la fuerza impulsora?
(b) ¿Cuál es la magnitud del cambio de velocidad de su centro de masa?

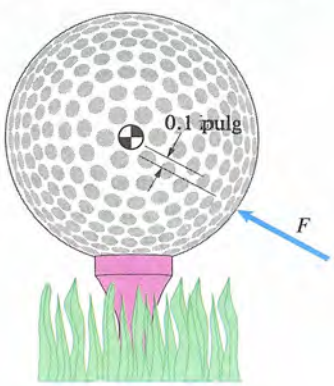
8.46 Un volante unido a un motor eléctrico está en reposo. En $t = 0$, el motor ejerce un par $M = 200e^{-0.1t}$ N-m sobre el volante, cuyo momento de inercia de masa es de 10 kg-m^2.
(a) ¿Cuál es la velocidad angular del volante en $t = 10$ s?
(b) ¿Cuál es la máxima velocidad angular que alcanzará?



P8.46

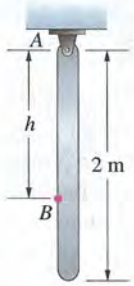
8.47 Una rueda del tren de aterrizaje de un Boeing 747 tiene un momento de inercia de masa de 17 slug-pie^2 y un radio de 2 pies. El avión se mueve a 245 pie/s al aterrizar. Suponga que las marcas de resbalamiento que deja el avión al aterrizar son de 30 pies de largo. Si la velocidad del avión y la fuerza normal sobre la rueda son constantes mientras ésta resbala, use el principio del impulso angular y el momento angular para calcular la fuerza de fricción ejercida sobre la rueda al resbalar.

8.48 Se muestra la fuerza que un bastón ejerce sobre una pelota de golf de 1.62 onzas. La pelota tiene 1.68 pulg de diámetro y se puede modelar como una esfera homogénea. El bastón toca la pelota durante 0.0006 s, y la magnitud de la velocidad del centro de masa de la pelota después del golpe es de 160 pie/s. ¿Qué velocidad angular adquiere la pelota?



P8.48

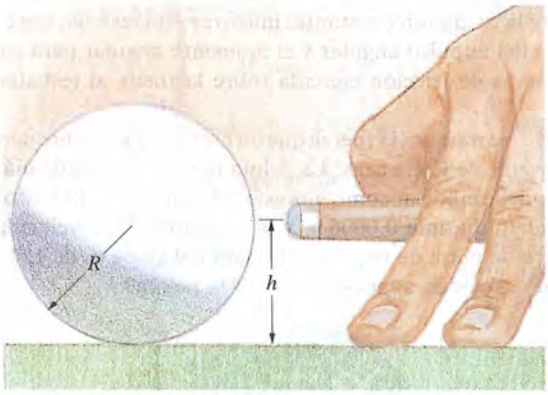
8.49 En la Fig. P8.49, la barra esbelta suspendida de 8 kg está sometida a una fuerza horizontal impulsora en B. El valor medio de la fuerza es de 1000 N, y su duración es de 0.03 s. Si la fuerza ocasiona que la barra oscile hasta la posición horizontal antes de detenerse, ¿cuál es la distancia h?



P8.49

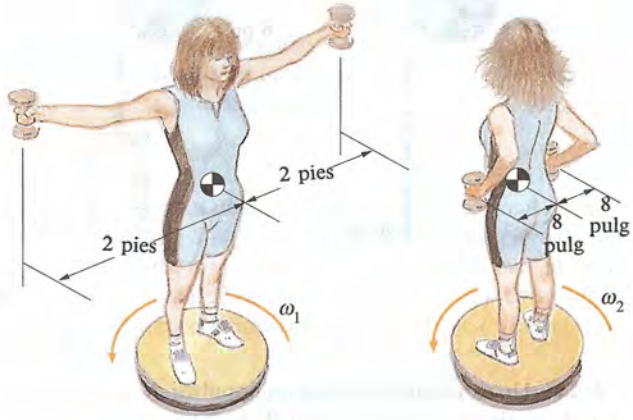
8.50 ¿Para qué valor de la distancia h del Prob. 8.49 no habrá fuerza horizontal media ejercida por el soporte A sobre la barra cuando la fuerza impulsora horizontal se aplique en B? ¿Cuál es la velocidad angular de la barra justo después de que se aplica la fuerza impulsora?

8.51 En la Fig. P8.51 la fuerza ejercida sobre la bola por el taco es horizontal. Determine el valor de h para el cual la bola rueda sin resbalar. (Suponga que la fuerza media de fricción ejercida sobre la bola por la mesa es insignificante.)



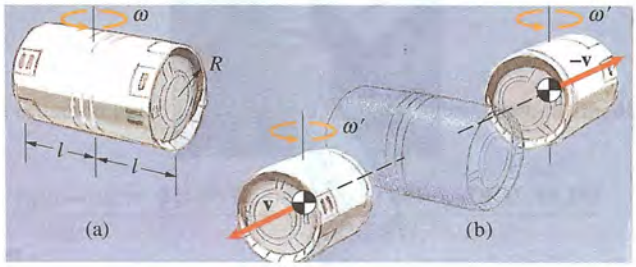
P8.51

8.52 Una persona de pie sobre una plataforma en rotación sostiene un peso en cada mano. Suponga que el momento de inercia de masa de la persona y la plataforma es de 0.3 slug-pie^2, y que el momento de inercia de masa de cada peso de 8 lb respecto a su propio centro de masa es de 0.0008 slug-pie^2. Si la velocidad angular de la persona con sus brazos extendidos es ω_1 = 1 rev/s, ¿cuál es su velocidad angular ω_2 cuando ella recoge los brazos? (Los patinadores usan esta maniobra para controlar su velocidad angular durante las rotaciones alterando las posiciones de sus brazos.)



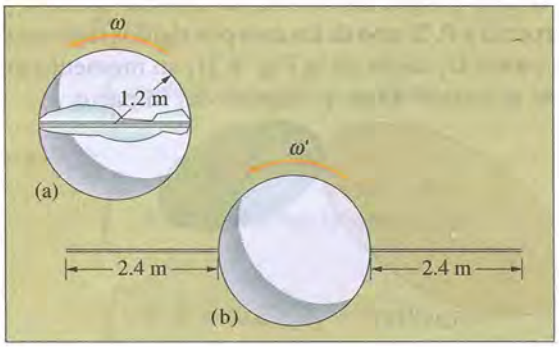
P8.52

8.53 Un transbordador espacial libera dos satélites conectados, que después se separan. Éstos se pueden modelar como cilindros homogéneos idénticos de masa m, radio R y longitud l. Antes de separarse están girando alrededor de un eje perpendicular al eje de los cilindros con velocidad angular ω (Fig. a). La conexión se libera y ellos se alejan entre sí (Fig. b).
(a) Use la conservación del momento angular para determinar la velocidad angular ω' de los satélites individuales.
(b) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad v de sus centros de masa respecto a la velocidad de sus centros de masa antes de separarse?



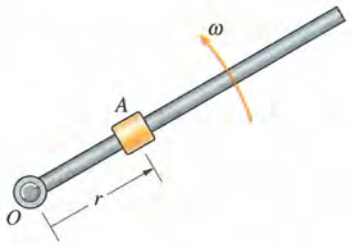
P8.53

8.54 Un satélite tiene velocidad angular $\omega = 1$ rad/s (Fig. a). En cierto momento se extienden dos antenas, cada una de longitud igual al diámetro del satélite, y la velocidad angular de éste disminuye a ω' (Fig. b). Modelando el satélite como una esfera de 500 kg y 1.2 m de radio y cada antena como una barra esbelta de 10 kg, determine ω'.



P8.54

8.55 La barra esbelta mostrada gira libremente *en un plano horizontal* respecto a un eje vertical en O. La barra pesa 20 lb y su longitud es de 6 pies. El deslizador A pesa 2 lb. Si la velocidad angular de la barra es $\omega = 10$ rad/s y la componente radial de la velocidad de A es cero cuando $r = 1$ pie, ¿cuál es la velocidad angular de la barra cuando $r = 4$ pies? (El momento de inercia de masa de A respecto a su centro de masa es insignificante; es decir, considere a A como una partícula.)



P8.55

8.5 *Impactos*

En el Cap. 5 analizamos los impactos entre cuerpos para determinar las velocidades de sus centros de masa después de la colisión. Ahora analizamos cómo determinar las velocidades de los centros de masa *y las velocidades angulares* de cuerpos rígidos después de que chocan.

Conservación de la cantidad de movimiento

Supongamos que dos cuerpos rígidos A y B que se mueven en el mismo plano, chocan. ¿Qué dicen los principios de la cantidad de movimiento lineal y del momento angular sobre sus movimientos después del golpe?

Cantidad de movimiento lineal Si otras fuerzas son insignificantes en comparación con las de impacto que A y B ejercen entre sí, su cantidad de movimiento lineal total es la misma antes y después. Hay que ser cuidadoso al aplicar este resultado. Por ejemplo, si uno de los cuerpos tiene un soporte de pasador (Fig. 8.21), las reacciones que éste ejerce no se pueden ignorar y la cantidad de movimiento no se conserva.

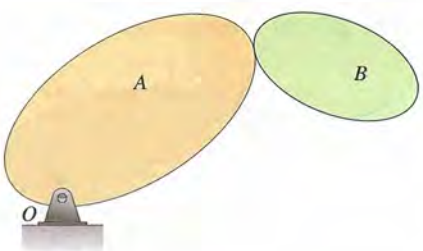
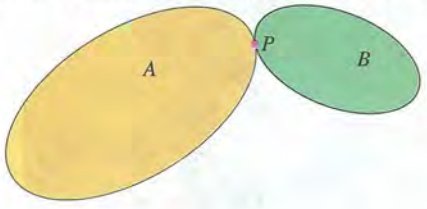


Figura 8.21
Cuerpos rígidos A y B en colisión. Debido al soporte de pasador, su cantidad de movimiento lineal total *no* se conserva, pero sí su momento angular total respecto a O.

Momento angular Si otras fuerzas y pares son insignificantes en comparación con los de impacto que A y B ejercen entre sí, su momento angular total respecto a *cualquier* punto fijo O es el mismo antes y después del impacto (véase la Ec. 8.32). Si además A y B ejercen sólo fuerzas entre sí en su punto de impacto P, es decir, ningún par, el momento angular respecto a P de cada cuerpo es el mismo antes y después del impacto (Fig. 8.22). Este resultado se infiere del principio del impulso angular y el momento angular, Ec. (8.29), porque las fuerzas de impacto sobre A y B no ejercen momento respecto a P. Si uno de los cuerpos rígidos tiene un soporte de pasador en un punto O, como en la Fig. 8.21, su momento angular total respecto a O es el mismo antes y después del impacto.

Figura 8.22

Cuerpos rígidos A y B en colisión en P. Si se ejercen sólo fuerzas en P, se conservan el momento angular de A respecto a P y el momento angular de B respecto a P.



Coeficiente de restitución

Si dos cuerpos rígidos se adhieren y mueven como uno solo después de chocar, sus velocidades y velocidades angulares se pueden determinar usando sólo la conservación del momento angular y las relaciones cinemáticas. Éstas no bastan si los cuerpos no se adhieren, pero algunos impactos de este tipo se pueden analizar con el concepto de coeficiente de restitución.

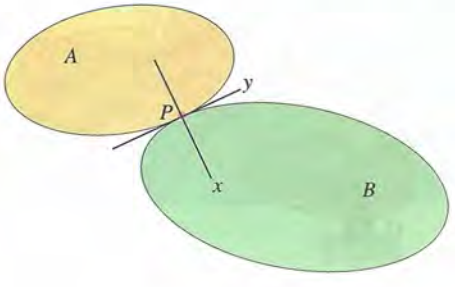
Sea P el punto de contacto de los cuerpos rígidos A y B durante un impacto (Fig. 8.23), y sean sus velocidades en P $\mathbf{v}_{AP}$ y $\mathbf{v}_{BP}$ justo antes del impacto, y $\mathbf{v}'_{AP}$ y $\mathbf{v}'_{BP}$ justo después. El eje x es perpendicular a las superficies de contacto en P. Si la fricción que resulta del impacto es insignificante, podemos mostrar que las componentes de las velocidades normales a la superficie en P se relacionan con el coeficiente de restitución e mediante

$$e = \frac{(\mathbf{v}'_{BP})_x - (\mathbf{v}'_{AP})_x}{(\mathbf{v}_{AP})_x - (\mathbf{v}_{BP})_x}.$$

Para deducir esto debemos considerar los efectos del impacto sobre los cuerpos individuales. Sea t_1 el tiempo en el que entran por primera vez en contacto. Los cuerpos no son realmente rígidos, sino que se deformarán por la colisión. En un tiempo t_C tendrá lugar la deformación máxima y los cuerpos entrarán en una fase de "recuperación" en la que tienden a retomar sus formas originales. Sea t_2 el tiempo en que se separan.

Figura

Cuerpos rígidos A y B en colisión en P. El eje x es perpendicular a las superficies de contacto.



El primer paso es aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal a A y B en los intervalos de tiempo de t_1 a t_C y de t_C a t_2. Sea R la magnitud de la fuerza normal ejercida durante el impacto (Fig. 8.24). Denotamos con $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_{AC}$ y $\mathbf{v}'_A$ la velocidad del centro de masa de A en los tiempos t_1, t_C y t_2, y con $\mathbf{v}_B$, $\mathbf{v}_{BC}$ y $\mathbf{v}'_B$ las velocidades correspondientes del centro de masa de B. Para A tenemos

$$\int_{t_1}^{t_C} -R\,dt = m_A(\mathbf{v}_{AC})_x - m_A(\mathbf{v}_A)_x, \tag{8.34}$$

$$\int_{t_C}^{t_2} -R\,dt = m_A(\mathbf{v}'_A)_x - m_A(\mathbf{v}_{AC})_x, \tag{8.35}$$

y para B,

$$\int_{t_1}^{t_C} R\,dt = m_B(\mathbf{v}_{BC})_x - m_B(\mathbf{v}_B)_x, \tag{8.36}$$

$$\int_{t_C}^{t_2} R\,dt = m_B(\mathbf{v}'_B)_x - m_B(\mathbf{v}_{BC})_x. \tag{8.37}$$

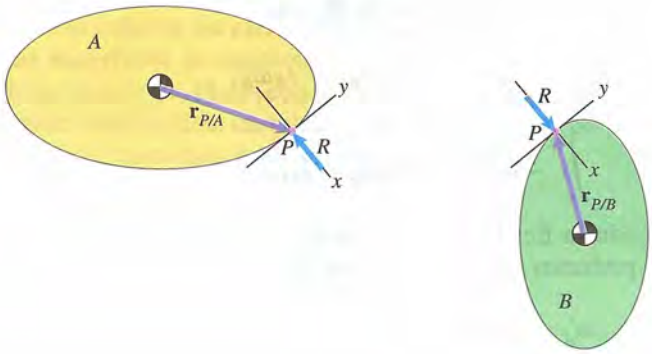


Figura 8.24
Fuerza normal R resultante del impacto.

El coeficiente de restitución es la relación entre el impulso lineal durante la fase de recuperación y el impulso lineal durante la fase de deformación:

$$e = \frac{\displaystyle\int_{t_C}^{t_2} R\,dt}{\displaystyle\int_{t_1}^{t_C} R\,dt}.$$

Si dividimos la Ec. (8.35) entre la Ec. (8.34) y la Ec. (8.37) entre la Ec. (8.36), podemos escribir las ecuaciones resultantes como

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}'_A)_x &= -(\mathbf{v}_A)_x e + (\mathbf{v}_{AC})_x(1+e),\\ (\mathbf{v}'_B)_x &= -(\mathbf{v}_B)_x e + (\mathbf{v}_{BC})_x(1+e).\end{aligned} \tag{8.38}$$

Aplicamos ahora el principio del impulso angular y el momento angular a A y B en los intervalos de tiempo de t_1 a t_C y de t_C a t_2. Denotamos con

ω_A, ω_{AC} y ω'_A la velocidad angular antihoraria de A en los tiempos t_1, t_C y t_2, y con ω_B, ω_{BC} y ω'_B las velocidades angulares correspondientes de B. Escribimos los vectores de posición de P respecto a los centros de masa de A y B como (Fig. 8.24)

$$\mathbf{r}_{P/A} = x_A\,\mathbf{i} + y_A\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}_{P/B} = x_B\,\mathbf{i} + y_B\,\mathbf{j}.$$

Para aplicar a A el principio del impulso angular y el momento angular, colocamos el punto fijo O en el centro de masa de A. Entonces, el momento respecto a O de las fuerzas que el impacto ejerce sobre A es $\mathbf{r}_{P/A} \times (-R\mathbf{i}) = y_A R\mathbf{k}$, y obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_C} y_A R\,dt = I_A\omega_{AC} - I_A\omega_A, \tag{8.39}$$

$$\int_{t_C}^{t_2} y_A R\,dt = I_A\omega'_A - I_A\omega_{AC}. \tag{8.40}$$

Las ecuaciones correspondientes para B, obtenidas colocando el punto fijo O en el centro de masa de B, son

$$\int_{t_1}^{t_C} -y_B R\,dt = I_B\omega_{BC} - I_B\omega_B, \tag{8.41}$$

$$\int_{t_C}^{t_2} -y_B R\,dt = I_B\omega'_B - I_B\omega_{BC}. \tag{8.42}$$

Dividiendo la Ec. (8.40) entre la Ec. (8.39) y la Ec. (8.42) entre la Ec. (8.41), podemos escribir las ecuaciones resultantes como

$$\begin{aligned}\omega'_A &= -\omega_A e + \omega_{AC}(1+e),\\ \omega'_B &= -\omega_B e + \omega_{BC}(1+e).\end{aligned} \tag{8.43}$$

Expresando la velocidad del punto de A en P en función de la velocidad del centro de masa de A y de la velocidad angular de A, y expresando la velocidad del punto de B en P en función de la velocidad del centro de masa de B y de la velocidad angular de B, obtenemos

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_{AP})_x &= (\mathbf{v}_A)_x - \omega_A y_A,\\ (\mathbf{v}'_{AP})_x &= (\mathbf{v}'_A)_x - \omega'_A y_A,\\ (\mathbf{v}_{BP})_x &= (\mathbf{v}_B)_x - \omega_B y_B,\\ (\mathbf{v}'_{BP})_x &= (\mathbf{v}'_B)_x - \omega'_B y_B.\end{aligned} \tag{8.44}$$

En el tiempo t_C, las componentes x de las velocidades de los dos cuerpos son iguales en P, lo que da la relación

$$(\mathbf{v}_{AC})_x - \omega_{AC} y_A = (\mathbf{v}_{BC})_x - \omega_{BC} y_B. \tag{8.45}$$

De las Ecs. (8.44),

$$\frac{(\mathbf{v}'_{BP})_x - (\mathbf{v}'_{AP})_x}{(\mathbf{v}_{AP})_x - (\mathbf{v}_{BP})_x} = \frac{(\mathbf{v}'_B)_x - \omega'_B y_B - (\mathbf{v}'_A)_x + \omega'_A y_A}{(\mathbf{v}_A)_x - \omega_A y_A - (\mathbf{v}_B)_x + \omega_B y_B}.$$

Sustituyendo las Ecs. (8.38) y (8.43) en esta ecuación y agrupando términos, obtenemos

$$\frac{(\mathbf{v}'_{BP})_x - (\mathbf{v}'_{AP})_x}{(\mathbf{v}_{AP})_x - (\mathbf{v}_{BP})_x} = e - \left[\frac{(\mathbf{v}_{AC})_x - \omega_{AC} y_A - (\mathbf{v}_{BC})_x + \omega_{BC} y_B}{(\mathbf{v}_A)_x - \omega_A y_A - (\mathbf{v}_B)_x + \omega_B y_B}\right](e + 1).$$

El término entre corchetes desaparece debido a la Ec. (8.45), y obtenemos la ecuación que relaciona las componentes normales de las velocidades en el punto de contacto con el coeficiente de restitución:

$$\boxed{e = \frac{(\mathbf{v}'_{BP})_x - (\mathbf{v}'_{AP})_x}{(\mathbf{v}_{AP})_x - (\mathbf{v}_{BP})_x}.} \tag{8.46}$$

Para obtener esta ecuación supusimos que las superficies de contacto son lisas, por lo que **la colisión no ejerce fuerza sobre A o B en la dirección tangente a sus superficies de contacto.**

Aunque dedujimos la Ec. (8.46) con la hipótesis de que los movimientos de A y B no están restringidos, también es válida si lo están, por ejemplo si uno de ellos está conectado a un soporte de pasador.

En los siguientes ejemplos analizamos colisiones de cuerpos rígidos en movimiento plano. El método dependerá del tipo de colisión. Si otras fuerzas son insignificantes en comparación con las fuerzas de impacto, la cantidad de movimiento lineal total se conserva. Si otras fuerzas y pares son insignificantes en comparación con las fuerzas y pares de impacto, el momento angular total respecto a cualquier punto fijo se conserva. Si además se ejercen sólo fuerzas en el punto de impacto P, el momento angular respecto a P de cada cuerpo rígido se conserva. Si uno de los cuerpos rígidos tiene un soporte de pasador en un punto O, el momento angular total respecto a O se conserva. Si se supone que el impacto no ejerce fuerzas sobre los cuerpos en colisión en la dirección tangencial a su superficie de contacto, el coeficiente de restitución se relaciona, por medio de la Ec. (8.46), las componentes normales de las velocidades en el punto de contacto.

Ejemplo 8.6

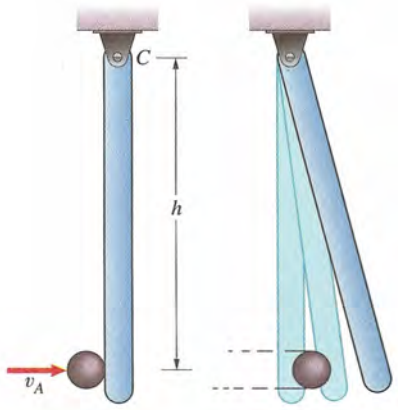


Figura 8.25

La esfera homogénea de la Fig. 8.25 se está moviendo horizontalmente con velocidad v_A y velocidad angular cero cuando golpea la barra esbelta en reposo. La esfera tiene masa m_A y la barra tiene masa m_B y longitud l. El coeficiente de restitución del impacto es e.

(a) ¿Cuál es la velocidad angular de la barra después del impacto?

(b) Si la duración del impacto es Δt, ¿qué fuerza horizontal media ejerce el soporte de pasador C sobre la barra como resultado del impacto?

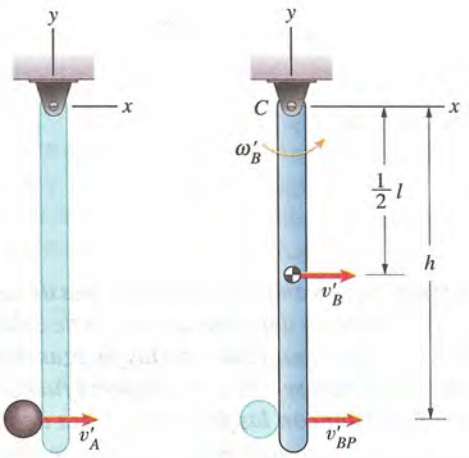
ESTRATEGIA

(a) De la definición del coeficiente de restitución, podemos obtener una ecuación que relacione la velocidad horizontal de la esfera con la velocidad de la barra en el punto de impacto después de que ocurre la colisión. Además, el momento angular total de la esfera y la barra respecto al pasador C se conserva. Con estas dos ecuaciones y las relaciones cinemáticas podemos determinar la velocidad de la esfera y la velocidad angular de la barra. (b) Podemos determinar la fuerza media que ejerce el soporte sobre la barra aplicando a la barra el principio del impulso angular y el momento angular.

SOLUCIÓN

(a) En la Fig. (a) mostramos las velocidades justo después del impacto, donde v'_{BP} es la velocidad de la barra en el punto de impacto. De la definición del coeficiente de restitución obtenemos

$$e = \frac{v'_{BP} - v'_A}{v_A - 0}.$$



(a) Velocidades de la esfera y la barra después del impacto.

La ecuación de la conservación del momento angular total respecto a C es

$$(\mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A)\cdot\mathbf{k} + I_A\omega_A + (\mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B)\cdot\mathbf{k} + I_B\omega_B$$

$$= (\mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}'_A)\cdot\mathbf{k} + I_A\omega'_A + (\mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}'_B)\cdot\mathbf{k} + I_B\omega'_B:$$

$$(-h\,\mathbf{j} \times m_A v_A\,\mathbf{i})\cdot\mathbf{k} = (-h\,\mathbf{j} \times m_A v'_A\,\mathbf{i})\cdot\mathbf{k} + \left(-\frac{1}{2}l\,\mathbf{j} \times m_B v'_B\,\mathbf{i}\right)\cdot\mathbf{k} + I_B\omega'_B.$$

Efectuando las operaciones vectoriales obtenemos

$$hm_A v_A = hm_A v'_A + \frac{1}{2}lm_B v'_B + I_B\omega'_B.$$

Observe en la Fig. (a) que las velocidades v'_B y v'_{BP} se relacionan con la velocidad angular de la barra ω'_B mediante

$$v'_B = \frac{1}{2}l\omega'_B, \qquad v'_{BP} = h\omega'_B.$$

Tenemos ahora cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas v'_A, v'_B, v'_{BP} y ω'_B. Resolviéndolas para la velocidad angular de la barra y usando la expresión $I_B = \frac{1}{12}m_B l^2$, obtenemos

$$\omega'_B = \frac{(1+e)hm_A v_A}{h^2 m_A + \frac{1}{3}m_B l^2}.$$

(b) Consideremos que las fuerzas sobre el diagrama de cuerpo libre de la barra de la Fig. (b) representan las fuerzas medias ejercidas durante el impacto. Aplicamos el principio del impulso angular y del momento angular, en la forma dada por la Ec. (8.31), respecto al punto del impacto:

$$(t_2 - t_1)(\Sigma M_P)_{\text{av}} = [(\mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}'_B)\cdot\mathbf{k} + I_B\omega'_B] - [(\mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B)\cdot\mathbf{k} + I_B\omega_B]:$$

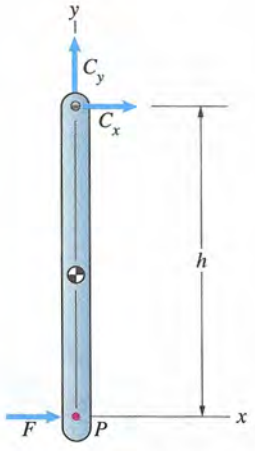
$$\Delta t(-hC_x) = \left[\left(h - \frac{1}{2}l\right)\mathbf{j} \times m_B v'_B\,\mathbf{i}\right]\cdot\mathbf{k} + I_B\omega'_B - 0.$$

Despejando C_x obtenemos

$$C_x = \frac{(h - \frac{1}{2}l)m_B v'_B - I_B\omega'_B}{h\Delta t}.$$

Usando la solución para ω'_B de la parte (a) y la relación $v'_B = \frac{1}{2}l\omega'_B$, obtenemos la fuerza horizontal media ejercida por el soporte:

$$C_x = \frac{(1+e)(\frac{1}{2}h - \frac{1}{3}l)lm_A m_B v_A}{(h^2 m_A + \frac{1}{3}m_B l^2)\Delta t}.$$



(b) Fuerzas medias ejercidas sobre la barra durante el impacto.

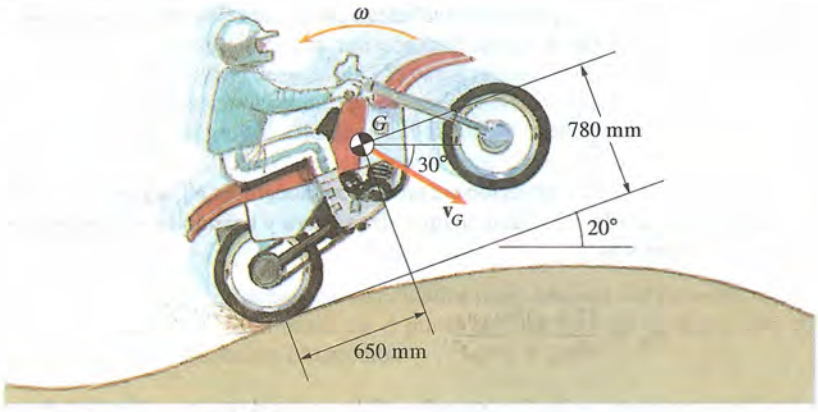
COMENTARIO

Observe que la fuerza horizontal media ejercida por el soporte sobre la barra puede tener cualquier dirección o puede ser cero, dependiendo del lugar en que ocurra el impacto. La fuerza es cero si $h = \frac{2}{3}l$.

Ejemplo 8.7

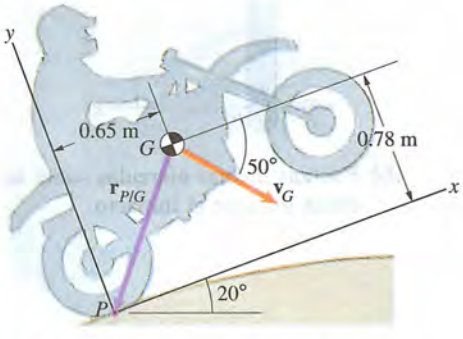
La masa combinada de la motocicleta y el conductor de la Fig. 8.26 es m = 170 kg y su momento de inercia combinado respecto a su centro de masa es de 22 kg-m^2. Después de saltar un obstáculo, la motocicleta y el conductor están en la posición mostrada justo antes de que la rueda trasera toque el suelo. La velocidad de su centro de masa tiene magnitud $|\mathbf{v}_G|$ = 8.8 m/s y velocidad angular ω = 0.2 rad/s. Si ambos se modelan como un solo cuerpo rígido y el coeficiente de restitución del impacto es e = 0.8, ¿cuáles son la velocidad angular ω' y la velocidad $\mathbf{v}'_G$ después del impacto? Ignore la componente tangencial de la fuerza ejercida sobre la rueda de la motocicleta durante el impacto.

Figura 8.26



ESTRATEGIA

Como se ignora la componente tangencial de la fuerza sobre la rueda de la motocicleta durante el impacto, la componente de la velocidad del centro de masa paralela al suelo no cambia con el impacto. El coeficiente de restitución relaciona la velocidad de la motocicleta normal al suelo *en el punto de impacto* antes de éste con su valor después del impacto. Además, la fuerza del impacto no ejerce momento respecto al punto de impacto, por lo que el momento angular de la motocicleta respecto a ese punto se conserva (suponemos que el impacto es tan breve que el impulso angular debido al peso es insignificante). Con esas tres relaciones podemos determinar las dos componentes de la velocidad del centro de masa y la velocidad angular después del impacto.



(a) Eje x del sistema coordenado, alineado con la tangente al terreno en P.

SOLUCIÓN

En la Fig. (a) alineamos un sistema coordenado paralelo y perpendicular al terreno en el punto P, donde ocurre el impacto. Sean $\mathbf{v}_G = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}'_G = v'_x\mathbf{i} + v'_y\mathbf{j}$, las componentes de la velocidad del centro de masa antes y después del impacto, respectivamente. Las componentes v_x y v_y son

$$v_x = 8.8 \cos 50° = 5.66 \text{ m/s},$$

$$v_y = -8.8 \operatorname{sen} 50° = -6.74 \text{ m/s}.$$

Como la componente de la fuerza del impacto tangencial al terreno es insignificante, la componente x de la velocidad del centro de masa no cambia:

$$v'_x = v_x = 5.66 \text{ m/s}.$$

Podemos expresar la componente y de la velocidad de la rueda en P antes del impacto en función de la velocidad del centro de masa y la velocidad angular (Fig. a):

$$\begin{aligned}\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_P &= \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/G}) \\ &= \mathbf{j} \cdot \left\{ v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -0.65 & -0.78 & 0 \end{vmatrix} \right\} \\ &= v_y - 0.65\omega.\end{aligned}$$

(Observe que esta expresión da la componente y de la velocidad en P aun cuando la rueda está resbalando.) La componente y de la velocidad de la rueda en P después del impacto es

$$\begin{aligned}\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}'_P &= \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v}'_G + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{P/G}) \\ &= v'_y - 0.65\omega'.\end{aligned}$$

El coeficiente de restitución relaciona las componentes y de la velocidad de la rueda en P antes y después del impacto:

$$e = \frac{-(\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}'_P)}{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_P)} = \frac{-(v'_y - 0.65\omega')}{(v_y - 0.65\omega)}. \tag{8.47}$$

La fuerza del impacto no ejerce momento respecto a P, por lo que el momento angular respecto a P se conserva:

$$[(\mathbf{r}_{G/P} \times m\mathbf{v}_G) \cdot \mathbf{k} + I\omega] = [(\mathbf{r}_{G/P} \times m\mathbf{v}'_G) \cdot \mathbf{k} + I\omega'],$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.65 & 0.78 & 0 \\ mv_x & mv_y & 0 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} + I\omega = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.65 & 0.78 & 0 \\ mv'_x & mv'_y & 0 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} + I\omega'.$$

Desarrollando los determinantes y evaluando los productos escalares obtenemos

$$0.65mv_y - 0.78mv_x + I\omega = 0.65mv'_y - 0.78mv'_x + I\omega'. \tag{8.48}$$

Como ya determinamos v'_x, podemos resolver las Ecs. (8.47) y (8.48) para v'_y y ω'. Los resultados son

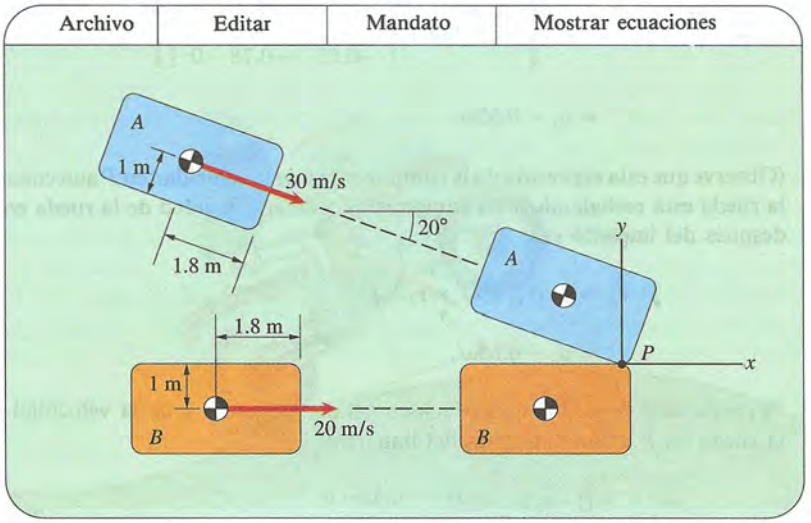
$$v'_y = -3.84 \text{ m/s}, \qquad \omega' = -14.37 \text{ rad/s}.$$

La velocidad del centro de masa después del impacto es $\mathbf{v}'_G = 5.66\mathbf{i} - 3.84\mathbf{j}$ m/s, y la velocidad angular es 14.37 rad/s en dirección horaria.

Ejemplo 8.8

Se simula una colisión entre dos autos de 1600 kg modelándolos como cuerpos rígidos (Fig. 8.27). El momento de inercia de masa de cada uno respecto a su centro de masa es 960 kg-m^2. Se supone que las superficies de contacto en P son lisas y paralelas al eje x, y que el coeficiente de restitución $e = 0.2$. ¿Cuáles son las velocidades angulares de los autos y las velocidades de sus centros de masa después de la colisión?

Figura 8.27



ESTRATEGIA

Como las superficies de contacto son lisas, las componentes x de las velocidades de los centros de masa no cambian con el impacto. Las componentes y de las velocidades deben satisfacer la conservación de la cantidad de movimiento lineal, y las componentes y de las velocidades *en el punto del impacto* antes y después de éste se relacionan mediante el coeficiente de restitución. La fuerza del impacto no ejerce momento respecto a P sobre ninguno de los autos, por lo que el momento angular de cada uno respecto a P se conserva. De estas condiciones y de las relaciones cinemáticas entre las velocidades de los centros de masa y las velocidades en P, podemos determinar las velocidades angulares y las velocidades de los centros de masa después del impacto.

SOLUCIÓN

Las componentes de las velocidades de los centros de masa antes del impacto son

$$\mathbf{v}_A = 30\cos 20^\circ\,\mathbf{i} - 30\,\text{sen}\,20^\circ\,\mathbf{j}$$

$$= 28.2\,\mathbf{i} - 10.3\,\mathbf{j}\ \text{(m/s)}$$

y

$$\mathbf{v}_B = 20\,\mathbf{i}\ \text{(m/s)}.$$

Las componentes x de las velocidades no cambian con el impacto:

$$v'_{Ax} = v_{Ax} = 28.2\ \text{m/s}, \qquad v'_{Bx} = v_{Bx} = 20\ \text{m/s}.$$

Las componentes y de las velocidades deben satisfacer la conservación de la cantidad de movimiento lineal:

$$m_A v_{Ay} + m_B v_{By} = m_A v'_{Ay} + m_B v'_{By}. \tag{8.49}$$

Sean $\mathbf{v}_{AP}$ y $\mathbf{v}_{BP}$ las velocidades de los dos autos en P antes de la colisión. El coeficiente de restitución $e = 0.2$ relaciona sus componentes y en P:

$$0.2 = \frac{v'_{BPy} - v'_{APy}}{v_{APy} - v_{BPy}} \tag{8.50}$$

Podemos expresar las velocidades en P después del impacto en función de las velocidades de los centros de masa y las velocidades angulares después del impacto (Fig. a). La posición de P respecto al centro de masa del auto A es

$$\mathbf{r}_{P/A} = [(1.8)\cos 20° - (1)\,\text{sen}\,20°]\,\mathbf{i} - [(1.8)\,\text{sen}\,20° + (1)\cos 20°]\,\mathbf{j}$$

$$= 1.35\,\mathbf{i} - 1.56\,\mathbf{j}\ (\text{m}).$$

Por tanto, la velocidad del punto P del auto A después del impacto es

$$\mathbf{v}'_{AP} = \mathbf{v}'_A + \boldsymbol{\omega}'_A \times \mathbf{r}_{P/A}:$$

$$v'_{APx}\,\mathbf{i} + v'_{APy}\,\mathbf{j} = v'_{Ax}\,\mathbf{i} + v'_{Ay}\,\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega'_A \\ 1.35 & -1.56 & 0 \end{vmatrix}.$$

Igualando las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ en esta ecuación obtenemos

$$v'_{APx} = v'_{Ax} + 1.56\omega'_A, \qquad v'_{APy} = v'_{Ay} + 1.35\omega'_A. \tag{8.51}$$

La posición de P respecto al centro de masa del auto B es

$$\mathbf{r}_{P/B} = 1.8\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\ (\text{m}).$$

La velocidad del punto P del auto B después del impacto se puede expresar como

$$\mathbf{v}'_{BP} = \mathbf{v}'_B + \boldsymbol{\omega}'_B \times \mathbf{r}_{P/B}:$$

$$v'_{BPx}\,\mathbf{i} + v'_{BPy}\,\mathbf{j} = v'_{Bx}\,\mathbf{i} + v'_{By}\,\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega'_B \\ 1.8 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

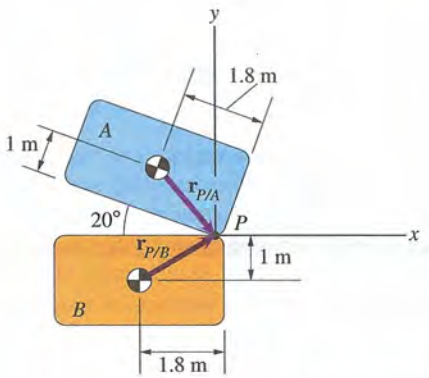
Igualando las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ obtenemos

$$v'_{BPx} = v'_{Bx} - \omega'_B, \qquad v'_{BPy} = v'_{By} + 1.8\omega'_B. \tag{8.52}$$

El momento angular del auto A respecto a P se conserva:

$$[(\mathbf{r}_{A/P} \times m_A\mathbf{v}_A)\cdot\mathbf{k} + I_A\omega_A] = [(\mathbf{r}_{A/P} \times m_A\mathbf{v}'_A)\cdot\mathbf{k} + I_A\omega'_A],$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1.35 & 1.56 & 0 \\ m_A v_{Ax} & m_A v_{Ay} & 0 \end{vmatrix}\cdot\mathbf{k} + 0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1.35 & 1.56 & 0 \\ m_A v'_{Ax} & m_A v'_{Ay} & 0 \end{vmatrix}\cdot\mathbf{k} + I_A\omega'_A.$$



(a) Vectores de posición de P respecto al centro de masa.

Desarrollando los determinantes y evaluando los productos escalares obtenemos

$$\begin{aligned} &-1.35m_A v_{Ay} - 1.56m_A v_{Ax} \\ &= -1.35m_A v'_{Ay} - 1.56m_A v'_{Ax} + I_A\omega'_A. \end{aligned} \tag{8.53}$$

El momento angular del auto B respecto a P también se conserva,

$$[(\mathbf{r}_{B/P} \times m_B\mathbf{v}_B)\cdot\mathbf{k} + I_B\omega_B] = [(\mathbf{r}_{B/P} \times m_B\mathbf{v}'_B)\cdot\mathbf{k} + I_B\omega'_B]:$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1.8 & -1 & 0 \\ m_B v_{Bx} & 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\mathbf{k} + 0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1.8 & -1 & 0 \\ m_B v'_{Bx} & m_B v'_{By} & 0 \end{vmatrix}\cdot\mathbf{k} + I_B\omega'_B.$$

De esta ecuación obtenemos

$$m_B v_{Bx} = -1.8m_B v'_{By} + m_B v'_{Bx} + I_B\omega'_B. \tag{8.54}$$

Podemos resolver las Ecs. (8.49) a (8.54) para $\mathbf{v}'_A$, $\mathbf{v}'_{AP}$, ω'_A, $\mathbf{v}'_B$, $\mathbf{v}'_{BP}$ y ω'_B. Los resultados para las velocidades de los centros de masa de los autos y sus velocidades angulares son

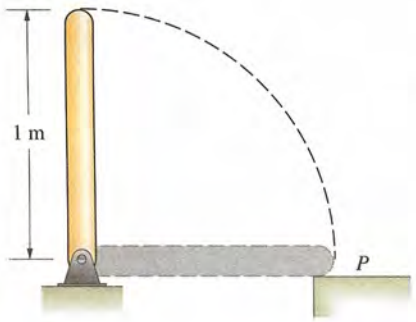
$$\mathbf{v}'_A = 28.2\,\mathbf{i} - 9.08\,\mathbf{j}\ \text{(m/s)}, \qquad \omega'_A = \ \ 2.65\ \text{rad/s},$$

$$\mathbf{v}'_B = 20.0\,\mathbf{i} - 1.18\,\mathbf{j}\ \text{(m/s)}, \qquad \omega'_B = -3.54\ \text{rad/s}.$$

Problemas

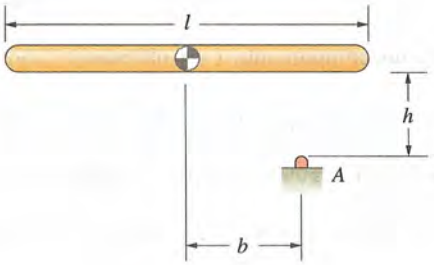
8.56 En la Fig. P8.56, la barra esbelta de 2 kg parte del reposo en la posición vertical y cae, golpeando la superficie lisa en P. El coeficiente de restitución del impacto es $e = 0.5$. Al rebotar la barra, ¿a través de qué ángulo respecto a la horizontal girará?

Estrategia: Use el coeficiente de restitución para relacionar la velocidad de la barra en P justo después del impacto con su valor justo antes.



P8.56

8.57 La barra esbelta de masa m cae del reposo en la posición mostrada y golpea el tope liso en A. El coeficiente de restitución es e. Demuestre que la velocidad del centro de masa de la barra es cero inmediatamente después del impacto si $b^2 = el^2/12$.

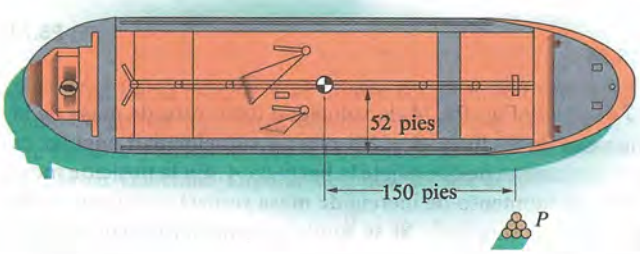


P8.57

8.58 En el Prob. 8.57, si $m = 2$ kg, $l = 1$ m, $b = 350$ mm, $h = 200$ mm, y el coeficiente de restitución es $e = 0.4$, determine la velocidad angular de la barra después del impacto.

8.59 Si la duración del impacto descrito en el Prob. 8.58 es de 0.02 s, ¿qué fuerza media ejerce el tope en A sobre la barra durante el impacto?

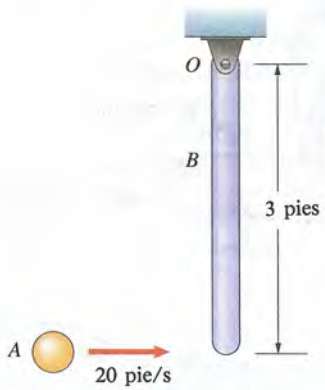
8.60 El viento ocasiona que el barco de 600 ton ilustrado se mueva lateralmente a 1 pie/s y golpee el muelle fijo en P. El momento de inercia de masa del barco respecto a su centro de masa es de 3×10^8 slug-pie^2, y el coeficiente de restitución del impacto es $e = 0.2$. ¿Cuál es la velocidad angular del barco después del impacto?



P8.60

8.61 En el Prob. 8.60, si la duración del impacto del barco con el muelle es de 10 s, ¿cuál es el valor medio de la fuerza ejercida por el impacto sobre el barco?

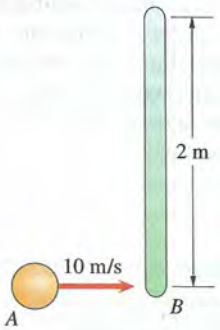
8.62 Una esfera de 1 lb que se mueve a 20 pie/s golpea el extremo de una barra esbelta B en reposo de 10 lb. La barra está articulada a un soporte fijo en O. ¿Cuál es la velocidad angular de la barra después del impacto si la esfera se adhiere a la barra?



P8.62

8.63 En el Prob. 8.62, determine la velocidad de la esfera lisa y la velocidad angular de la barra después del impacto si el coeficiente de restitución es $e = 0.8$.

8.64 La esfera A de 1 kg se mueve a 10 m/s cuando golpea el extremo de la barra esbelta B en reposo de 4 kg. Si la esfera queda adherida, ¿qué velocidad angular adquiere la barra?

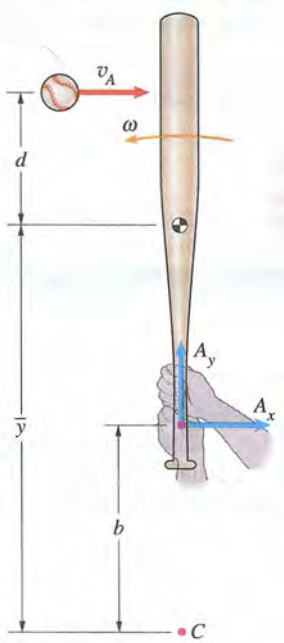


P8.64

8.65 En Prob. 8.64, ¿cuál es la velocidad angular de la barra después del impacto si el coeficiente de restitución es $e = 0.5$?

8.66 En el Prob. 8.64, determine la energía cinética total de la esfera y de la barra antes y después del impacto si (a) $e = 0.5$; (b) $e = 1$.

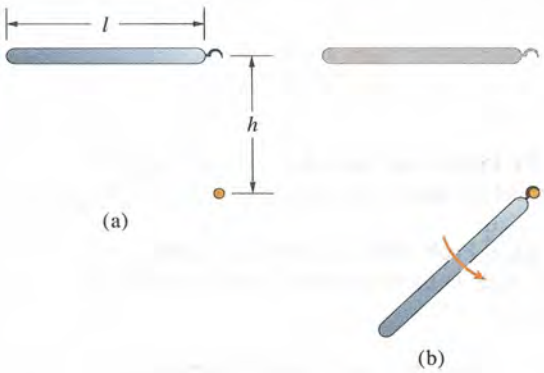
8.67 La pelota de 5 onzas se desplaza con velocidad $v_A = 80$ pie/s perpendicular al bate justo antes del impacto. El jugador blande el bate de 31 onzas con velocidad angular $\omega = 6\pi$ rad/s. El punto C es el centro instantáneo del bate antes y después del impacto. Las distancias $b = 14$ pulg y $\bar{y} = 26$ pulg. El momento de inercia de masa del bate respecto a su centro de masa es $I_B = 0.033$ slug-pie^2. El coeficiente de restitución es $e = 0.6$ y la duración del impacto es de 0.008 s. Determine la magnitud de la velocidad de la pelota después del impacto y la fuerza media A_x que ejerce el jugador sobre el bate durante el impacto si (a) $d = 0$; (b) $d = 3$ pulg; (c) $d = 8$ pulg.



P8.67

8.68 En el Prob. 8.67 demuestre que la fuerza A_x es cero si $d = I_B/(m_B\bar{y})$, donde m_B es la masa del bate.

8.69 Una barra esbelta de masa m se libera del reposo en posición horizontal a una altura h sobre una clavija (Fig. a). Un pequeño gancho en el extremo de la barra se engarza a la clavija, y la barra oscila desde la clavija (Fig. b). ¿Qué altura mínima h es necesaria para que la barra oscile 270° desde la posición en que se engarza a la clavija?



P8.69

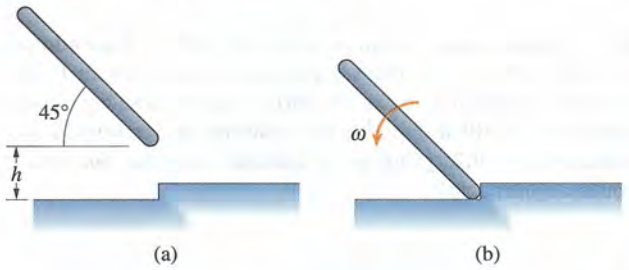
8.70 ¿Se conserva la energía en el Prob. 8.69? Si no, ¿cuánta energía se pierde?

8.71 Una rueda que se puede modelar como un disco cilíndrico homogéneo de 1 slug rueda a 10 pie/s sobre una superficie horizontal hacia un escalón de 6 pulg. Si la rueda permanece en contacto con el escalón y no resbala mientras rueda sobre él, ¿cuál es la velocidad de la rueda una vez que está sobre el escalón?

P8.71

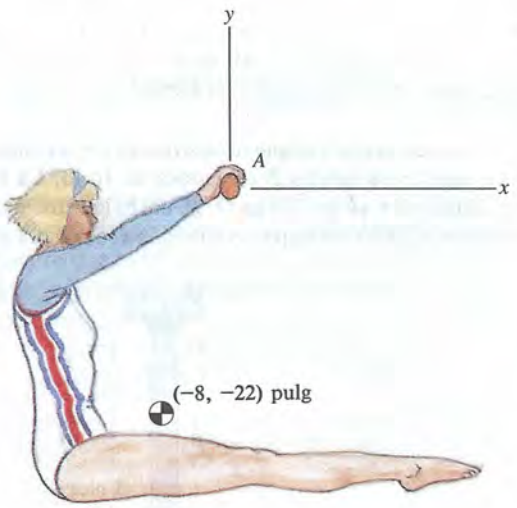
8.72 En el Prob. 8.71, ¿cuál es la velocidad mínima que la rueda debe tener al rodar hacia el escalón para subirlo?

8.73 La barra esbelta se libera del reposo en la posición mostrada en la Fig. (a) y cae una distancia $h = 1$ pie. Cuando la barra pega en el piso, su extremo queda soportado por una depresión y permanece sobre el piso (Fig. b). La longitud de la barra es de 1 pie y su peso es de 4 onzas. ¿Cuál es su velocidad angular ω justo después de que toca el piso?



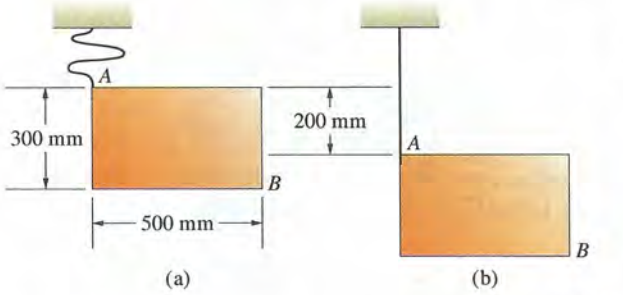
P8.73

8.74 En la Fig. P8.74, la velocidad del centro de masa de la gimnasta de 90 lb es $4\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ pie/s y su velocidad angular es cero justo antes de que sujete la barra en A. En la posición mostrada, su momento de inercia de masa respecto a su centro de masa es 1.8 slug-pie^2. Si se modela como un cuerpo rígido, ¿cuál es la velocidad de su centro de masa y su velocidad angular justo antes de que sujete la barra?



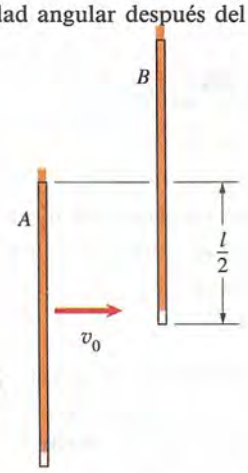
P8.74

8.75 La placa rectangular homogénea de 20 kg mostrada se libera del reposo (Fig. a) y cae 200 mm antes de que la cuerda unida a la esquina A se tense (Fig. b). Suponiendo que la componente vertical de la velocidad de A es cero justo después de que la cuerda se tensa, determine la velocidad angular de la placa y la magnitud de la velocidad de la esquina B en ese instante.



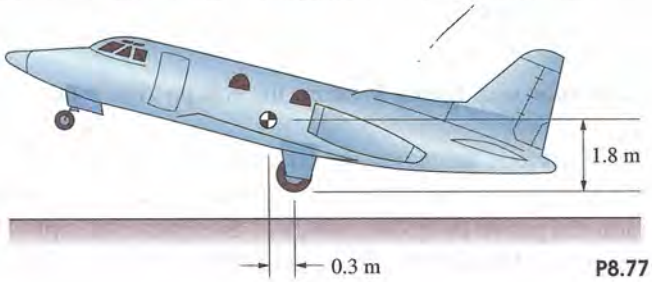
P8.75

8.76 Una barra esbelta A se mueve sin girar con velocidad v_0 cuando golpea una barra esbelta B en reposo. Cada barra tiene masa m y longitud l. Si las barras se adhieren al chocar, ¿cuál es su velocidad angular después del impacto?



P8.76

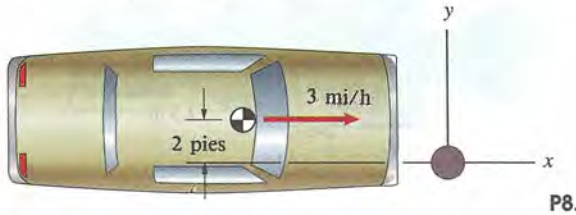
8.77 En la Fig. P8.77 la velocidad horizontal del avión al aterrizar es de 50 m/s, su velocidad vertical (razón de descenso) es de 2 m/s y su velocidad angular es cero. La masa del avión es de 12 Mg y el momento de inercia de masa respecto a su centro de masa es 1×10^5 kg-m^2. Cuando las ruedas traseras tocan la pista, permanecen en contacto con ella. Ignorando la fuerza horizontal ejercida por la pista sobre las ruedas, determine la velocidad angular del avión justo después de aterrizar.



P8.77

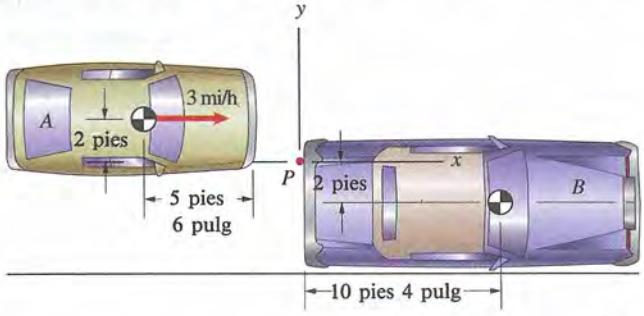
8.78 Determine la velocidad angular del avión del Prob. 8.77 inmediatamente después de su aterrizaje si las ruedas no permanecen en contacto con la pista y el coeficiente de restitución del impacto es $e = 0.4$.

8.79 Un coche de 2800 lb al derrapar en hielo golpea un poste de concreto a 3 mi/h. El momento de inercia del coche respecto a su centro de masa es de 1800 slug-pie^2. Si las superficies impactantes son lisas y paralelas al eje y, y el coeficiente de restitución es $e = 0.8$, ¿cuál es la velocidad angular del coche y la velocidad de su centro de masa después del impacto?



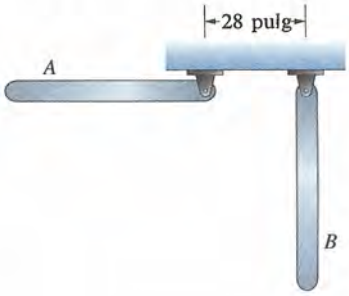
P8.79

8.80 Circulando en una calle cubierta de hielo, el auto (A) de 2800 lb de un estudiante golpeó el Rolls-Royce (B) de 6000 lb estacionado del rector. El punto de impacto es P. Suponga que las superficies de impacto son lisas y paralelas al eje y, y que el coeficiente de restitución del impacto es $e = 0.5$. Los momentos de inercia de los automóviles respecto a sus centros de masa son $I_A = 1800$ slug-pie^2 e $I_B = 5600$ slug-pie^2. Determine las velocidades angulares de los automóviles y las velocidades de sus centros de masa después de la colisión.



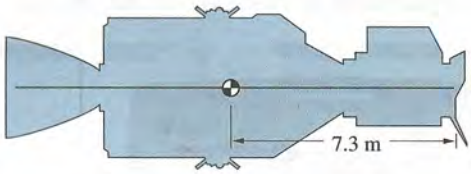
P8.80

8.81 Cada barra esbelta tiene 48 pulg de longitud y pesa 20 lb. La barra A se libera de la posición horizontal mostrada. Las barras son lisas y el coeficiente de restitución del impacto es $e = 0.8$. Determine el ángulo que gira B después del impacto.

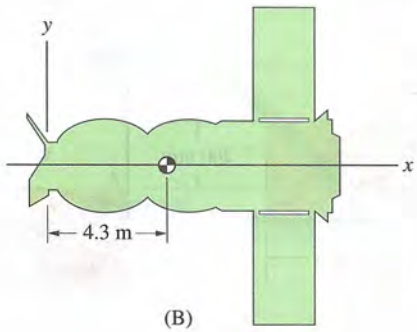


P8.81

8.82 En la Fig. P8.82 la nave espacial A se acerca a la B. La masa de A es $m_A = 18$ Mg y su momento de inercia de masa respecto al eje que pasa por su centro de masa paralelo al eje z es $I_A = 114$ Mg-m^2. La masa de B es $m_B = 6.6$ Mg y su momento de inercia de masa respecto al eje por su centro de masa paralelo al eje z es $I_B = 70$ Mg-m^2. Respecto al marco de referencia mostrado, B está en reposo y A se le aproxima con velocidad $\mathbf{v}_A = 0.2\mathbf{i} + 0.05\mathbf{j}$ (m/s) y sin velocidad angular. ¿Cuál es su velocidad angular después de que se acoplan?



(A)



(B)

P8.82

Resumen del capítulo

Trabajo y energía

El trabajo realizado por fuerzas y pares externos cuando un cuerpo rígido se mueve entre dos posiciones es igual al cambio en su energía cinética:

$$U = T_2 - T_1. \qquad \text{Ec. (8.4)}$$

El trabajo realizado por fuerzas y pares externos e internos sobre un sistema de cuerpos rígidos es igual al cambio en la energía cinética total.

La energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano general es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \qquad \text{Ec. (8.12)}$$

donde v es la magnitud de la velocidad del centro de masa e I es el momento de inercia respecto al centro de masa. Si un cuerpo rígido gira respecto a un eje fijo O, su energía cinética también se puede expresar como

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2. \qquad \text{Ec. (8.13)}$$

El trabajo efectuado por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre un cuerpo rígido es

$$U = \int_{(\mathbf{r}_p)_1}^{(\mathbf{r}_p)_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_p, \qquad \text{Ec. (8.14)}$$

donde $\mathbf{r}_p$ es la posición del *punto de aplicación* de $\mathbf{F}$. Si el punto de aplicación está en reposo, o si la dirección de su movimiento es perpendicular a $\mathbf{F}$, no se realiza trabajo.

El trabajo efectuado por un par M sobre un cuerpo rígido en movimiento plano al girar de θ_1 a θ_2 en la dirección de M es

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta. \qquad \text{Ec. (8.16)}$$

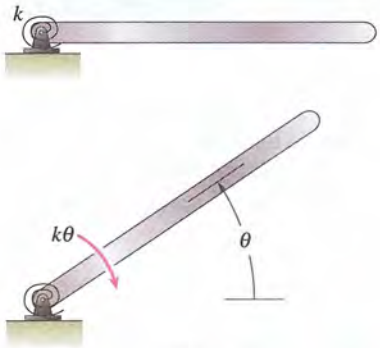
Un par M es conservativo si existe una energía potencial V tal que

$$M\, d\theta = -dV. \qquad \text{Ec. (8.17)}$$

La energía potencial de un resorte helicoidal lineal que ejerce un par $k\theta$ en la dirección opuesta a su desplazamiento angular θ (Fig. a) es $\frac{1}{2}k\theta^2$.

Si las fuerzas y pares que trabajan sobre un cuerpo rígido son conservativas, la suma de las energías cinética y potencial totales es constante:

$$T + V = \text{constante}. \qquad \text{Ec. (8.19)}$$



(a)

Potencia

La potencia transmitida por una fuerza $\mathbf{F}$ a un cuerpo rígido es

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_p, \qquad \text{Ec. (8.20)}$$

donde $\mathbf{v}_p$ es la velocidad del punto de aplicación de $\mathbf{F}$. La potencia transmitida por un par M a un cuerpo rígido en movimiento plano es

$$P = M\omega. \qquad \text{Ec. (8.21)}$$

La potencia media transmitida a un cuerpo rígido durante un intervalo de tiempo es igual al cambio en su energía cinética, o al trabajo total efectuado, dividido entre el intervalo de tiempo:

$$P_{\text{media}} = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1} = \frac{U}{t_2 - t_1}. \qquad \text{Ec. (8.22)}$$

Impulso y cantidad de movimiento

El principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal establece que el impulso lineal aplicado a un cuerpo rígido durante un intervalo de tiempo es igual al cambio en su cantidad de movimiento lineal:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1. \qquad \text{Ec. (8.25)}$$

Este resultado también se puede expresar en función del promedio respecto al tiempo de la fuerza total:

$$(t_2 - t_1)\Sigma\mathbf{F}_{\text{media}} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1. \qquad \text{Ec. (8.26)}$$

Si las únicas fuerzas que actúan sobre dos cuerpos rígidos A y B son las fuerzas que ejercen entre sí, o si otras fuerzas son insignificantes, su cantidad de movimiento lineal total se conserva:

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = \text{constante}. \qquad \text{Ec. (8.27)}$$

El principio del impulso angular y el momento angular establece que el impulso angular respecto a un punto fijo O aplicado a un cuerpo rígido durante un intervalo de tiempo es igual al cambio en su momento angular respecto a O:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O \, dt = [(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_2 - [(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_1. \quad \text{Ec. (8.29)}$$

El vector unitario $\mathbf{k}$ es perpendicular al plano del movimiento. Señalando con el pulgar de la mano derecha en la dirección de $\mathbf{k}$, los dedos se curvan en la dirección positiva de ω. Este principio también se puede expresar en función del momento medio respecto a O:

$$(t_2 - t_1)(\Sigma M_O)_{\text{media}} = [(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_2 - [(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} + I\omega]_1. \quad \text{Ec. (8.31)}$$

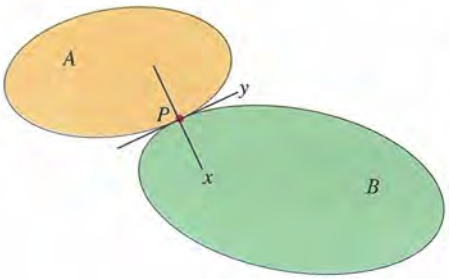
Si las únicas fuerzas y pares que actúan sobre dos cuerpos rígidos A y B en movimiento plano son las fuerzas y los pares que se ejercen entre sí, o si otras fuerzas y pares son insignificantes, su momento angular total respecto a cualquier punto fijo O se conserva:

$$(\mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{k} + I_A\omega_A + (\mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{k} + I_B\omega_B = \text{constante}. \quad \text{Ec. (8.32)}$$

Este resultado es válido aun cuando A y B estén sometidos a fuerzas y pares externos considerables si el momento total respecto a O debido a las fuerzas y los pares externos es igual a cero.

Impactos

Supongamos que dos cuerpos rígidos A y B, en movimiento bidimensional en el mismo plano, chocan. Si otras fuerzas y pares son insignificantes en comparación con las fuerzas y los pares del impacto que A y B ejercen entre sí, su cantidad de movimiento lineal total y su momento angular total respecto a cualquier punto fijo O se conservan. Además, si A y B ejercen sólo fuerzas entre sí en su punto de impacto P, el momento angular respecto a P de *cada* cuerpo rígido se conserva. Si uno de los cuerpos rígidos tiene un soporte de pasador en un punto O, su momento angular total respecto a ese punto se conserva.



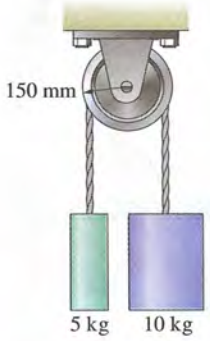
(b)

Sea P el punto de impacto (Fig. b). Las componentes normales de las velocidades en P se relacionan con el coeficiente de restitución e mediante

$$e = \frac{(\mathbf{v}'_{BP})_x - (\mathbf{v}'_{AP})_x}{(\mathbf{v}_{AP})_x - (\mathbf{v}_{BP})_x}. \quad \text{Ec. (8.46)}$$

Problemas de repaso

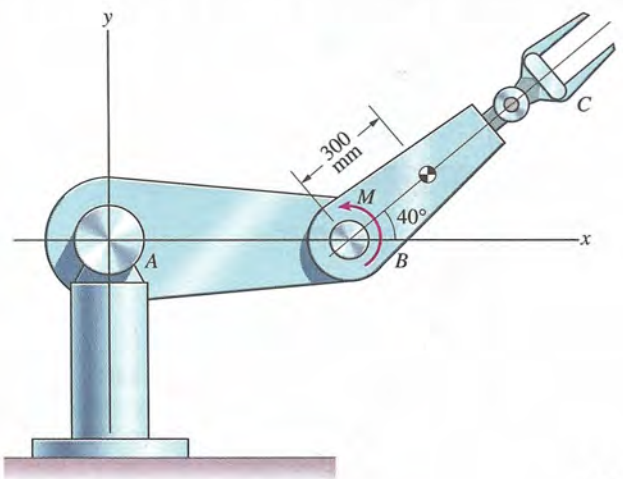
8.83 El momento de inercia de masa de la polea mostrada es de 0.2 kg-m. El sistema se libera del reposo. Use el principio del trabajo y la energía para determinar la velocidad del cilindro cuando ha caído 1 m.



P8.83

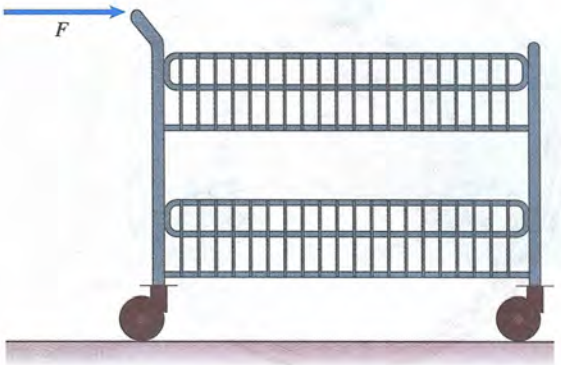
8.84 Use los principios de la cantidad de movimiento para determinar la velocidad del cilindro de 10 kg del Prob. 8.83 un segundo después de que el sistema se libera del reposo.

8.85 El brazo BC mostrado tiene una masa de 12 kg y su momento de inercia de masa respecto a su centro de masa es de 3 kg-m^2. El punto B está en reposo. El brazo BC está inicialmente alineado con el eje x (horizontal) con velocidad angular cero, y un par constante M aplicado en B lo hace girar hacia arriba. Cuando está en la posición mostrada, su velocidad angular antihoraria es de 2 rad/s. Determine M.



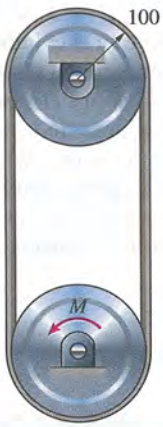
P8.85

8.86 El carrito de la figura está en reposo cuando se le aplica una fuerza constante F. ¿Cuál será su velocidad cuando haya rodado una distancia b? La masa del cuerpo del carrito es m_c y cada una de las cuatro ruedas tiene masa m, radio R y momento de inercia de masa I.



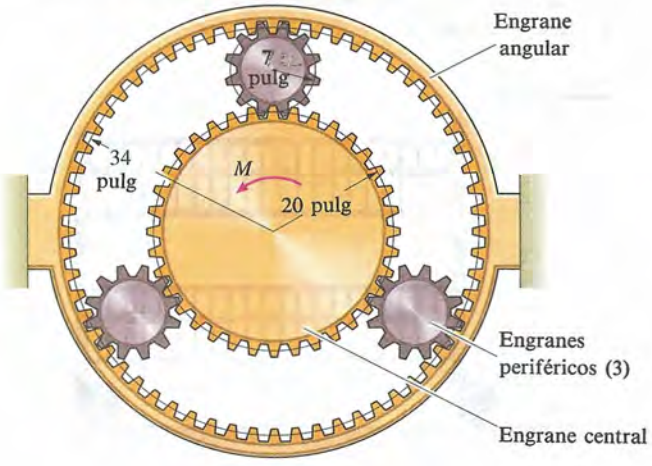
P8.86

8.87 Cada polea tiene un momento de inercia de masa I = 0.003 kg-m^2, y la masa de la banda es de 0.2 kg. Si se aplica a la polea inferior un par constante M = 4 N-m, ¿cuál será su velocidad angular cuando haya girado 10 revoluciones?



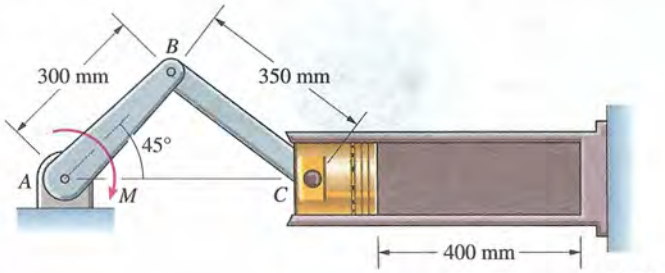
P8.87

8.88 El engrane anular está fijo. La masa y el momento de inercia de masa del engrane central son $m_S = 22$ slugs, $I_S = 4400$ slug-pie^2. La masa y el momento de inercia de masa de cada engrane periférico son $m_P = 2.7$ slugs, $I_P = 65$ slug-pie^2. Se aplica al engrane central un par $M = 600$ pie-lb. Use el trabajo y la energía para determinar la velocidad angular del engrane central después de que ha girado 100 revoluciones.



P8.88

8.89 En la Fig. P8.89 el momento de inercia de masa de la barra AB respecto a A es de 0.0003 kg-m^2. La masa de la biela BC es de 0.36 kg, su centro de masa está en su punto medio y su momento de inercia de masa respecto al centro de masa es de 0.0004 kg-m^2. El radio del pistón C es de 55 mm y su masa de 4.6 kg. En la posición mostrada, el aire en el cilindro está a la presión atmosférica, $p_{atm} = 1 \times 10^5$ Pa. Suponga que conforme el pistón se mueve en el cilindro, la presión p dentro de éste es inversamente proporcional al volumen. La fuerza neta hacia la izquierda ejercida sobre el pistón por la presión es $(p - p_{atm})A$, donde A es el área de la sección transversal del pistón. Si se aplica un par constante $M = 100$ N-m a la barra AB, ¿cuál es su velocidad angular cuando ha girado 45° en dirección horaria? (Ignore la fricción y el trabajo realizado por las fuerzas gravitatorias sobre la barra y la biela.)

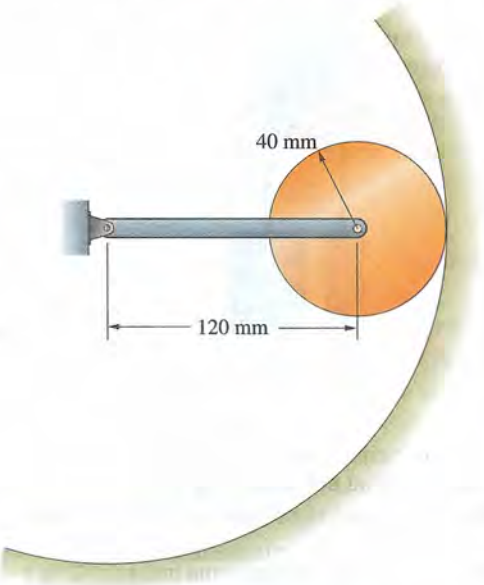


P8.89

8.90 En el Prob. 8.89, determine la velocidad angular de la barra AB y la velocidad del pistón cuando la barra AB ha girado 20° en dirección horaria.

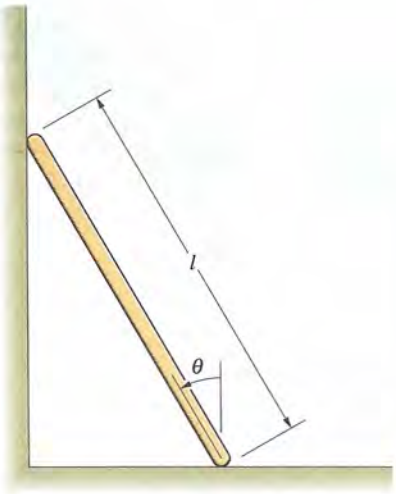
8.91 En el Prob. 8.89, ¿cuál es el mínimo par M constante necesario para hacer girar la barra AB 45° en dirección horaria?

8.92 La barra esbelta de 0.1 kg y el disco cilíndrico de 0.2 kg mostrados se liberan del reposo con la barra horizontal. El disco rueda sobre la superficie curva. ¿Cuál será la velocidad angular de la barra cuando esté vertical?



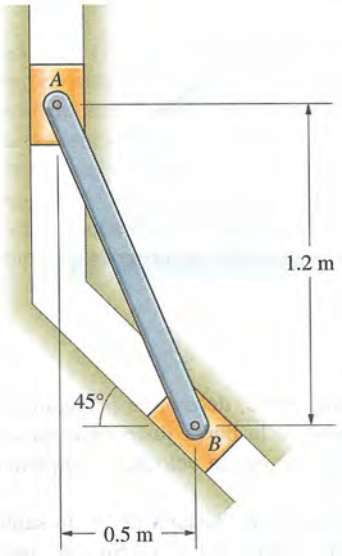
P8.92

8.93 Una barra esbelta de masa m se libera del reposo en posición vertical y se deja que caiga. Ignorando la fricción y suponiendo que permanece en contacto con el piso y la pared, determine su velocidad angular en función de θ.



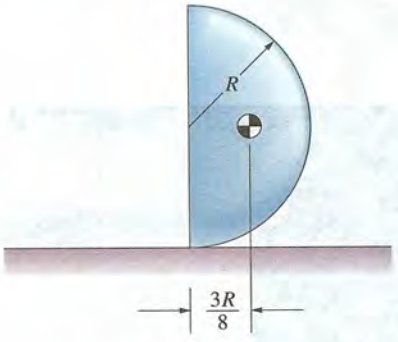
P8.93

8.94 En la Fig. P8.94 la barra esbelta de 4 kg está articulada a los deslizadores A y B de 2 kg. Si la fricción es insignificante y el sistema parte del reposo en la posición mostrada, ¿cuál es la velocidad angular de la barra cuando el deslizador A ha caído 0.5 m?



P8.94

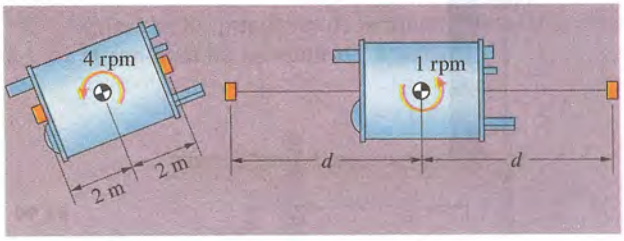
8.95 Una semiesfera homogénea de masa m se libera del reposo en la posición mostrada. Si rueda sobre la superficie horizontal, ¿cuál es será velocidad angular cuando su superficie plana esté horizontal?



P8.95

8.96 ¿Qué fuerza normal ejerce la superficie horizontal sobre la semiesfera del Prob. 8.95 en el instante en que su superficie plana está horizontal?

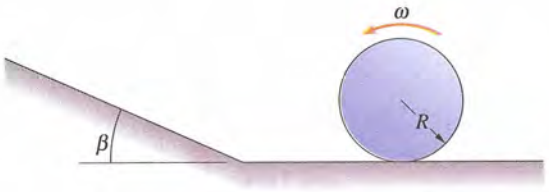
8.97 Un ingeniero decide controlar la velocidad angular de un satélite desplegando pequeñas masas unidas a cables. Si la velocidad angular del satélite en la configuración (a) es de 4 rpm, determine la distancia d en la configuración (b) que hará que la velocidad angular sea de 1 rpm. El momento de inercia del satélite es $I = 500$ kg-m^2 y cada masa es de 2 kg. (Suponga que los cables y las masas giran con la misma velocidad angular que el satélite. Ignore los cables y los momentos de inercia de las masas respecto a sus centros de masa.)



(a) (b)

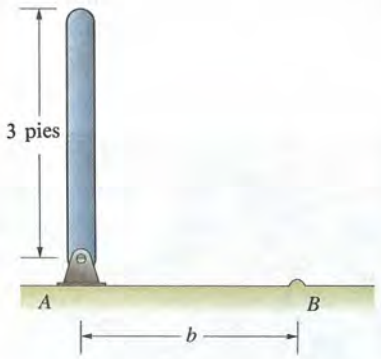
P8.97

8.98 Un disco cilíndrico homogéneo de masa m rueda sobre la superficie horizontal con velocidad angular ω. Si no resbala o deja la superficie inclinada al entrar en contacto con ella, ¿cuál es la velocidad angular ω' del disco inmediatamente después?



P8.98

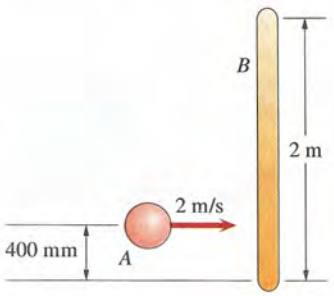
8.99 La barra esbelta de 10 lb mostrada cae del reposo en la posición vertical y golpea el tope liso en B. El coeficiente de restitución del impacto es $e = 0.6$, la duración del impacto es 0.1 s y $b = 1$ pie. Determine la fuerza media ejercida sobre la barra en B debido al impacto.



P8.99

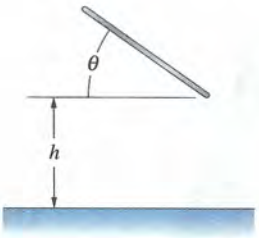
8.100 En el Prob. 8.99, determine el valor de b para el cual la fuerza media ejercida sobre la barra en A como resultado del impacto es cero.

8.101 La esfera A de 1 kg mostrada se está moviendo a 2 m/s cuando golpea el extremo de la barra esbelta B en reposo de 2 kg. Si la velocidad de la esfera después del impacto es de 0.8 m/s hacia la derecha, ¿cuál es el coeficiente de restitución?



P8.101

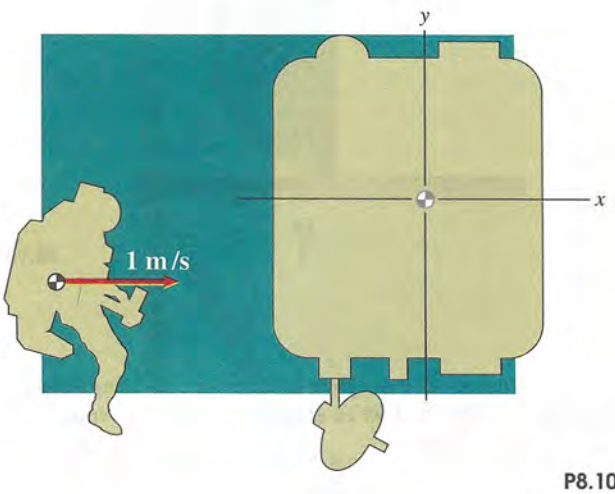
8.102 La barra esbelta mostrada se libera del reposo con $\theta = 45°$ y cae una distancia $h = 1$ m sobre el piso liso. La longitud de la barra es 1 m y su masa es 2 kg. Si el coeficiente de restitución del impacto es $e = 0.4$, ¿cuál es la velocidad angular de la barra justo después de tocar el piso?



P8.102

8.103 En el Prob. 8.102, determine el ángulo θ para el cual la velocidad angular de la barra justo después de que toca el piso es máxima. ¿Cuál es esa velocidad angular máxima?

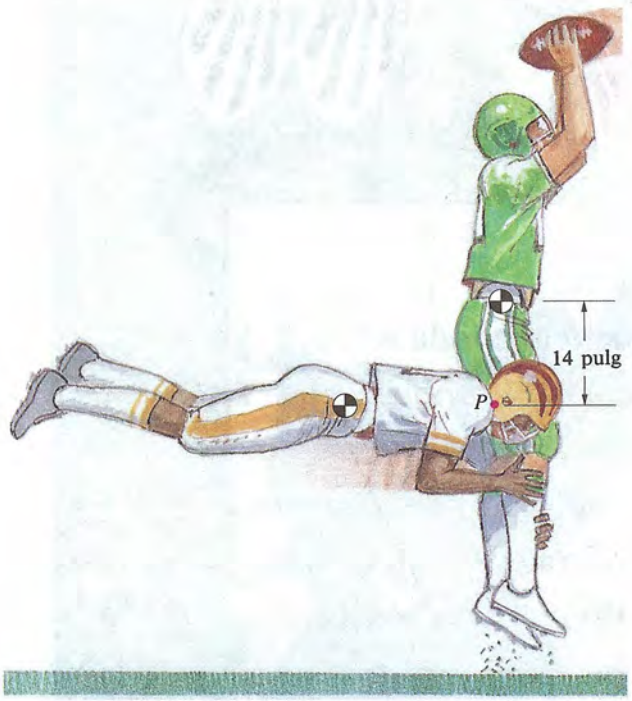
8.104 Una astronauta se traslada hacia un satélite sin rotación a 1.0**i** (m/s) respecto al satélite. Su masa es de 136 kg y su momento de inercia respecto al eje que pasa por su centro de masa paralelo al eje z es de 45 kg-m^2. La masa del satélite es de 450 kg y su momento de inercia respecto al eje z es de 675 kg-m^2. En el instante en que ella se conecta al satélite y empieza a moverse con él, la posición de su centro de masa es $(-1.8, -0.9, 0)$ m. El eje de rotación del satélite, después de que ella se conecta, es paralelo al eje z. ¿Cuál es su velocidad angular?



P8.104

8.105 En el Prob. 8.104 suponga que los parámetros de diseño del sistema de control del satélite requieren que su velocidad angular no exceda de 0.02 rad/s. Si la astronauta se mueve paralelamente al eje x y la posición de su centro de masa cuando ella se conecta es $(-1.8, -0.9, 0)$ m, ¿cuál es la velocidad relativa máxima a la que ella debería acercarse al satélite?

8.106 El jugador de 170 lb salta verticalmente para recibir un pase y está en reposo en el instante en que recibe la pelota. En el mismo momento es derribado en P por un jugador defensivo de 180 lb que se mueve horizontalmente a 15 pie/s. El momento de inercia de masa del primero respecto a su centro de masa es de 7 slug-pie^2. Si los jugadores se modelan como cuerpos rígidos y se supone que $e = 0$, ¿cuál es la velocidad angular del receptor inmediatamente después del impacto?

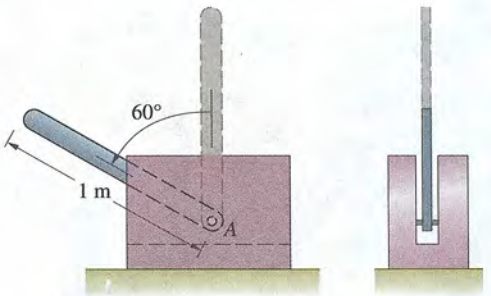


P8.106

8.107 Si los jugadores del Prob. 8.106 no permanecen en contacto después de la colisión, y la velocidad horizontal del defensivo inmediatamente después del impacto es de 9 pie/s, ¿cuál es la velocidad angular del receptor?

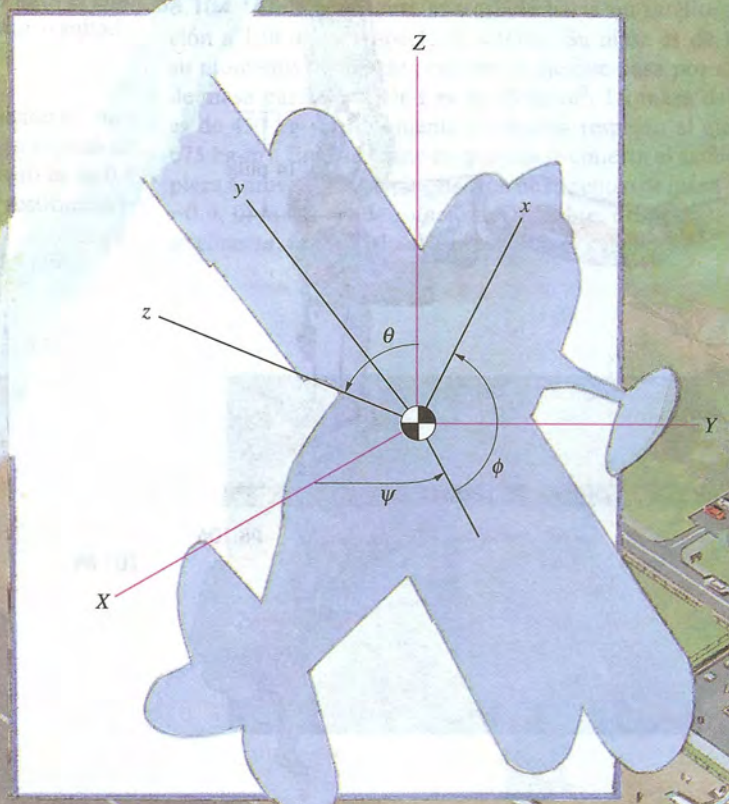
8.108 La barra esbelta de 2 kg de la figura está articulada en A a un bloque metálico de 10 kg que descansa sobre una superficie lisa a nivel. El sistema se libera del reposo con la barra vertical. La fricción es insignificante. Cuando el sistema está en la posición mostrada, determine (a) la magnitud de la velocidad angular de la barra; (b) la magnitud de la velocidad del bloque.

Estrategia: Use los principios de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento lineal.



P8.108

La orientación del biplano o de cualquier cuerpo rígido se puede describir con tres ángulos que especifican las rotaciones de un sistema coordenado fijo al cuerpo respecto a un marco de referencia fijo. El cambio en la orientación del avión en función del tiempo está regido por las ecuaciones del movimiento angular tridimensional que relacionan las fuerzas y los pares que actúan sobre él con su aceleración angular. En este capítulo aprenderá a analizar los movimientos tridimensionales de cuerpos rígidos.



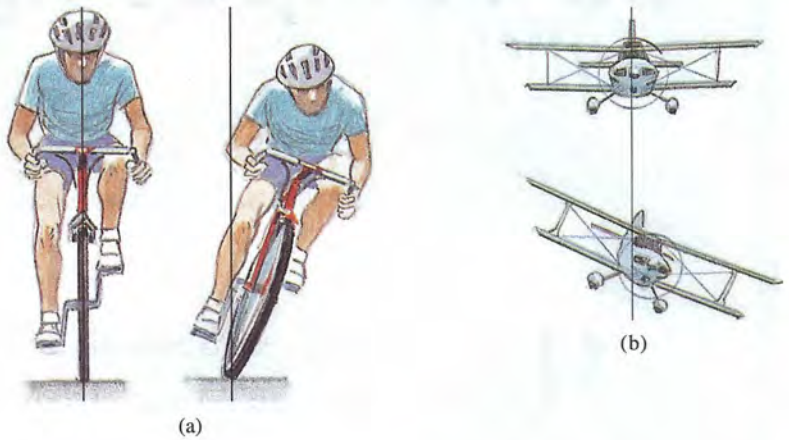
Capítulo 9

Cinemática y dinámica tridimensionales de cuerpos rígidos

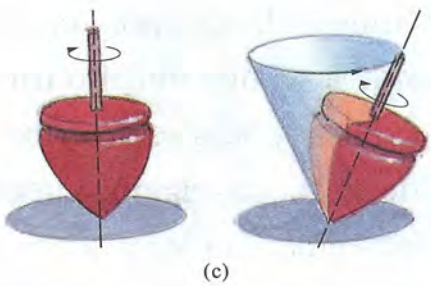
HASTA ahora nuestro análisis de la dinámica de cuerpos rígidos ha tratado sólo el movimiento bidimensional. Sin embargo, en muchas aplicaciones de la dinámica, como el diseño de aviones y otros vehículos, se debe considerar el movimiento tridimensional. El primer paso es explicar cómo se describe el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. Luego deducimos las ecuaciones del movimiento y las usamos para analizar movimientos tridimensionales simples. Finalmente, presentamos los ángulos de Euler para especificar la orientación de un cuerpo rígido en tres dimensiones y expresamos las ecuaciones del movimiento angular en función de ellas.

9.1 *Cinemática*

Al conducir una bicicleta en una trayectoria recta sus ruedas describen un movimiento plano, pero si vira su movimiento será tridimensional (Fig. 9.1a). Un avión puede permanecer en movimiento plano mientras vuela a nivel, desciende, asciende o efectúa lazos. Pero si se inclina y vira, su movimiento será tridimensional (Fig. 9.1b). Al hacer girar un trompo éste permanece en movimiento plano durante un corto tiempo, girando alrededor de un eje vertical fijo; poco a poco, el eje del trompo empieza a inclinarse y a girar. El trompo está entonces en movimiento tridimensional y muestra un interesante comportamiento, en el que parece desafiar a la gravedad (Fig. 9.1c). En esta sección comenzamos el análisis de tales movimientos estudiando la cinemática de los cuerpos rígidos en movimiento tridimensional.



(a) (b)



(c)

Figura 9.1
Ejemplos de movimientos planos y tridimensionales.

Ya estamos familiarizados con algunos de los conceptos implícitos en la descripción del movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. En el Cap. 6 mostramos que el teorema de Euler implica que un cuerpo rígido sometido a cualquier movimiento que no sea traslación tiene un eje instantáneo de rotación. La dirección de este eje en un instante particular, y la razón con que el cuerpo gira alrededor del eje, se pueden especificar por medio del vector ω de velocidad angular.

Además, la velocidad del cuerpo rígido queda completamente determinada por su vector de velocidad angular y el vector de velocidad de uno de sus puntos. Para el cuerpo rígido de la Fig. 9.2, si conocemos ω y.

el vector $\mathbf{v}_B$ ($= d\mathbf{r}_B/dt$, la velocidad del punto B respecto al punto de referencia O), la velocidad de cualquier punto A está dada por la Ec. (6.8):

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{A/B}.} \tag{9.1}$$

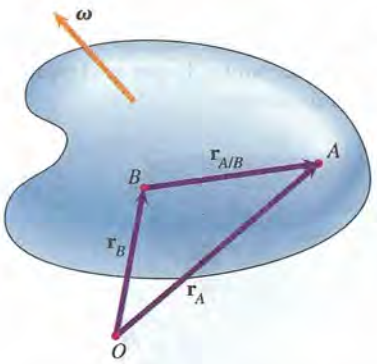


Figura 9.2
Puntos A y B de un cuerpo rígido. La velocidad de A se puede determinar si se conocen la velocidad de B y la velocidad angular del cuerpo rígido. La aceleración de A se puede determinar si se conocen la aceleración, la velocidad angular y la aceleración angular de B.

La aceleración de un cuerpo rígido queda especificada por su aceleración $\alpha = d\omega/dt$, su velocidad angular y la aceleración de uno de sus puntos. Si conocemos α, ω, y la aceleración $\mathbf{a}_B$ del punto B de la Fig. 9.2, la aceleración de cualquier punto A está dada por la Ec. (6.9):

$$\boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \alpha \times \mathbf{r}_{A/B} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{A/B}).} \tag{9.2}$$

Hemos supuesto que las velocidades y aceleraciones de puntos, la velocidad angular ω y la aceleración angular α de las Ecs. (9.1) y (9.2) son relativas a un marco de referencia sin giro fijo respecto al punto O. Aquí también usaremos sistemas coordenados fijos al cuerpo, estacionarios respecto a cuerpos rígidos en movimiento. Además, usaremos sistemas coordenados que giran pero que no están fijos al cuerpo. Queremos destacar que *aun cuando un vector especifica una velocidad o una aceleración respecto a un marco de referencia fijo, siempre podemos expresarlo en función de sus componentes en un sistema coordenado en rotación.*

Supongamos que la velocidad angular de un sistema coordenado xyz en rotación respecto a un marco de referencia fijo se describe con un vector Ω de velocidad angular, y que la velocidad angular de un cuerpo rígido *respecto al* sistema xyz es ω_{rel}. Entonces, la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo rígido relativas al marco de referencia fijo son

$$\begin{aligned} \omega &= \Omega + \omega_{\text{rel}}, \\ \alpha &= \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega_{\text{rel}\,x}}{dt} + \frac{d\omega_{\text{rel}\,y}}{dt} + \frac{d\omega_{\text{rel}\,z}}{dt} + \Omega \times \omega_{\text{rel}}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Los siguientes ejemplos muestran el uso de las Ecs. (9.1)-(9.3) para analizar el movimiento tridimensional de cuerpos rígidos. Se encontrará a menudo que la manera más sencilla de determinar los vectores de velocidad y aceleración angulares de un cuerpo rígido en rotación es determinar primero su velocidad angular ω_{rel} respecto a un sistema coordenado en rotación y luego usar las Ecs. (9.3).

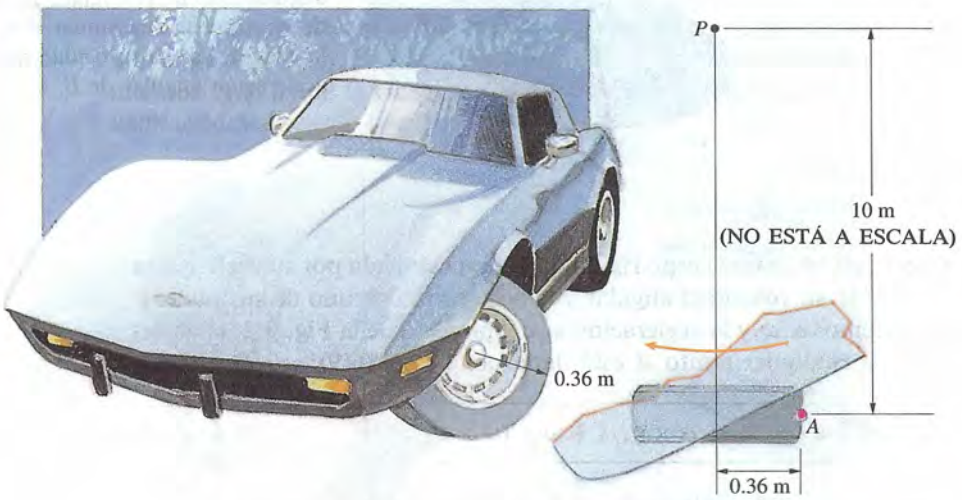
Ejemplo 9.1

El neumático de la Fig. 9.3 está rodando sobre una superficie horizontal. Su punto medio se mueve a 5 m/s. El automóvil está girando y la línea perpendicular por el punto medio del neumático gira respecto al punto fijo P mostrado en la vista superior.

(a) ¿Cuál es el vector ω de velocidad angular del neumático?

(b) Determine la velocidad del punto A, que es el punto extremo posterior del neumático en el instante mostrado.

Figura 9.3



ESTRATEGIA

(a) Sea B el punto medio del neumático. Incluimos un sistema coordenado en rotación con su origen en B y su eje y a lo largo de la línea de B a P (Fig. a). Suponemos que el eje x *permanece horizontal*. Conociendo la velocidad del punto B, podemos determinar el vector de velocidad angular del sistema coordenado y la velocidad angular del neumático relativa al sistema coordenado. Luego podemos usar la Ec. (9.3) para determinar la velocidad angular del neumático.

(b) Conociendo la velocidad del punto B y la velocidad angular del neumático, podemos usar la Ec. (9.1) para determinar la velocidad del punto A.

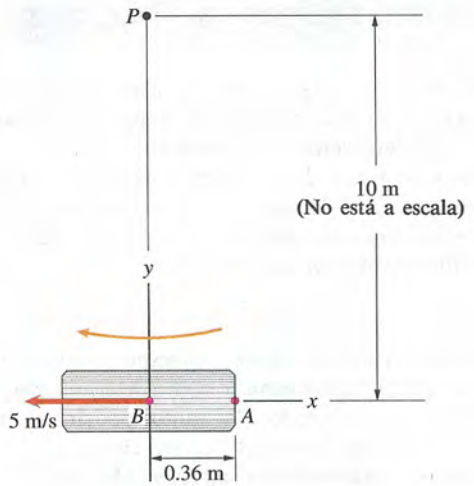
SOLUCIÓN

(a) La velocidad angular de la línea PB es (5 m/s)/(10 m) = 0.5 rad/s. El sistema coordenado xyz gira respecto a su eje z en dirección horaria como se ve en la Fig. (a), por lo que el vector de velocidad angular del sistema coordenado es

$$\Omega = -0.5\,\mathbf{k}\ \text{(rad/s)}.$$

Respecto al sistema coordenado xyz, el neumático gira alrededor del eje y con velocidad angular (5 m/s)/(0.36 m) = 13.9 rad/s. El vector de velocidad angular del neumático respecto al sistema coordenado es

$$\omega_{\text{rel}} = -13.9\,\mathbf{j}\ \text{(rad/s)}.$$



(a) Sistema coordenado en rotación. El eje y permanece alineado con BP y el eje x permanece horizontal.

El vector de velocidad angular del neumático es

$$\omega = \Omega + \omega_{\text{rel}} = -13.9\,\mathbf{j} - 0.5\,\mathbf{k} \text{ (rad/s)}.$$

(b) El vector de posición del punto A respecto al punto B es $\mathbf{r}_{A/B} = 0.36\mathbf{i}$ (m). Por tanto, la velocidad del punto A es

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$= -5\,\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -13.9 & -0.5 \\ 0.36 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -5\,\mathbf{i} - 0.18\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k} \text{ (m/s)}.$$

COMENTARIO

El vector de velocidad angular ω del neumático gira en el espacio conforme el auto gira. Sin embargo, expresándolo en un sistema coordenado que gira con el auto, obtenemos una expresión muy sencilla para ω. (Observe que el punto A tiene una componente de velocidad en la dirección y negativa debido a la rotación del eje del neumático.)

Ejemplo 9.2

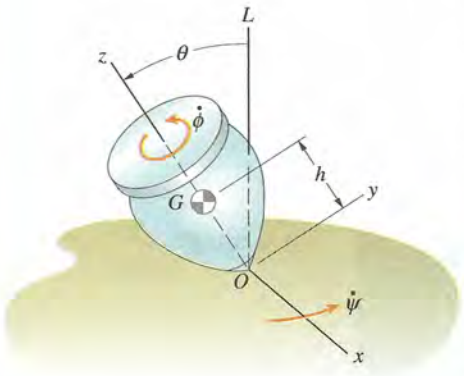


Figura 9.4

La punta del trompo de la Fig. 9.4 permanece en el punto fijo O sobre el suelo. El ángulo θ entre el eje vertical L y el eje del trompo (eje z) es constante. El eje x del sistema coordenado *permanece paralelo al suelo* y gira respecto a L con velocidad angular constante $\dot{\psi}$. Respecto al sistema coordenado en rotación, el trompo gira alrededor del eje z con velocidad angular constante $\dot{\phi}$. (a) ¿Cuáles son los vectores de velocidad y de aceleración angulares del trompo? (b) Determine la velocidad del centro de masa G.

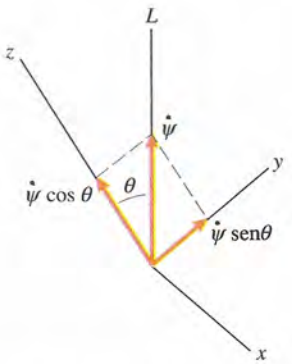
ESTRATEGIA

(a) Conocemos la velocidad angular del trompo respecto al sistema coordenado en rotación, y tenemos suficiente información para determinar el vector de velocidad angular del sistema coordenado. Por tanto, podemos usar la Ec. (9.3) para determinar los vectores de velocidad y aceleración angulares del trompo. (b) Una vez conocido el vector de velocidad angular del trompo, podemos determinar la velocidad de su centro de masa aplicando la Ec. (9.1) a los puntos O y G.

SOLUCIÓN

(a) El sistema coordenado gira respecto al eje vertical L con velocidad angular $\dot{\psi}$. Por tanto, el vector de velocidad angular del sistema coordenado es paralelo a L, y la regla de la mano derecha indica que señala hacia arriba (Fig. a). Resolviendo $\dot{\psi}$ en sus componentes y y z, obtenemos el vector de velocidad angular del sistema coordenado:

$$\Omega = \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \dot{\psi}\cos\theta\,\mathbf{k}.$$



(a) Descomposición del vector de velocidad angular del sistema coordenado en componentes.

La velocidad angular del trompo respecto al sistema coordenado en rotación es $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}} = \dot{\phi}\mathbf{k}$. Por tanto, el vector de velocidad angular del trompo es

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}} = \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\,\mathbf{k}.$$

Las componentes x, y y z de las velocidades angulares $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}$ son constantes, por lo que el vector de aceleración angular del trompo es

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta & \dot{\psi}\cos\theta \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \end{vmatrix}$$

$$= \dot{\phi}\dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i}.$$

(b) El vector de posición del centro de masa respecto a O es $\mathbf{r}_{G/O} = h\mathbf{k}$. La velocidad del centro de masa es

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/O}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta & \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi} \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

$$= h\dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i}.$$

Problemas

9.1 El vector de velocidad angular de un cuerpo rígido es $\omega = 200\mathbf{i} + 900\mathbf{j} - 600\mathbf{k}$ (rad/s). Con respecto a un punto de referencia O, la posición y la velocidad de su centro de masa son $\mathbf{r}_G = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (m) y $\mathbf{v}_G = 100\mathbf{i} + 80\mathbf{j} - 60\mathbf{k}$ (m/s). ¿Cuál es la velocidad respecto a O de un punto A del cuerpo rígido con posición $\mathbf{r}_A = 5.8\mathbf{i} + 6.4\mathbf{j} + 1.6\mathbf{k}$ (m/s)?

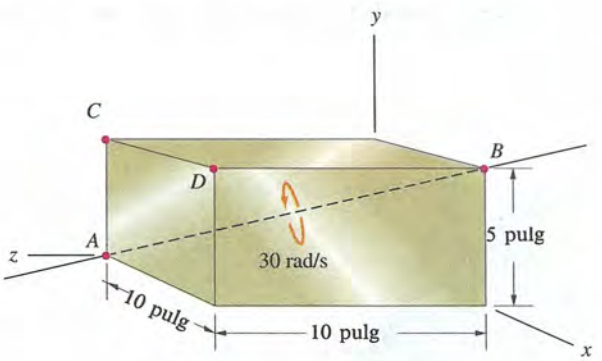
9.2 El vector de aceleración angular del cuerpo rígido del Prob. 9.1 es $\alpha = 8000\mathbf{i} - 8000\mathbf{j} - 4000\mathbf{k}$ (rad/s^2) y la aceleración de su centro de masa respecto a O es cero. ¿Cuál es la aceleración del punto A respecto a O?

9.3 Los giróscopos del avión de la figura indican que su velocidad angular es $\omega = 4.0\mathbf{i} + 6.4\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}$ (rad/s). ¿Cuál es la velocidad respecto al centro de masa del punto A con coordenadas (8, 2, 2) pies?

P9.3

9.4 Los giróscopos del avión del Prob. 9.3 indican que su aceleración angular es $\alpha = -4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (rad/s^2). ¿Cuál es la aceleración del punto A respecto al centro de masa?

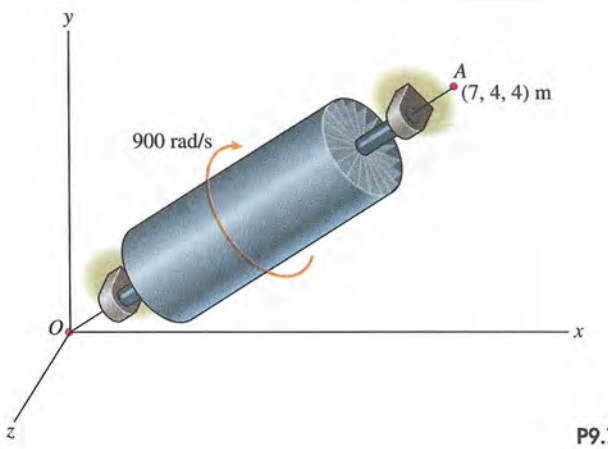
9.5 El paralelepípedo rectangular mostrado está girando respecto a un eje fijo que pasa por los puntos A y B. La dirección de su rotación es horaria cuando el eje de rotación se ve del punto A al punto B.
(a) ¿Cuál es su vector de velocidad angular ω?
(b) ¿Cuáles son las velocidades de los puntos C y D?



P9.5

9.6 Si la velocidad angular del paralelepípedo rectangular del Prob. 9.5 es constante, ¿cuál es la aceleración del punto C?

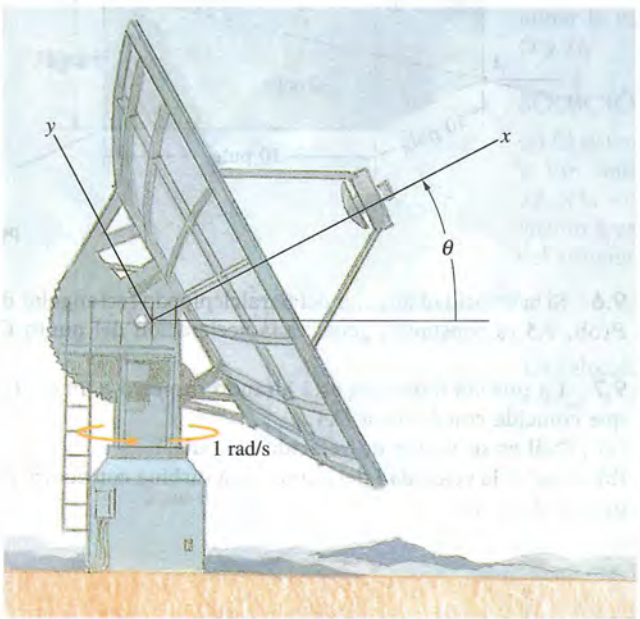
9.7 La turbina mostrada está girando respecto a un eje fijo que coincide con la línea OA.
(a) ¿Cuál es su vector de velocidad angular?
(b) ¿Cuál es la velocidad del punto de la turbina con coordenadas (3, 2, 2) m?



P9.7

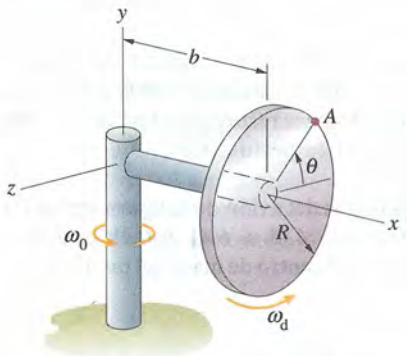
9.8 La velocidad angular de 900 rad/s de la turbina del Prob. 9.7 está disminuyendo a 100 rad/s^2.
(a) ¿Cuál es el vector de aceleración angular de la turbina?
(b) ¿Cuál es la aceleración del punto de la turbina con coordenadas (3, 2, 2) m?

9.9 La base de la antena parabólica mostrada está girando a 1 rad/s. El ángulo $\theta = 30°$ y está aumentando a 20°/s.
(a) ¿Cuáles son las componentes del vector de velocidad angular ω de la antena en el sistema coordenado fijo al cuerpo que se muestra?
(b) ¿Cuál es la velocidad del punto de la antena con coordenadas (2, 2, −2) m?



P9.9

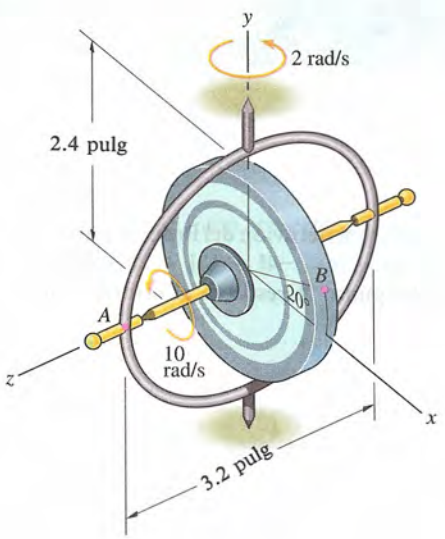
9.10 El disco circular de la figura permanece perpendicular al eje horizontal y gira respecto a él con velocidad angular ω_d. El eje horizontal está rígidamente unido a un eje vertical que gira con velocidad angular ω_0.
(a) ¿Cuál es el vector de velocidad angular ω del disco?
(b) ¿Cuál es la velocidad del punto A del disco?



P9.10

9.11 Si las velocidades angulares ω_d y ω_0 del Prob. 9.10 son constantes, ¿cuál es la aceleración del punto A del disco?

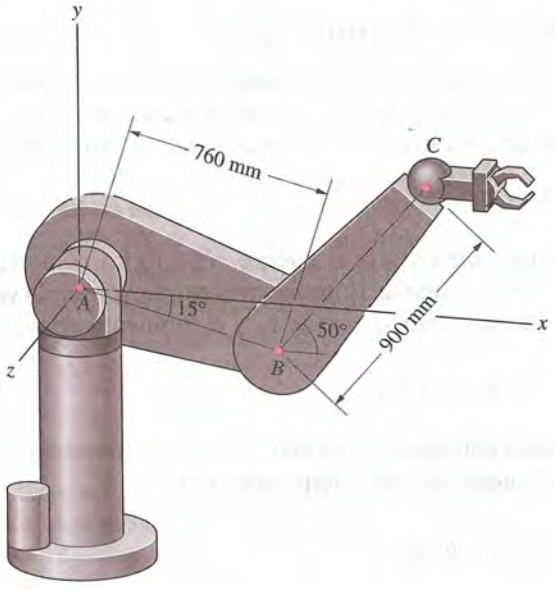
9.12 El marco circular del giróscopo de la figura gira alrededor del eje vertical a 2 rad/s en dirección antihoraria cuando se ve desde arriba. La rueda de 2.4 pulg de diámetro gira respecto al marco a 10 rad/s. Determine las velocidades de los puntos A y B respecto al origen.



P9.12

9.13 Si las velocidades angulares del marco y la rueda del giróscopo del Prob. 9.12 son constantes, ¿cuáles son las aceleraciones de los puntos A y B respecto al origen?

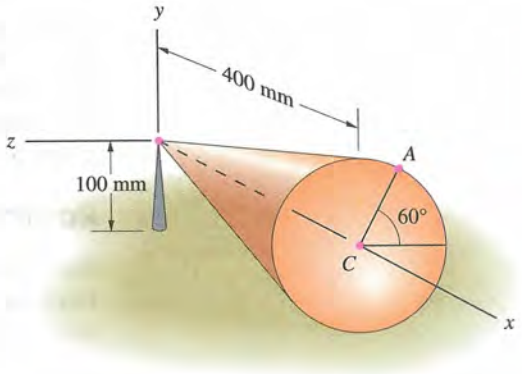
9.14 El robot mostrado gira alrededor del eje vertical con velocidad angular $\Omega_y = 0.1$ rad/s. El eje y del sistema coordenado permanece vertical y el sistema coordenado gira con el robot de manera que los puntos A, B, C permanecen en el plano x-y. Los vectores de velocidad angular de los brazos AB y BC *respecto al sistema coordenado en rotación* son $-0.2\mathbf{k}$ (rad/s) y $0.4\mathbf{k}$ (rad/s) respectivamente.
(a) ¿Cuál es el vector de velocidad angular ω_{BC} del brazo BC?
(b) ¿Cuál es la velocidad del punto C?



P9.14

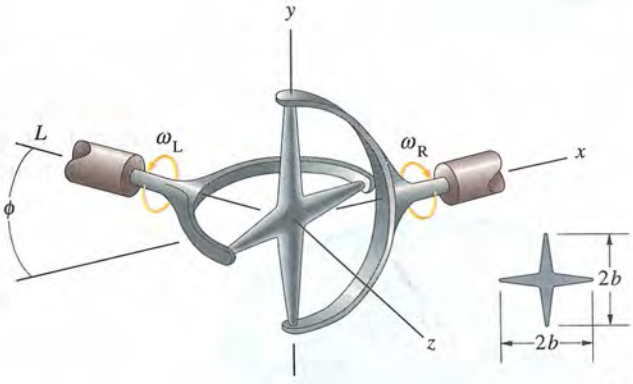
9.15 La velocidad angular del robot del Prob. 9.14 respecto al eje vertical es constante. Las aceleraciones angulares de los brazos AB y BC respecto al sistema coordenado en rotación son cero. ¿Cuál es la aceleración del punto C?

9.16 En la Fig. P9.16 el cono está conectado a un poste de 100 mm por una junta de bola y cuenca en su vértice. El radio de su base es de 100 mm y la base rueda sobre el piso. La velocidad del centro de la base es $\mathbf{v}_C = 2\mathbf{k}$ (m/s).
(a) ¿Cuál es el vector de velocidad angular ω del cono?
(b) ¿Cuál es la velocidad del punto A?



P9.16

9.17 El mecanismo mostrado es un tipo de junta universal llamada de yunque y araña. El eje L se encuentra en el plano x-z. Determine la velocidad angular ω_L y el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_S$ de la "araña" en forma de cruz, en términos de la velocidad angular ω_R en el instante mostrado.



P9.17

9.2 Momento angular

Al igual que en el caso del movimiento plano, las ecuaciones que rigen el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido consisten en la segunda ley de Newton y ecuaciones de movimiento angular. En comparación con las sencillas ecuaciones que rigen el movimiento angular bidimensional, las del movimiento angular tridimensional son más complicadas (tres relacionan a las componentes del momento total respecto a cada eje coordenado con las componentes de la aceleración y de la velocidad angulares del cuerpo rígido). En esta sección empezamos deduciendo las ecuaciones del movimiento angular mediante la obtención de expresiones para el momento angular de un cuerpo rígido en movimiento tridimensional. Primero consideraremos un cuerpo rígido que gira alrededor de un punto fijo y luego un cuerpo rígido en movimiento tridimensional.

Rotación respecto a un punto fijo

Sea m_i la masa de la i-ésima partícula de un cuerpo rígido y $\mathbf{r}_i$ su posición respecto a un punto fijo O (Fig. 9.5). El momento angular del cuerpo respecto a O es la suma de los momentos angulares de sus partículas,

$$\mathbf{H}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i,$$

donde $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$. Supongamos que el cuerpo rígido gira respecto al punto fijo O con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Entonces podemos expresar la velocidad de la i-ésima partícula como $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, y el momento angular es

$$\mathbf{H}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i). \tag{9.4}$$

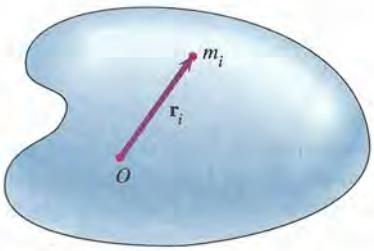


Figura 9.5
Masa y posición de la i-ésima partícula de un cuerpo rígido.

En un sistema coordenado con su origen en O (Fig. 9.6), podemos expresar los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_i$ en función de sus componentes como

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k},$$

donde (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas de la i-ésima partícula. Sustituyendo en la Ec. (9.4) y evaluando los productos vectoriales, podemos escribir las componentes resultantes del vector de momento angular así:

$$\begin{aligned} H_{Ox} &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z, \\ H_{Oy} &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z, \\ H_{Oz} &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \tag{9.5}$$

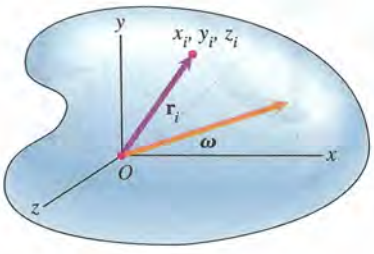


Figura 9.6
Sistema coordenado con su origen en O.

Los coeficientes

$$I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad I_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2), \quad I_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \tag{9.6}$$

se llaman **momentos de inercia** respecto a los ejes x, y, z. Los coeficientes

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum_i m_i x_i y_i, \quad I_{yz} = I_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i, \quad I_{xz} = I_{zx} = \sum_i m_i x_i z_i \tag{9.7}$$

se llaman **productos de inercia**. Podemos escribir las Ecs. (9.5) como la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \tag{9.8}$$

donde

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = [I]$$

se llama **matriz de inercia** del cuerpo rígido.

Si bien las Ecs. (9.5) parecen complicadas en comparación con la sencilla ecuación $H_O = I_O\omega$ para el momento angular de un cuerpo rígido en movimiento plano respecto a un eje fijo, podemos señalar algunas relaciones simples entre ellas. Supongamos que el cuerpo rígido gira respecto a un eje fijo L_O que coincide con el eje x (Fig. 9.7). De las Ecs. (9.5), el momento angular respecto al eje x es

$$H_{Ox} = I_{xx}\omega_x.$$

El término $(y_i^2 + z_i^2)$ que aparece en la definición de I_{xx} es el cuadrado de la distancia perpendicular del eje x a la i-ésima partícula, por lo que $I_{xx} = I_O$. Por tanto, esta ecuación que relaciona H_{Ox} con ω_x equivale a la ecuación plana. Sin embargo, observe, de las Ecs. (9.5), que si el eje de rotación no coincide con uno de los ejes coordenados, la componente del momento angular respecto a un eje coordenado depende en general no sólo de la componente de la velocidad angular respecto a ese eje, sino también de las componentes de la velocidad angular respecto a los otros ejes, afectadas por los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}.

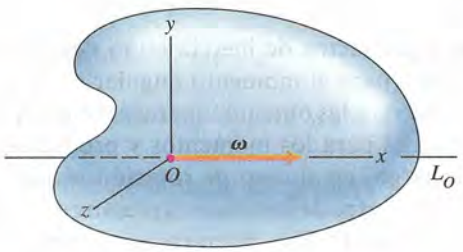


Figura 9.7
El eje de rotación L_O coincide con el eje x.

Movimiento general

Aquí obtendremos el momento angular de un cuerpo rígido en movimiento general tridimensional. La deducción y las ecuaciones resultantes son muy similares a las de la rotación respecto a un punto fijo.

Sea $\mathbf{R}_i$ la posición de la i-ésima partícula de un cuerpo rígido respecto al centro de masa (Fig. 9.8). El momento angular del cuerpo rígido respecto a su centro de masa es

$$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{R}_i \times m_i \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{R}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_i).$$

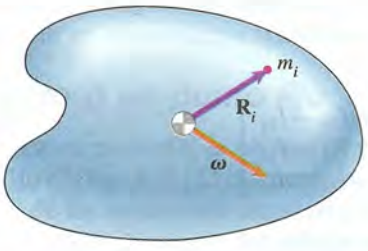


Figura 9.8

Posición de la i-ésima partícula de un cuerpo rígido respecto al centro de masa.

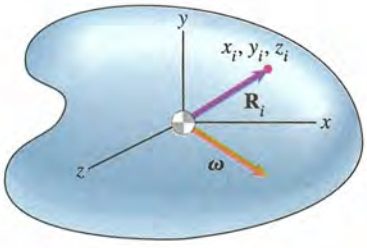


Figura 9.9

Sistema coordenado con su origen en el centro de masa.

Estableciendo un sistema coordenado con origen en el centro de masa (Fig. 9.9), expresamos $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{R}_i$ en función de sus componentes como

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{R}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k},$$

donde (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas de la i-ésima partícula respecto al centro de masa. Las componentes resultantes del vector de momento angular son

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z, \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z, \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z, \end{aligned} \tag{9.9}$$

o

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \tag{9.10}$$

Los momentos y productos de inercia están definidos por la Ec. (9.6).

Estas ecuaciones para el momento angular en el movimiento general son idénticas en forma a las obtenidas para la rotación respecto a un punto fijo. Las expresiones para los momentos y productos de inercia son las mismas. Sin embargo, en el caso de rotación respecto a un punto fijo, los momentos y productos de inercia se expresan en un sistema coordenado con su origen en el punto fijo, mientras que en el caso del movimiento general se expresan en un sistema con su origen en el centro de masa.

9.3 Momentos y productos de inercia

Para determinar el momento angular de un cuerpo rígido en movimiento tridimensional, se deben conocer sus momentos y productos de inercia. Si recuerda la dinámica de cuerpos rígidos en el plano, podrá evaluar el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje dado. Las mismas técnicas se aplican en tres dimensiones. Demostraremos esto evaluando los momentos y productos de inercia de una barra esbelta y de una placa delgada. Luego ampliaremos el teorema de los ejes paralelos a tres dimensiones para evaluar los momentos y productos de cuerpos compuestos.

Cuerpos simples

Si modelamos un cuerpo como una distribución continua de masa, podemos expresar la matriz de inercia como

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_m (y^2+z^2)\,dm & -\int_m xy\,dm & -\int_m xz\,dm \\ -\int_m yx\,dm & \int_m (x^2+z^2)\,dm & -\int_m yz\,dm \\ -\int_m zx\,dm & -\int_m zy\,dm & \int_m (x^2+y^2)\,dm \end{bmatrix}, \tag{9.11}$$

donde x, y, z son las coordenadas del elemento diferencial de masa dm (Fig. 9.10).

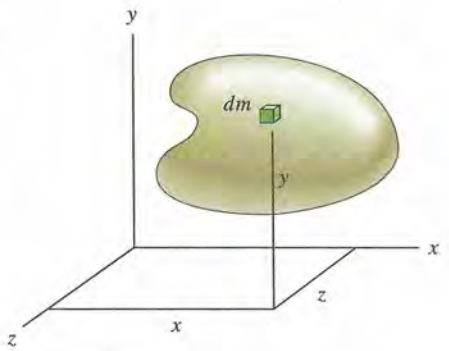


Figura 9.10
Determinación de los momentos y productos de inercia modelando un cuerpo como una distribución continua de masa.

Barras esbeltas Consideremos el origen del sistema coordenado en el centro de masa de una barra esbelta con el eje x dirigido a lo largo de la barra (Fig. 9.11a), longitud l, área A en su sección transversal, y masa m. A es uniforme a lo largo de la barra y el material es homogéneo.

Consideremos un elemento diferencial de la barra de longitud dx a una distancia x del centro de masa (Fig. 9.11b). La masa del elemento es $dm = \rho A\,dx$, donde ρ es su densidad de masa. Ignoramos las dimensiones laterales de la barra y suponemos que las coordenadas del elemento diferencial dm son $(x, 0, 0)$. Como consecuencia de esta aproximación, el momento de inercia de la barra respecto al eje x es cero:

$$I_{xx} = \int_m (y^2+z^2)\,dm = 0.$$

El momento de inercia respecto al eje y es

$$I_{yy} = \int_m (x^2+z^2)\,dm = \int_{-l/2}^{l/2} \rho A x^2\,dx = \frac{1}{12}\rho A l^3.$$

Expresando esto en función de la masa de la barra $m = \rho A l$ tenemos

$$I_{yy} = \frac{1}{12} m l^2.$$

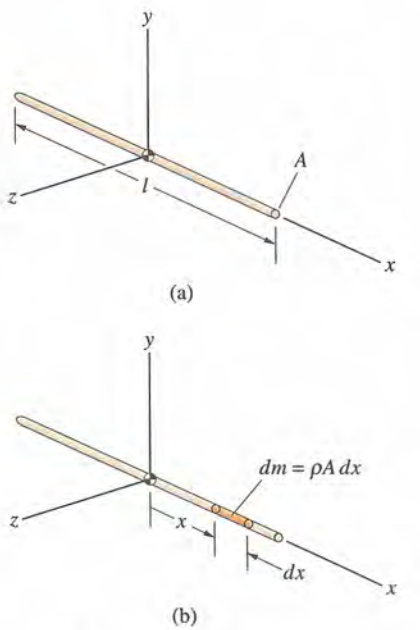


Figura 9.11
(a) Barra esbelta y un sistema coordenado con el eje x alineado con la barra.
(b) Un elemento diferencial de masa de longitud dx.

El momento de inercia respecto al eje z es igual al momento de inercia respecto al eje y:

$$I_{zz} = \int_m (x^2 + y^2)\, dm = \frac{1}{12} ml^2.$$

Como las coordenadas y y z de dm son cero, los productos de inercia son cero y la matriz de inercia de la barra esbelta es

$$[I] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{bmatrix}. \tag{9.12}$$

Se debe recordar que los momentos y productos de inercia dependen de la orientación del sistema coordenado respecto al cuerpo. En el sistema coordenado alternativo que se muestra en la Fig. 9.12, la matriz de inercia de la barra es

$$[I] = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{bmatrix}.$$

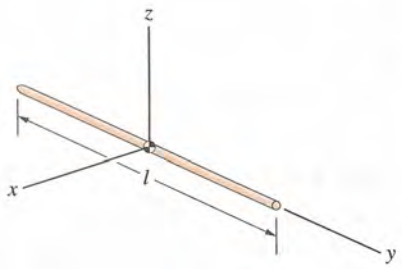
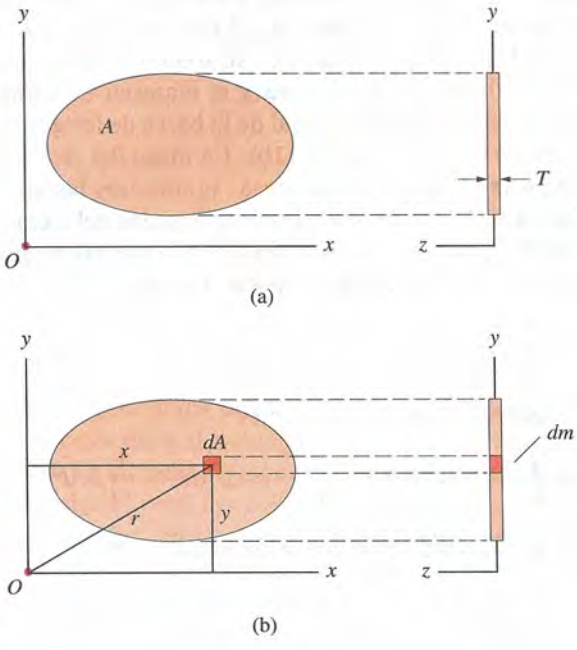


Figura 9.12
El eje y alineado con la barra.

Placas delgadas Consideremos una placa homogénea de espesor uniforme T, área A y forma indefinida en el plano x-y (Fig. 9.13a). Podemos expresar sus momentos de inercia de masa en función de los momentos de inercia del área de su sección transversal.

Proyectando un elemento de área dA a través de su espesor T (Fig. 9.13b), obtenemos un elemento diferencial de masa $dm = \rho T dA$. Ignoramos el espesor de la placa al calcular los momentos de inercia, por lo que

Figura 9.13
(a) Placa delgada en el plano x-y.
(b) Obtención de un elemento diferencial de masa proyectando un elemento de área dA a través de la placa.



las coordenadas del elemento dm son $(x, y, 0)$. El momento de inercia de la placa respecto al eje x es

$$I_{xx} = \int_m (y^2 + z^2)\, dm = \rho T \int_A y^2\, dA = \rho T I_x,$$

donde I_x es el momento de inercia de la sección transversal de la placa respecto al eje x. Como la masa de la placa es $m = \rho TA$, el producto $\rho T = m/A$, y obtenemos el momento de inercia en la forma

$$I_{xx} = \frac{m}{A} I_x.$$

El momento de inercia respecto al eje y es

$$I_{yy} = \int_m (x^2 + z^2)\, dm = \rho T \int_A x^2\, dA = \frac{m}{A} I_y,$$

donde I_y es el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje y. El momento de inercia respecto al eje z es

$$I_{zz} = \int_m (x^2 + y^2)\, dm = \frac{m}{A} J_O,$$

donde $J_O = I_x + I_y$ es el momento polar de inercia del área de la sección transversal. El producto de inercia I_{xy} es

$$I_{xy} = \int_m xy\, dm = \frac{m}{A} I_{xy}^A,$$

donde

$$I_{xy}^A = \int_A xy\, dA$$

es el producto de inercia del área de la sección transversal (usamos un supraíndice A para distinguir el producto de inercia del área de la sección transversal de la placa, del producto de inercia de su masa). Si el área de su sección transversal A es simétrica respecto al eje x o al y, $I_{xy}^A = 0$.

Como la coordenada z de dm es cero, los productos de inercia I_{xz} e I_{yz} son cero. La matriz de inercia de la placa delgada es

$$[I] = \begin{bmatrix} \frac{m}{A} I_x^A & -\frac{m}{A} I_{xy}^A & 0 \\ -\frac{m}{A} I_{xy}^A & \frac{m}{A} I_y^A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{A} J_O \end{bmatrix}. \tag{9.13}$$

Si se conocen, o se pueden determinar, los momentos y los productos de inercia de la sección transversal de la placa, se pueden usar esas expresiones para obtener los momentos y los productos de inercia de su masa.

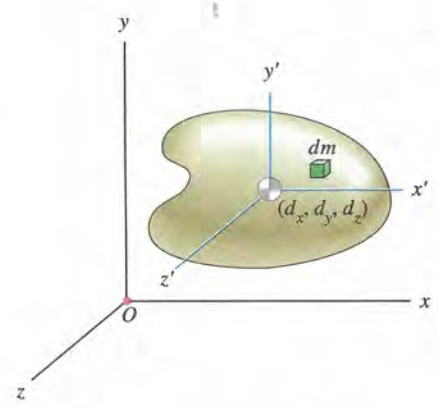


Figura 9.14

Sistema coordenado $x'y'z'$ con su origen en el centro de masa y un sistema coordenado paralelo xyz.

Teoremas de los ejes paralelos

Supongamos que conocemos la matriz de inercia $[I']$ de un cuerpo en un sistema coordenado $x'y'z'$ con origen en el centro de masa, y queremos determinar la matriz de inercia $[I]$ en un sistema paralelo xyz (Fig. 9.14). Sean (d_x, d_y, d_z) las coordenadas del centro de masa en el sistema xyz. Las coordenadas de un elemento diferencial de masa dm en el sistema xyz están dadas en función de sus coordenadas en el sistema $x'y'z'$ por

$$x = x' + d_x, \qquad y = y' + d_y, \qquad z = z' + d_z. \tag{9.14}$$

Sustituyendo esas expresiones en la definición de I_{xx} obtenemos

$$\begin{aligned} I_{xx} = {} & \int_m [(y')^2 + (z')^2]\, dm + 2d_y \int_m y'\, dm \\ & + 2d_z \int_m z'\, dm + (d_y^2 + d_z^2) \int_m dm. \end{aligned} \tag{9.15}$$

La primera integral de la derecha es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje x'. Podemos demostrar que la segunda y la tercera integrales son cero usando las definiciones del centro de masa del cuerpo expresado en el sistema coordenado $x'y'z'$:

$$\bar{x}' = \frac{\int_m x'\, dm}{\int_m dm}, \quad \bar{y}' = \frac{\int_m y'\, dm}{\int_m dm}, \quad \bar{z}' = \frac{\int_m z'\, dm}{\int_m dm}.$$

El centro de masa del cuerpo está en el origen del sistema $x'y'z'$, por lo que $\bar{x}' = \bar{y}' = \bar{z}' = 0$. Por tanto, en la Ec. (9.15) la segunda y tercera integrales de la derecha son cero, y obtenemos

$$I_{xx} = I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m,$$

donde m es la masa del cuerpo. Sustituyendo las Ecs. (9.14) en la definición de I_{xy} obtenemos

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_m x'y'\, dm + d_x \int_m y'\, dm + d_y \int_m x'\, dm + d_x d_y \int_m dm \\ &= I_{x'y'} + d_x d_y m. \end{aligned}$$

Si procedemos de esta manera para cada uno de los momentos y productos de inercia, obtenemos los **teoremas de los ejes paralelos:**

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m, \\ I_{yy} &= I_{y'y'} + (d_x^2 + d_z^2)m, \\ I_{zz} &= I_{z'z'} + (d_x^2 + d_y^2)m, \\ I_{xy} &= I_{x'y'} + d_x d_y m, \\ I_{yz} &= I_{y'z'} + d_y d_z m, \\ I_{zx} &= I_{z'x'} + d_z d_x m. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Si se conoce la matriz de inercia de un cuerpo en un sistema coordenado particular, se pueden usar estos teoremas para determinar su matriz de inercia en cualquier sistema coordenado paralelo. También se pueden usar para determinar las matrices de inercia de cuerpos compuestos.

Momento de inercia respecto a un eje arbitrario

Si conocemos la matriz de inercia de un cuerpo rígido en un sistema coordenado dado con origen O, podemos determinar su momento de inercia respecto a cualquier eje arbitrario que pase por O. Supongamos que el cuerpo rígido gira con velocidad angular ω respecto a un eje arbitrario fijo L_0 que pase por O, y sea $\mathbf{e}$ un vector unitario con la misma dirección que ω (Fig. 9.15). En función del momento de inercia I_O respecto a L_O, el momento angular del cuerpo rígido respecto a L_O es

$$H_O = I_O|\omega|.$$

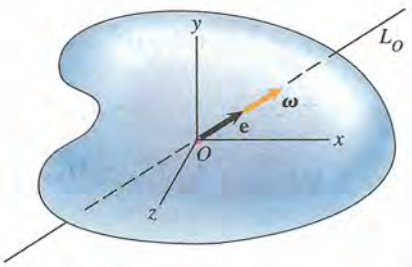


Figura 9.15
Cuerpo rígido girando alrededor de L_O.

Podemos expresar el vector de velocidad angular como

$$\omega = |\omega|(e_x\,\mathbf{i} + e_y\,\mathbf{j} + e_z\,\mathbf{k}),$$

de manera que $\omega_x = |\omega|e_x$, $\omega_y = |\omega|e_y$ y $\omega_z = |\omega|e_z$. Usando estas expresione y las Ecs. (9.5), el momento angular respecto a L_0 es

$$\begin{aligned} H_O = \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e} = {} & (I_{xx}|\omega|e_x - I_{xy}|\omega|e_y - I_{xz}|\omega|e_z)e_x \\ & +(-I_{yx}|\omega|e_x + I_{yy}|\omega|e_y - I_{yz}|\omega|e_z)e_y \\ & +(-I_{zx}|\omega|e_x - I_{zy}|\omega|e_y + I_{zz}|\omega|e_z)e_z. \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones para H_O obtenemos

$$I_O = I_{xx}e_x^2 + I_{yy}e_y^2 + I_{zz}e_z^2 - 2I_{xy}e_xe_y - 2I_{yz}e_ye_z - 2I_{zx}e_ze_x. \qquad (9.17)$$

Observe que el momento de inercia respecto a un eje arbitrario depende de los productos de inercia y de los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados. Si se conoce la matriz de inercia de un cuerpo, se puede usar la Ec. (9.17) para determinar su momento de inercia respecto a un eje que pase por O y cuya dirección esté dada por el vector unitario $\mathbf{e}$.

Ejes principales

Para *cualquier* cuerpo y origen O, existe por lo menos un sistema coordenado para el cual los productos de inercia son cero:

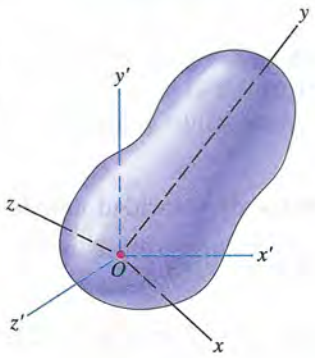
$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \tag{9.18}$$

Esos ejes coordenados se llaman **ejes principales** y los momentos de inercia se denominan **momentos de inercia principales.**

Si se conoce la matriz de inercia de un cuerpo rígido en un sistema coordenado $x'y'z'$ y los productos de inercia son cero, $x'y'z'$ es un conjunto de ejes principales. Suponga que los productos de inercia no son cero y que se quiere encontrar un conjunto de ejes principales xyz y los correspondientes momentos de inercia principales (Fig. 9.16). Se puede demostrar que los momentos de inercia principales son raíces de la ecuación cúbica

$$\begin{aligned} &I^3 - (I_{x'x'} + I_{y'y'} + I_{z'z'})I^2 \\ &+(I_{x'x'}I_{y'y'} + I_{y'y'}I_{z'z'} + I_{z'z'}I_{x'x'} - I_{x'y'}^2 - I_{y'z'}^2 - I_{z'x'}^2)I \\ &-(I_{x'x'}I_{y'y'}I_{z'z'} - I_{x'x'}I_{y'z'}^2 - I_{y'y'}I_{x'z'}^2 - I_{z'z'}I_{x'y'}^2 - 2I_{x'y'}I_{y'z'}I_{z'x'}) = 0. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Figura 9.16
El sistema $x'y'z'$ con su origen en O y un conjunto de ejes principales xyz.



Para cada momento de inercia principal I, el vector $\mathbf{V}$ con componentes

$$\begin{aligned} V_{x'} &= (I_{y'y'} - I)(I_{z'z'} - I) - I_{y'z'}^2, \\ V_{y'} &= I_{x'y'}(I_{z'z'} - I) + I_{x'z'}I_{y'z'}, \\ V_{z'} &= I_{x'z'}(I_{y'y'} - I) + I_{x'y'}I_{y'z'} \end{aligned} \tag{9.20}$$

es paralelo al correspondiente eje principal.

Para determinar los momentos principales de inercia se deben obtener las raíces de la Ec. (9.19) y sustituir uno de los momentos principales de inercia de las Ecs. (9.20) para obtener las componentes de un vector pa-

ralelo al eje principal correspondiente. Repitiendo esto para cada momento principal, se pueden determinar los tres ejes principales. Si no se obtiene una solución de las Ecs. (9.20), se debe escoger otro de los momentos principales. Se pueden elegir arbitrariamente los ejes x, y, z, aunque se debe cuidar que el sistema coordenado sea dextrógiro. Véase el Ej. 9.5.

Los ejes en O respecto a los cuales el momento de inercia de un cuerpo es mínimo o máximo son los principales. Si los tres momentos de inercia principales son iguales, cualquier sistema coordenado con origen en O es un conjunto de ejes principales y el momento de inercia tiene el mismo valor respecto a cualquier eje por O. Esto ocurre si, por ejemplo, el cuerpo es una esfera homogénea con origen en su centro (Fig. 9.17a). Si dos de los momentos son iguales, se puede determinar un eje principal único a partir del tercero, y cualesquier ejes perpendiculares a dicho eje son principales. Esto sucede cuando un cuerpo tiene un eje de simetría rotacional y el origen está sobre él (Fig. 9.17b). El eje de simetría es el eje principal único.

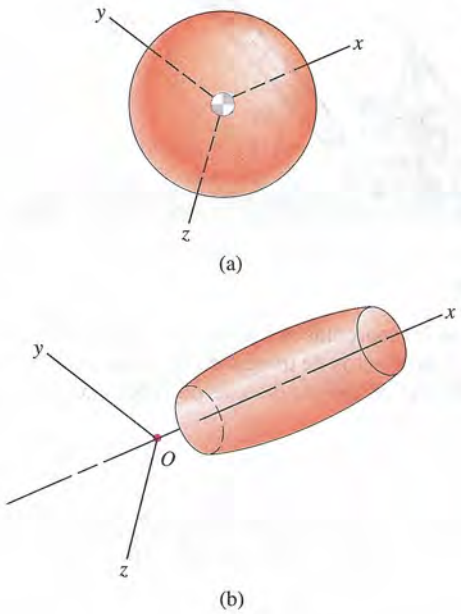


Figura 9.17

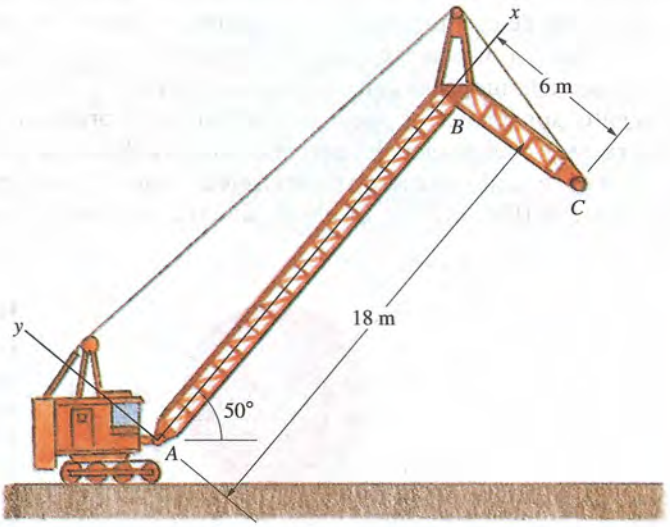
(a) Esfera homogénea. Cualquier sistema coordenado con su origen en el centro es un conjunto de ejes principales.
(b) Cuerpo rotacionalmente simétrico. El eje de simetría es un eje principal y cualesquier ejes perpendiculares son ejes principales.

En los siguientes ejemplos determinamos momentos y productos de inercia de cuerpos simples, aplicamos los teoremas de los ejes paralelos y evaluamos los momentos angulares de cuerpos rígidos.

Ejemplo 9.3

El aguilón AB de la grúa de la Fig. 9.18 tiene una masa de 4800 kg y el pescante BC tiene una masa de 1600 kg y es perpendicular a AB. Modelando cada uno como una barra esbelta y tratándolos como un sólo cuerpo, determine los momentos y productos de inercia del cuerpo en el sistema coordenado que se muestra.

Figura 9.18



ESTRATEGIA

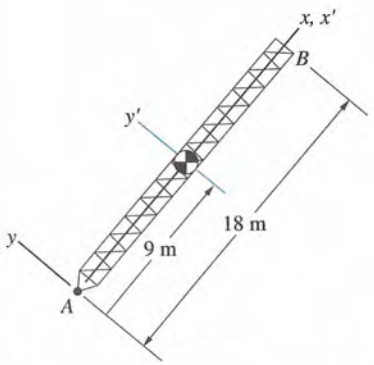
Podemos aplicar los teoremas de los ejes paralelos a cada barra para determinar sus momentos y productos de inercia en el sistema coordenado dado. Los momentos y productos de inercia del cuerpo combinado son las sumas de los de las dos barras.

SOLUCIÓN

Aguilón AB En la Fig. (a) fijamos un sistema coordenado $x'y'z'$ paralelo con su origen en el centro de masa del aguilón AB. En el sistema $x'y'z'$, la matriz de inercia del aguilón AB es

$$[I'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}(4800)(18)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}(4800)(18)^2 \end{bmatrix} \text{ kg-m}^2.$$



(a) Aplicación de los teoremas de los ejes paralelos al aguilón AB.

Las coordenadas del origen del sistema $x'y'z'$ respecto a xyz son $d_x = 9$ m, $d_y = 0$, $d_z = 0$. Aplicando los teoremas de los ejes paralelos tenemos

$$I_{xx} = I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m = 0,$$

$$I_{yy} = I_{y'y'} + (d_x^2 + d_z^2)m = \frac{1}{12}(4800)(18)^2 + (9)^2(4800)$$

$$= 518\,400 \text{ kg-m}^2,$$

$$I_{zz} = I_{z'z'} + (d_x^2 + d_y^2)m = \frac{1}{12}(4800)(18)^2 + (9)^2(4800)$$

$$= 518\,400 \text{ kg-m}^2,$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y m = 0,$$

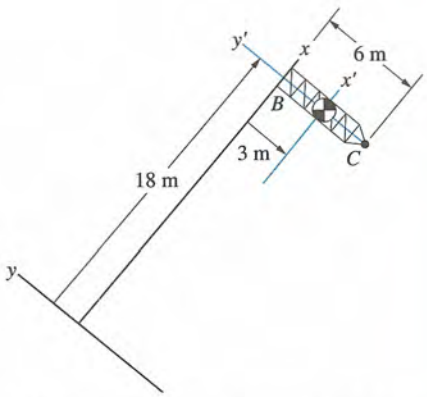
$$I_{yz} = I_{y'z'} + d_y d_z m = 0,$$

$$I_{zx} = I_{z'x'} + d_z d_x m = 0.$$

Pescante BC En la Fig. (b) fijamos un sistema coordenado $x'y'z'$ paralelo con su origen en el centro de masa de BC. En el sistema $x'y'z'$, la matriz de inercia de BC es

$$[I'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{12}(1600)(6)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}(1600)(6)^2 \end{bmatrix} \text{ kg-m}^2.$$



(b) Aplicación de los teoremas de los ejes paralelos al pescante BC.

Las coordenadas del origen del sistema $x'y'z'$ respecto a xyz son $d_x = 18$ m, $d_y = -3$ m, $d_z = 0$. Aplicando los teoremas de los ejes paralelos tenemos

$$I_{xx} = I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m = \frac{1}{12}(1600)(6)^2 + (-3)^2(1600)$$

$$= 19\,200 \text{ kg-m}^2,$$

$$I_{yy} = I_{y'y'} + (d_x^2 + d_z^2)m = 0 + (18)^2(1600) = 518\,400 \text{ kg-m}^2,$$

$$I_{zz} = I_{z'z'} + (d_x^2 + d_y^2)m = \frac{1}{12}(1600)(6)^2 + [(18)^2 + (-3)^2](1600)$$

$$= 537\,600 \text{ kg-m}^2,$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y m = 0 + (18)(-3)(1600) = -86\,400 \text{ kg-m}^2,$$

$$I_{yz} = I_{y'z'} + d_y d_z m = 0,$$

$$I_{zx} = I_{z'x'} + d_z d_x m = 0.$$

Sumando los resultados para las dos barras, obtenemos la matriz de inercia del cuerpo compuesto:

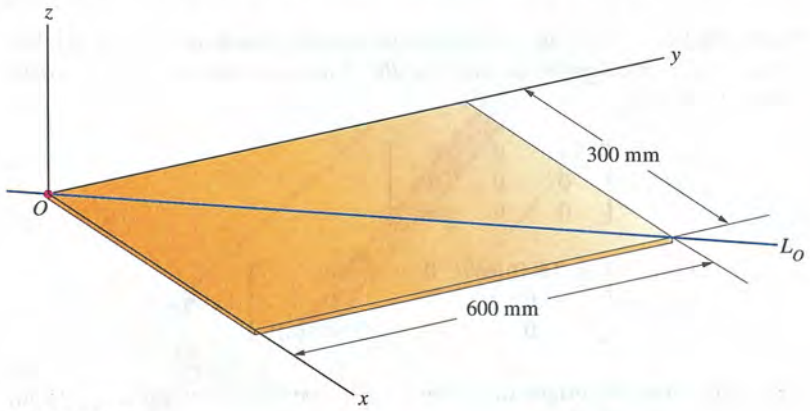
$$[I] = \begin{bmatrix} 19\,200 & -(-86\,400) & 0 \\ -(-86\,400) & 518\,400 + 518\,400 & 0 \\ 0 & 0 & 518\,400 + 537\,600 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19\,200 & 86\,400 & 0 \\ 86\,400 & 1\,036\,800 & 0 \\ 0 & 0 & 1\,056\,000 \end{bmatrix} \text{ kg-m}^2.$$

Ejemplo 9.4

La placa rectangular de 4 kg de la Fig. 9.19 se halla en el plano x-y del sistema coordenado fijo al cuerpo.
(a) Determine los momentos y productos de inercia de la placa.
(b) Determine el momento de inercia de la placa respecto al eje diagonal L_O.
(c) Si la placa está girando respecto al punto fijo O con velocidad angular $\omega = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (rad/s), ¿cuál es el momento angular de la placa respecto a O?

Figura 9.19



ESTRATEGIA

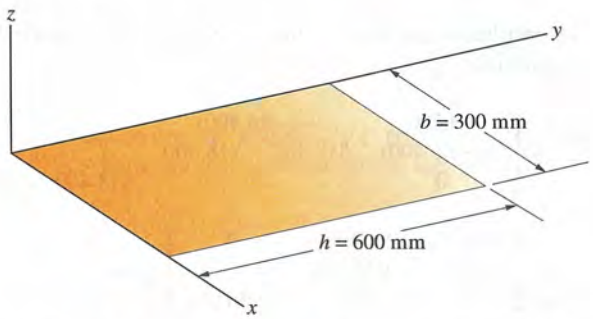
(a) En el Ap. B podemos obtener los momentos y productos de inercia del área rectangular de la placa y usar las Ecs. (9.13) para encontrar los momentos y productos de inercia.
(b) Una vez conocidos los momentos y productos de inercia, podemos usar la Ec. (9.17) para determinar el momento de inercia respecto a L_O.
(c) El momento angular respecto a O está dado por la Ec. (9.8).

SOLUCIÓN

(a) Del Ap. B, los momentos de inercia del área de la sección transversal de la placa son (Fig. a):

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3, \qquad I_y = \frac{1}{3}hb^3,$$

$$I_{xy}^A = \frac{1}{4}b^2h^2, \qquad J_O = \frac{1}{3}(bh^3 + hb^3).$$



(a) Determinación de los momentos de inercia del área de la placa.

Por tanto, los momentos y productos de inercia son

$$I_{xx} = \frac{m}{A} I_x = \frac{(4)}{(0.3)(0.6)} \left(\frac{1}{3}\right) (0.3)(0.6)^3 = 0.48 \text{ kg-m}^2,$$

$$I_{yy} = \frac{m}{A} I_y = \frac{(4)}{(0.3)(0.6)} \left(\frac{1}{3}\right) (0.6)(0.3)^3 = 0.12 \text{ kg-m}^2,$$

$$I_{xy} = \frac{m}{A} I_{xy}^A = \frac{(4)}{(0.3)(0.6)} \left(\frac{1}{4}\right) (0.3)^2(0.6)^2 = 0.18 \text{ kg-m}^2,$$

$$I_{zz} = \frac{m}{A} J_O = \frac{(4)}{(0.3)(0.6)} \left(\frac{1}{3}\right) [(0.3)(0.6)^3 + (0.6)(0.3)^3] = 0.60 \text{ kg-m}^2,$$

$$I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

(b) Para aplicar la Ec. (9.17) debemos determinar las componentes de un vector unitario paralelo a L_O:

$$\mathbf{e} = \frac{300\,\mathbf{i} + 600\,\mathbf{j}}{|300\,\mathbf{i} + 600\,\mathbf{j}|} = 0.447\,\mathbf{i} + 0.894\,\mathbf{j}.$$

El momento de inercia respecto a L_O es

$$\begin{aligned} I_O &= I_{xx}e_x^2 + I_{yy}e_y^2 + I_{zz}e_z^2 - 2I_{xy}e_xe_y - 2I_{yz}e_ye_z - 2I_{zx}e_ze_x \\ &= (0.48)(0.447)^2 + (0.12)(0.894)^2 - 2(0.18)(0.447)(0.894) \\ &= 0.048 \text{ kg-m}^2. \end{aligned}$$

(c) El momento angular de la placa respecto a O es

$$\begin{bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.48 & -0.18 & 0 \\ -0.18 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.28 \\ -0.96 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg-m}^2/\text{s}.$$

Ejemplo 9.5

En un sistema coordenado $x'y'z'$ con su origen en el centro de masa, la matriz de inercia de un cuerpo rígido es

$$[I'] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ kg-m}^2.$$

Determine los momentos de inercia principales y las direcciones de un conjunto de ejes principales respecto al sistema $x'y'z'$.

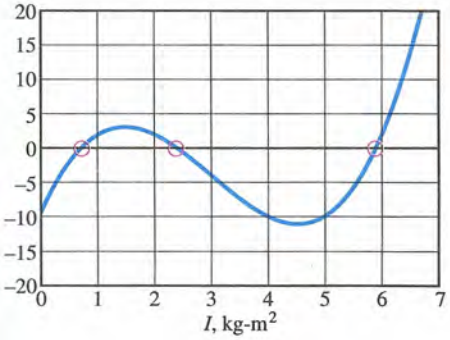


Figura 9.20
Gráfica de $I^3 - 9I^2 + 20I - 10$.

SOLUCIÓN

Sustituyendo en la Ec. (9.19) los momentos y productos de inercia, obtenemos la ecuación

$$I^3 - 9I^2 + 20I - 10 = 0.$$

En la Fig. 9.20 mostramos el valor del lado izquierdo de esta ecuación en función de I. Las tres raíces, que son los valores de los momentos de inercia principales en kg-m^2, son $I_1 = 0.708$, $I_2 = 2.397$ e $I_3 = 5.895$.

Sustituyendo en las Ecs. (9.20) el momento de inercia principal $I_1 = 0.708$ kg-m^2 y dividiendo el vector resultante $\mathbf{V}$ entre su magnitud, obtenemos un vector unitario paralelo al eje principal correspondiente:

$$\mathbf{e}_1 = 0.473\,\mathbf{i} + 0.864\,\mathbf{j} + 0.171\,\mathbf{k}.$$

Sustituyendo $I_2 = 2.397$ kg-m^2 en las Ecs. (9.20) obtenemos el vector unitario

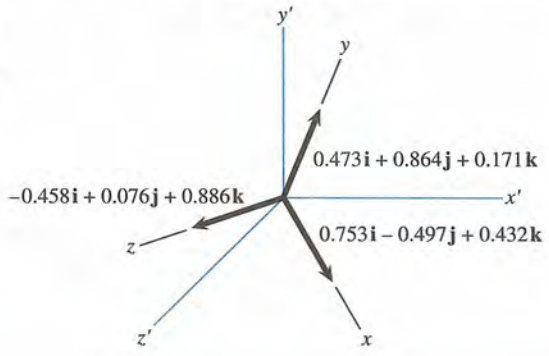
$$\mathbf{e}_2 = -0.458\,\mathbf{i} + 0.076\,\mathbf{j} + 0.886\,\mathbf{k},$$

y sustituyendo $I_3 = 5.895$ kg-m^2 en las Ecs. (9.20) obtenemos el vector unitario

$$\mathbf{e}_3 = 0.753\,\mathbf{i} - 0.497\,\mathbf{j} + 0.432\,\mathbf{k}.$$

Hemos determinado los momentos de inercia principles y las componentes de los vectores unitarios paralelos a los ejes principales correspondientes. En la Fig. 9.21 mostramos los ejes principales, designándolos arbitrariamente de modo que $I_{xx} = 5.895$ kg-m^2, $I_{yy} = 0.708$ kg-m^2 e $I_{zz} = 2.397$ kg-m^2.

Figura 9.21
Ejes principales. La elección de cuál es x, y o z es arbitraria.



Problemas

9.18 La matriz de inercia de un cuerpo rígido en un sistema coordenado fijo al cuerpo con su origen en el centro de masa es

$$[I] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ kg-m}^2.$$

Si la velocidad angular del cuerpo es $\omega = 10\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ (rad/s), ¿cuál es su momento angular respecto al centro de masa?

9.19 ¿Cuál es el momento de inercia del cuerpo rígido del Prob. 9.18 respecto al eje que pasa por el origen y el punto (4, −4, 7) m?

Estrategia: Determine las componentes de un vector unitario paralelo al eje y use la Ec. (9.17).

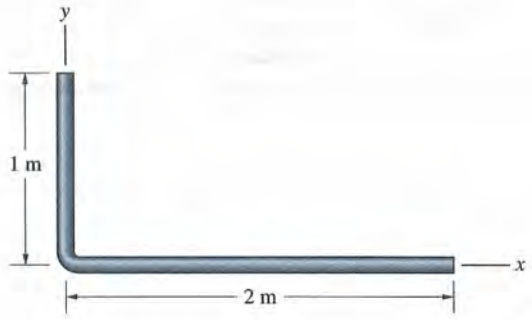
9.20 Un cuerpo rígido gira respecto a un punto fijo O. Su matriz de inercia en un sistema coordenado fijo al cuerpo con su origen en O es

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ slug-pie}^2$$

Si la velocidad angular del cuerpo rígido es $\omega = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ (rad/s), ¿cuál es su momento angular respecto a O?

9.21 ¿Cuál es el momento de inercia del cuerpo rígido del Prob. 9.20 respecto al eje que pasa por el origen y el punto (−1, 5, 2) pie?

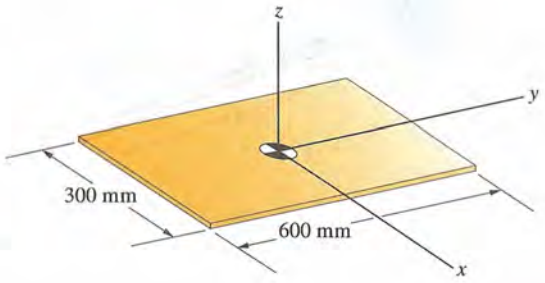
9.22 En la Fig. P9.22 la masa de la barra esbelta homogénea es de 6 kg. Determine sus momentos y productos de inercia en el sistema coordenado que se muestra.



P9.22

9.23 Considere la barra esbelta del Prob. 9.22.
(a) Determine sus momentos y productos de inercia en un sistema coordenado paralelo $x'y'z'$ con su origen en el centro de masa de la barra.
(b) Si la barra está girando con velocidad angular $\omega = 4\mathbf{i}$ (rad/s), ¿cuál es su momento angular respecto a su centro de masa?

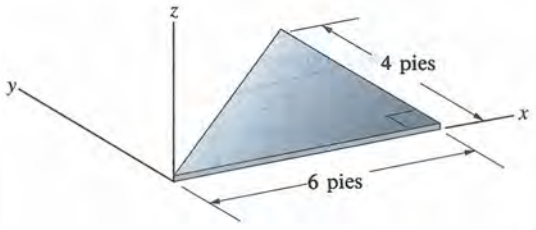
9.24 La placa rectangular delgada de 4 kg de la figura está en el plano x-y. Determine sus momentos y productos de inercia en el sistema coordenado que se muestra.



P9.24

9.25 Si la placa del Prob. 9.24 está girando con velocidad angular $\omega = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (rad/s), ¿cuál es su momento angular respecto a su centro de masa?

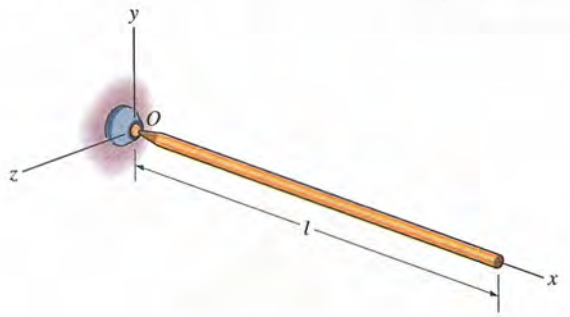
9.26 La placa triangular delgada de 30 lb de la figura está en el plano x-y. Determine sus momentos y productos de inercia en el sistema coordenado que se muestra.



P9.26

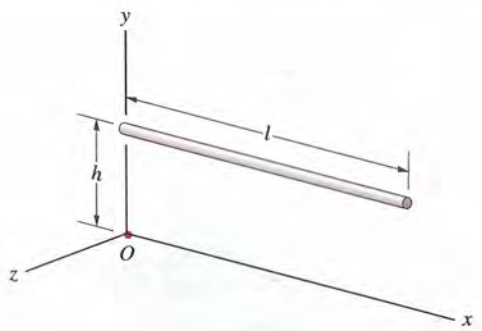
9.27 Considere la placa triangular del Prob. 9.26.
(a) Determine sus momentos y productos de inercia en un sistema coordenado paralelo $x'y'z'$ con su origen en el centro de masa de la placa.
(b) Si la placa está girando con velocidad angular $\omega = 20\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ (rad/s), ¿cuál es su momento angular respecto a su centro de masa?

9.28 En la Fig. P9.28, la barra esbelta de masa m gira respecto al punto fijo O con velocidad angular $\omega = \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Determine su momento angular (a) respecto a su centro de masa; (b) respecto a O.



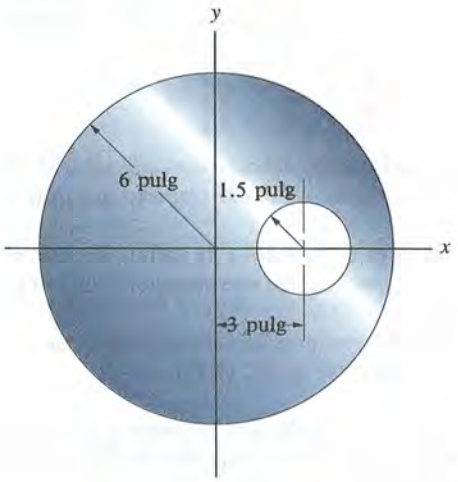
P9.28

9.29 La barra esbelta de masa m mostrada es paralela al eje x. Si el sistema coordenado está fijo al cuerpo y su velocidad angular respecto al punto fijo O es $\omega = \omega_y\mathbf{j}$, ¿cuál es el momento angular de la barra respecto a O?



P9.29

9.30 Determine la matriz de inercia de la placa delgada de 0.6 slug en el sistema coordenado que se muestra.



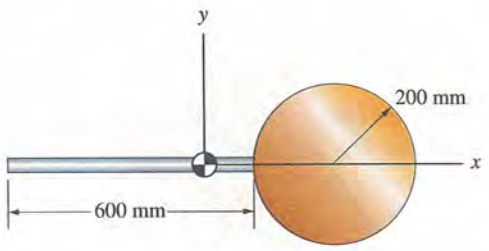
P9.30

9.31 La placa delgada de 0.6 slug del Prob. 9.30 tiene velocidad angular $\omega = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ (rad/s). ¿Cuál es su momento angular respecto a su centro de masa?

9.32 En el Ej. 9.3 los momentos y productos de inercia del cuerpo compuesto formado por las barras AB y BC se determinaron en el sistema coordenado de la Fig. 9.18. Determine los productos y momentos de inercia del cuerpo en un sistema coordenado $x'y'z'$ paralelo con su origen en el centro de masa del cuerpo.

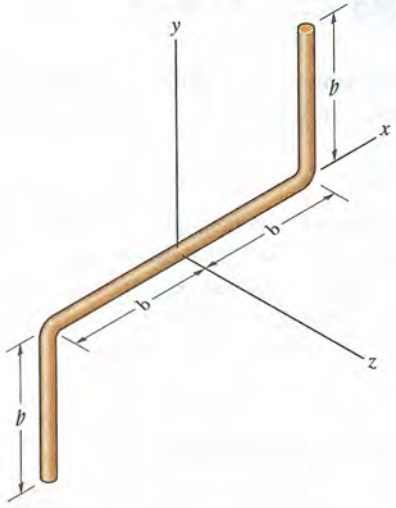
9.33 Suponga que la grúa del Ej. 9.3 sufre una rotación de cuerpo rígido respecto al eje vertical de 0.1 rad/s en dirección antihoraria cuando se ve desde arriba.
(a) ¿Cuál es la velocidad angular del vector ω?
(b) ¿Cuál es el momento angular del cuerpo formado por AB y BC *respecto a su centro de masa*?

9.34 Una barra esbelta de 3 kg está unida rígidamente a un disco circular delgado de 2 kg. En el sistema coordenado fijo al cuerpo que se muestra, la velocidad angular del cuerpo compuesto es $\boldsymbol{\omega} = 100\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (rad/s). ¿Cuál es el momento angular del cuerpo respecto a su centro de masa?



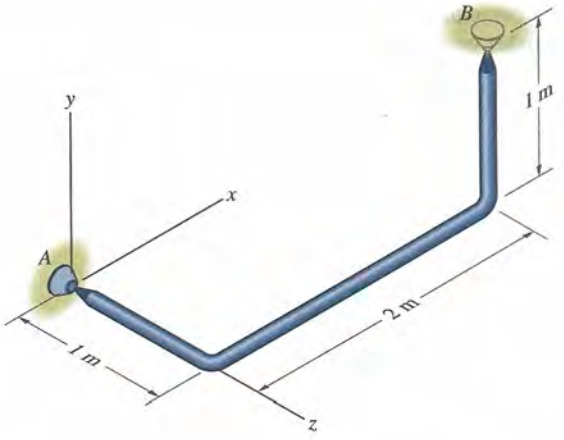
P9.34

9.35 La masa de la barra esbelta homogénea es m. Si la barra gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_0(24\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$, ¿cuál es su momento angular respecto a su centro de masa?



P9.35

9.36 La barra esbelta homogénea de 8 kg de la figura tiene soportes de bola y cuenca en A y B.
(a) ¿Cuál es su momento de inercia respecto al eje AB?
(b) Si la barra gira respecto al eje AB a 4 rad/s, ¿cuál es la magnitud de su momento angular respecto a su eje de rotación?



P9.36

9.37 La barra esbelta homogénea de 8 kg del Prob. 9.36 se libera del reposo en la posición mostrada (el plano x-z es horizontal). En ese instante, ¿cuál es la magnitud de la aceleración angular de la barra respecto al eje AB?

9.38 En un sistema coordenado $x'y'z'$ con origen en el centro de masa, la matriz de inercia de un cuerpo rígido es

$$[I'] = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 \\ 10 & 60 & 0 \\ -10 & 0 & 80 \end{bmatrix} \text{ kg-m}^2.$$

Determine los momentos de inercia principales y los vectores unitarios paralelos a los ejes principales correspondientes.

9.39 En un sistema coordenado $x'y'z'$ con su origen en el centro de masa, la matriz de un cuerpo rígido es

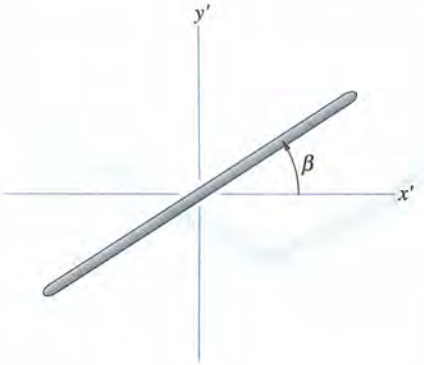
$$[I'] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \text{ slug-pie}^2.$$

Determine los momentos de inercia principales y los vectores unitarios paralelos a los ejes principales correspondientes.

9.40 La barra esbelta de 1 kg y 1 m de longitud mostrada está en el plano x-y. Su matriz de momento de inercia es

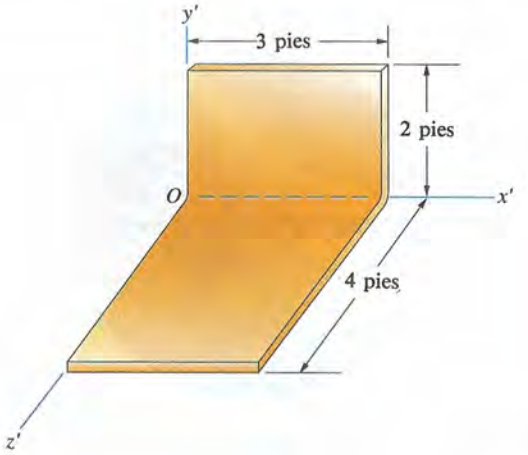
$$[I'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}\operatorname{sen}^2\beta & -\frac{1}{12}\operatorname{sen}\beta\cos\beta & 0 \\ -\frac{1}{12}\operatorname{sen}\beta\cos\beta & \frac{1}{12}\cos^2\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Use las Ecs. (9.19) y (9.20) para determinar los momentos de inercia principales y los vectores unitarios paralelos a los ejes principales correspondientes.



P9.40

9.41 La masa de la placa delgada homogénea de la figura es de 3 slugs. Para un sistema coordenado con origen en O, determine los momentos de inercia principales y los vectores unitarios paralelos a los ejes principales correspondientes.



P9.41

9.4 Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones que rigen el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, conocidas como ecuaciones de Euler, consisten en la segunda ley de Newton

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

y ecuaciones de movimiento angular. En las siguientes secciones deducimos las ecuaciones de movimiento angular, comenzando con los principios de la cantidad de movimiento para un sistema de partículas desarrollados en el Cap. 7, y usando las expresiones del momento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones.

Rotación respecto a un punto fijo

Si un cuerpo rígido gira respecto a un punto fijo O, la suma de los momentos respecto a O debido a fuerzas y pares externos es igual a la razón de cambio del momento angular respecto a O (Ec. 7.11):

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt}. \tag{9.21}$$

Para obtener las ecuaciones del movimiento angular debemos sustituir aquí las componentes del momento angular dadas por las Ecs. (9.5). El sistema coordenado que se utiliza para expresar estas componentes suele estar fijo al cuerpo, por lo que gira con la velocidad angular ω del cuerpo rígido. En algunos casos conviene usar un sistema coordenado que gire pero que no esté fijo al cuerpo. Denotemos con Ω el vector de velocidad

angular del sistema coordenado, donde $\Omega = \omega$ si el sistema está fijo al cuerpo. Expresando $\mathbf{H}_O$ en función de sus componentes,

$$\mathbf{H}_O = H_{Ox}\,\mathbf{i} + H_{Oy}\,\mathbf{j} + H_{Oz}\,\mathbf{k},$$

la razón de cambio del momento angular es

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \frac{dH_{Ox}}{dt}\,\mathbf{i} + H_{Ox}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dH_{Oy}}{dt}\,\mathbf{j} + H_{Oy}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dH_{Oz}}{dt}\,\mathbf{k} + H_{Oz}\frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

Expresando las derivadas respecto al tiempo de los vectores unitarios en función de la velocidad angular Ω del sistema coordenado,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \Omega \times \mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \Omega \times \mathbf{j}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \Omega \times \mathbf{k},$$

podemos escribir la Ec. (9.21) como

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \frac{dH_{Ox}}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dH_{Oy}}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dH_{Oz}}{dt}\,\mathbf{k} + \Omega \times \mathbf{H}_O. \tag{9.22}$$

Sustituyendo las componentes de $\mathbf{H}_O$ de la Ec. (9.5) en esta ecuación, obtenemos las ecuaciones del movimiento angular:

$$\begin{aligned}
\Sigma M_{Ox} &= I_{xx}\frac{d\omega_x}{dt} - I_{xy}\frac{d\omega_y}{dt} - I_{xz}\frac{d\omega_z}{dt} \\
&\quad - \Omega_z(-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z) \\
&\quad + \Omega_y(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z), \\
\Sigma M_{Oy} &= -I_{yx}\frac{d\omega_x}{dt} + I_{yy}\frac{d\omega_y}{dt} - I_{yz}\frac{d\omega_z}{dt} \\
&\quad + \Omega_z(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z) \\
&\quad - \Omega_x(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z), \\
\Sigma M_{Oz} &= -I_{zx}\frac{d\omega_x}{dt} - I_{zy}\frac{d\omega_y}{dt} + I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} \\
&\quad - \Omega_y(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z) \\
&\quad + \Omega_x(-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z).
\end{aligned} \tag{9.23}$$

Como las componentes de la velocidad angular, igual que las componentes de $\mathbf{H}_O$, se expresan en un sistema coordenado que gira con velocidad angular Ω, la aceleración angular del cuerpo rígido es

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_x}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{d\omega_y}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{d\omega_z}{dt}\,\mathbf{k} + \Omega \times \omega. \tag{9.24}$$

Si el sistema coordenado no gira o está fijo al cuerpo, los términos $d\omega_x/dt$, $d\omega_y/dt$ y $d\omega_z/dt$ son las componentes de la aceleración angular del cuerpo. De lo contrario, se debe usar la Ec. (9.24) para determinarlas.

Podemos escribir las Ecs. (9.23) como la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \Sigma M_{Ox} \\ \Sigma M_{Oy} \\ \Sigma M_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \tag{9.25}$$

Movimiento general

La suma de los momentos respecto al centro de masa de un cuerpo rígido debido a las fuerzas y pares externos es igual a la razón de cambio del momento angular respecto al centro de masa (Ec. 7.13):

$$\Sigma \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt}. \tag{9.26}$$

En función de las componentes del vector de momento angular, podemos escribir esta ecuación como

$$\Sigma \mathbf{M} = \frac{dH_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dH_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dH_z}{dt}\mathbf{k} + \Omega \times \mathbf{H}, \tag{9.27}$$

donde Ω es la velocidad angular del sistema coordenado. Sustituyendo las Ecs. (9.9) en esta ecuación, obtenemos las ecuaciones del movimiento angular

$$\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_{xx}\frac{d\omega_x}{dt} - I_{xy}\frac{d\omega_y}{dt} - I_{xz}\frac{d\omega_z}{dt} \\
&\quad -\Omega_z(-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z) \\
&\quad +\Omega_y(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z), \\
\Sigma M_y &= -I_{yx}\frac{d\omega_x}{dt} + I_{yy}\frac{d\omega_y}{dt} - I_{yz}\frac{d\omega_z}{dt} \\
&\quad +\Omega_z(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z) \\
&\quad -\Omega_x(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z), \\
\Sigma M_z &= -I_{zx}\frac{d\omega_x}{dt} - I_{zy}\frac{d\omega_y}{dt} + I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} \\
&\quad -\Omega_y(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z) \\
&\quad +\Omega_x(-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z),
\end{aligned} \tag{9.28}$$

o

$$\begin{bmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \tag{9.29}$$

Las ecuaciones del movimiento angular para el movimiento general, y las expresiones para los momentos y productos de inercia, son idénticas en forma a las obtenidas para la rotación alrededor de un punto fijo. Sin embargo, en el caso del movimiento general las ecuaciones del movimiento angular se expresan en función de las componentes del momento respecto al centro de masa, y los momentos y productos de inercia se expresan en relación con un sistema coordenado con su origen en el centro de masa.

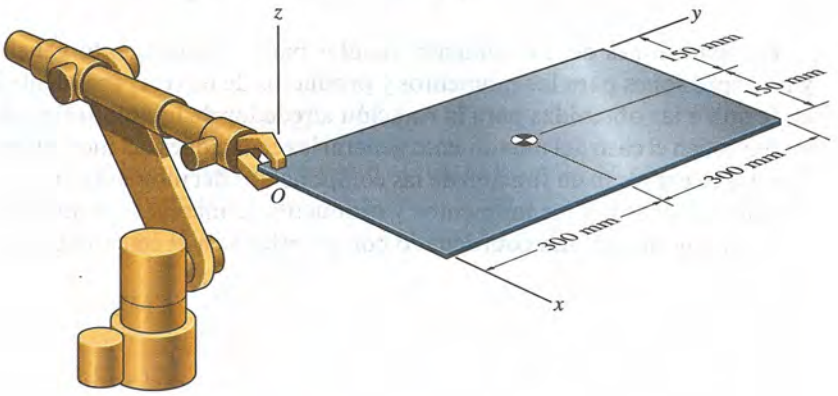
En los siguientes ejemplos usamos las ecuaciones de Euler para analizar movimientos tridimensionales de cuerpos rígidos. Esto suele implicar tres pasos:

1. Escoja un sistema coordenado. *Si un cuerpo gira respecto a un punto fijo O, las ecuaciones del movimiento angular se simplifican si se expresan en un sistema coordenado con origen en O. La alternativa es usar un sistema coordenado con origen en el centro de masa. En ambos casos, escoja una orientación para los ejes del sistema que simplifiquen la determinación de los momentos y productos de inercia.*
2. Dibuje el diagrama de cuerpo libre. *Aísle el cuerpo e identifique las fuerzas y pares externos que actúan sobre él.*
3. Aplique las ecuaciones de movimiento. *Use la segunda ley de Newton y las ecuaciones de movimiento angular para relacionar las fuerzas y pares que actúan sobre el cuerpo con la aceleración de su centro de masa y su aceleración angular.*

Ejemplo 9.6

Durante un proceso de ensamblado, la placa rectangular de 4 kg de la Fig. 9.22 se mantiene fija en O por medio de un robot. El punto O está fijo. En el instante mostrado, la placa está horizontal, su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (rad/s), y su aceleración angular es $\boldsymbol{\alpha} = -10\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (rad/s^2). Determine el par que ejerce el robot sobre la placa.

Figura 9.22

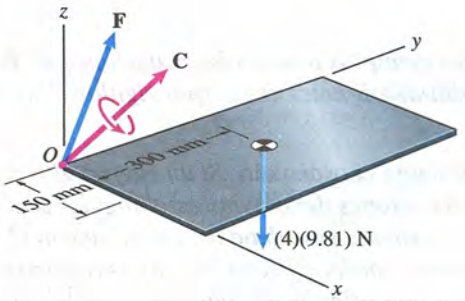


ESTRATEGIA

La placa gira respecto al punto fijo O, por lo que podemos usar la Ec. (9.25) para determinar el momento total ejercido sobre la placa respecto a O.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre Denotamos con $\mathbf{F}$ y $\mathbf{C}$ la fuerza y el par que ejerce el robot sobre la placa (Fig. a).



(a) Diagrama de cuerpo libre de la placa.

Aplicación de las ecuaciones de movimiento El momento total respecto a O es la suma del par ejercido por el robot y el momento respecto a O debido al peso de la placa:

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{M}_O &= \mathbf{C} + (0.15\,\mathbf{i} + 0.30\,\mathbf{j}) \times [-(4)(9.81)\,\mathbf{k}] \\ &= \mathbf{C} - 11.77\,\mathbf{i} + 5.89\,\mathbf{j} \text{ (N-m).}\end{aligned} \tag{9.30}$$

Para obtener el par desconocido $\mathbf{C}$, podemos determinar el momento total respecto a O con la Ec. (9.25).

Sea el sistema coordenado fijo al cuerpo, por lo que su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es igual a la velocidad angular de la placa $\boldsymbol{\Omega}$ En el Ej. 9.4 determinamos la matriz de inercia de la placa, y obtuvimos

$$[I] = \begin{bmatrix} 0.48 & -0.18 & 0 \\ -0.18 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el momento total respecto a O ejercido sobre la placa es

$$\begin{bmatrix} \Sigma M_{Ox} \\ \Sigma M_{Oy} \\ \Sigma M_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.48 & -0.18 & 0 \\ -0.18 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.48 & -0.18 & 0 \\ -0.18 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5.88 \\ 2.52 \\ 0.72 \end{bmatrix} \text{ N-m.}$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (9.30),

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{C} - 11.77\,\mathbf{i} + 5.89\,\mathbf{j} = -5.88\,\mathbf{i} + 2.52\,\mathbf{j} + 0.72\,\mathbf{k},$$

determinamos el par $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = 5.89\,\mathbf{i} - 3.37\,\mathbf{j} + 0.72\,\mathbf{k} \text{ (N-m).}$$

Ejemplo 9.7

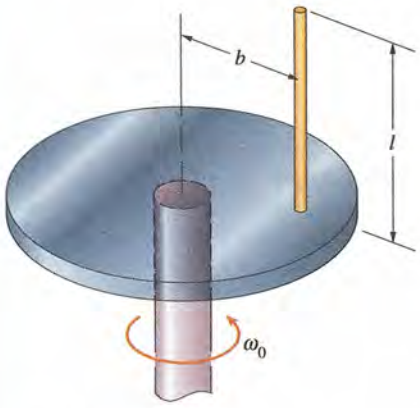


Figura 9.23

Una barra esbelta vertical de masa m está rígidamente unida a un disco horizontal que gira con velocidad angular constante ω_0 (Fig. 9.23). ¿Qué fuerza y par ejerce el disco sobre la barra?

ESTRATEGIA

Las fuerzas y pares externos sobre la barra son su peso y la fuerza y el par ejercidos por el disco. La velocidad y la aceleración angulares de la barra están dadas, y podemos determinar la aceleración de su centro de masa, así que podemos usar las ecuaciones de Euler para calcular la fuerza y el par totales.

SOLUCIÓN

Selección de un sistema coordenado En la Fig. (a) colocamos el origen de un sistema fijo al cuerpo en el centro de masa, con el eje y vertical y el eje x en dirección radial. Con esta orientación obtendremos expresiones sencillas para la velocidad angular y la aceleración del centro de masa de la barra.

Dibujo del diagrama de cuerpo libre La Fig. (a) es el diagrama de cuerpo libre de la barra mostrando la fuerza $\mathbf{F}$ y el par $\mathbf{C}$ ejercidos por el disco.

Aplicación de las ecuaciones de movimiento La aceleración del centro de masa de la barra debido a su movimiento a lo largo de su trayectoria circular es $\mathbf{a} = -\omega_0^2 b\mathbf{i}$. De la segunda ley de Newton,

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{F} - mg\,\mathbf{j} = m(-\omega_0^2 b\,\mathbf{i}),$$

obtenemos la fuerza que ejerce el disco sobre la barra:

$$\mathbf{F} = -m\omega_0^2 b\,\mathbf{i} + mg\,\mathbf{j}.$$

El momento total respecto al centro de masa es la suma del par $\mathbf{C}$ y el momento debido a $\mathbf{F}$:

$$\Sigma\mathbf{M} = \mathbf{C} + \left(-\frac{1}{2}l\,\mathbf{j}\right) \times (-m\omega_0^2 b\,\mathbf{i} + mg\,\mathbf{j})$$

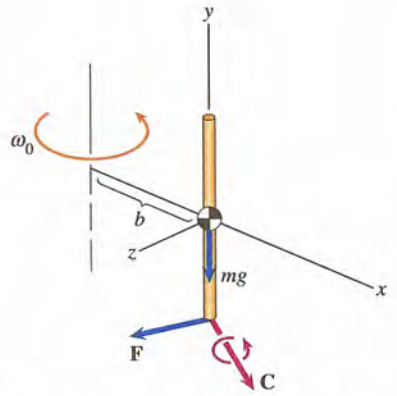
$$= C_x\,\mathbf{i} + C_y\,\mathbf{j} + \left(C_z - \frac{1}{2}mlb\omega_0^2\right)\mathbf{k}.$$

La matriz de inercia de la barra en el sistema coordenado de la Fig. (a) es

$$[I] = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{bmatrix},$$

y su velocidad angular, $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{j}$, es constante. La ecuación de movimiento angular, Ec. (9.29), es

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z - \frac{1}{2}mlb\omega_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



(a) Diagrama de cuerpo libre de la barra.

El lado derecho es igual a cero, por lo que las componentes del par ejercido por el disco sobre la barra son $C_x = 0$, $C_y = 0$, $C_z = \frac{1}{2}mlb\omega_0^2$.

Solución alternativa La barra gira respecto a un eje fijo, por lo que también podemos determinar el par $\mathbf{C}$ usando la Ec. (9.25). Sea el punto fijo O el centro del disco (Fig. b), y orientemos el sistema coordenado fijo al cuerpo con el eje x pasando por la base de la barra. El momento total respecto a O es

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{C} + (b\,\mathbf{i}) \times (-m\omega_0^2 b\,\mathbf{i} + mg\,\mathbf{j}) + \left(b\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}l\,\mathbf{j}\right) \times (-mg\,\mathbf{j})$$

$$= \mathbf{C}.$$

Así, el único momento respecto a O es el par ejercido por el disco. Aplicando los teoremas de los ejes paralelos, los momentos y productos de inercia de la barra son (Fig. c)

$$I_{xx} = I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m = \frac{1}{12}ml^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2 m = \frac{1}{3}ml^2,$$

$$I_{yy} = I_{y'y'} + (d_x^2 + d_z^2)m = mb^2,$$

$$I_{zz} = I_{z'z'} + (d_x^2 + d_y^2)m = \frac{1}{12}ml^2 + \left[b^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2\right] m = \frac{1}{3}ml^2 + mb^2,$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y m = 0 + (b)\left(\frac{1}{2}l\right) m = \frac{1}{2}mbl,$$

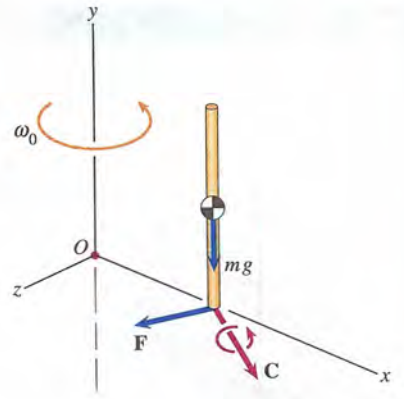
$$I_{yz} = I_{y'z'} + d_y d_z m = 0,$$

$$I_{zx} = I_{z'x'} + d_z d_x m = 0.$$

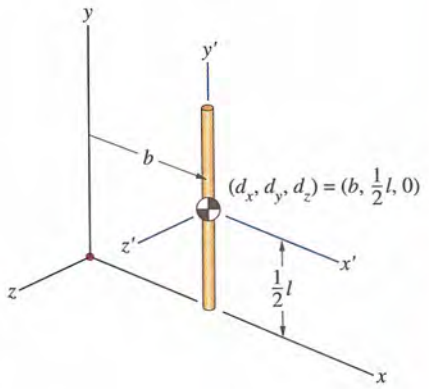
Sustituyendo estos resultados en la Ec. (9.25) obtenemos

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & -\frac{1}{2}mbl & 0 \\ -\frac{1}{2}mbl & mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2 + mb^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}mlb\omega_0^2 \end{bmatrix}.$$



(b) Ecuación del movimiento angular respecto al punto fijo O.



(c) Aplicación del teorema de los ejes paralelos.

COMENTARIO

Si la barra estuviera unida al disco por un soporte de bola y cuenca en vez de estar empotrada, se vería que la barra giraría hacia afuera debido a la rotación del disco. Hemos determinado el par que el empotramiento ejerce sobre la barra y que impide que gire hacia afuera.

Ejemplo 9.8

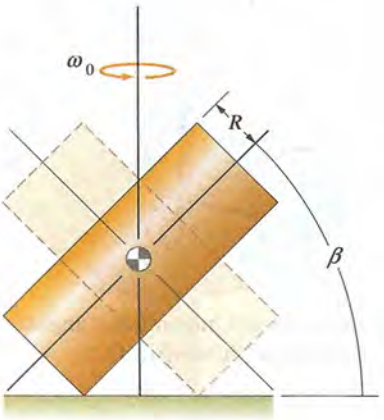


Figura 9.24

El cilindro inclinado homogéneo de la Fig. 9.24 sufre un movimiento uniforme en el cual un extremo rueda sobre el piso mientras su centro de masa permanece fijo. El ángulo β entre el eje del cilindro y la horizontal permanece constante, y el eje del cilindro gira respecto al eje vertical con velocidad angular constante ω_0. El cilindro tiene masa m, radio R y longitud l. ¿Qué valor tiene ω_0?

ESTRATEGIA

Expresando las ecuaciones del movimiento angular en función de ω_O, podemos determinar el valor ω_O que satisface las ecuaciones. Por tanto, hay que determinar primero la velocidad angular ω del cilindro en función de ω_0. Podemos simplificar esta tarea usando un sistema coordenado no fijo al cuerpo.

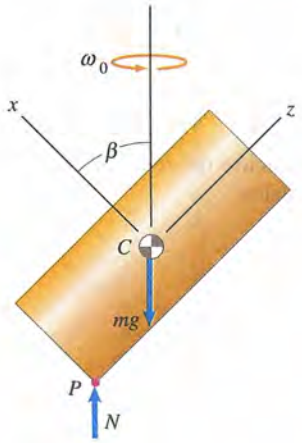
SOLUCIÓN

Selección de un sistema coordenado Usamos un sistema coordenado cuyo eje z permanezca alineado con el eje del cilindro y cuyo eje y permanezca horizontal (Fig. a). La razón para hacerlo así es que la velocidad angular del sistema coordenado es fácil de describir (el sistema coordenado gira respecto al eje vertical con velocidad angular ω_0) y la rotación del cilindro respecto al sistema coordenado es también fácil de describir. El vector de velocidad angular del sistema coordenado es

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_0 \cos\beta\,\mathbf{i} + \omega_0 \operatorname{sen}\beta\,\mathbf{k}.$$

Respecto al sistema coordenado, el cilindro gira respecto al eje z. Escribiendo su velocidad angular respecto al sistema coordenado como $\omega_{\text{rel}}\mathbf{k}$, el vector de velocidad angular del cilindro es

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \omega_{\text{rel}}\,\mathbf{k} = \omega_0 \cos\beta\,\mathbf{i} + (\omega_0 \operatorname{sen}\beta + \omega_{\text{rel}})\,\mathbf{k}.$$



(a) Sistema coordenado con el eje z alineado con el eje del cilindro y el eje y horizontal.

Podemos determinar ω_{rel} de la condición de que la velocidad del punto P en contacto con el piso es cero. Expresando la velocidad de P en función de la velocidad del centro de masa C, obtenemos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/C}:$$

$$0 = 0 + [\omega_0 \cos\beta\,\mathbf{i} + (\omega_0 \operatorname{sen}\beta + \omega_{\text{rel}})\,\mathbf{k}] \times \left[-R\,\mathbf{i} - \frac{1}{2}l\,\mathbf{k}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}l\omega_0 \cos\beta - R(\omega_0 \operatorname{sen}\beta + \omega_{\text{rel}})\right]\mathbf{j}.$$

Despejando ω_{rel} obtenemos

$$\omega_{\text{rel}} = \left[\frac{1}{2}(l/R)\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\right]\omega_0.$$

Por tanto, el vector de velocidad angular del cilindro es

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \cos\beta\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(l/R)\omega_0 \cos\beta\,\mathbf{k}.$$

Dibujo del diagrama de cuerpo libre En la Fig. (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre del cilindro, mostrando su peso y la fuerza normal ejercida por el piso. Como el centro de masa es fijo, sabemos que el piso no ejerce fuerza horizontal sobre el cilindro y que la fuerza normal es $N = mg$.

Aplicación de las ecuaciones de movimiento El momento respecto al centro de masa debido a la fuerza normal es

$$\Sigma \mathbf{M} = \left(mgR \operatorname{sen}\beta - \frac{1}{2} mgl \cos\beta \right) \mathbf{j}.$$

Según el Ap. C, la matriz de inercia es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo las expresiones para $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\Sigma \mathbf{M}$ y los momentos y productos de inercia en la ecuación del movimiento angular, Ec. (9.29), y evaluando los productos matriciales, obtenemos la ecuación

$$mg\left(R \operatorname{sen}\beta - \frac{1}{2} l \cos\beta \right) = \left(\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 \right) \omega_0^2 \operatorname{sen}\beta \cos\beta - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2 \right) \omega_0^2 (l/R) \cos^2\beta.$$

Podemos resolver esta ecuación para ω_0^2:

$$\omega_0^2 = \frac{g(R \operatorname{sen}\beta - \frac{1}{2} l \cos\beta)}{(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}l^2)\operatorname{sen}\beta \cos\beta - \frac{1}{4} lR \cos^2\beta}. \tag{9.31}$$

COMENTARIO

Si la solución da un valor negativo de ω_0^2 para un valor dado de β, el supuesto movimiento uniforme del cilindro no es posible. Por ejemplo, si el diámetro del cilindro es igual a su longitud, $2R = l$, podemos escribir la Ec. (9.31) como

$$\frac{R\omega_0^2}{g} = \frac{\operatorname{sen}\beta - \cos\beta}{\frac{7}{12}\operatorname{sen}\beta \cos\beta - \frac{1}{2}\cos^2\beta}.$$

En la Fig. 9.25 mostramos la gráfica de esta ecuación en función de β. Para valores de β de 40° a 45° aproximadamente, no hay solución real para ω_0. Observe que en $\beta = 45°$, $\omega_0 = 0$, lo que significa que el cilindro es fijo y está en equilibrio con el centro de masa directamente sobre el punto P.

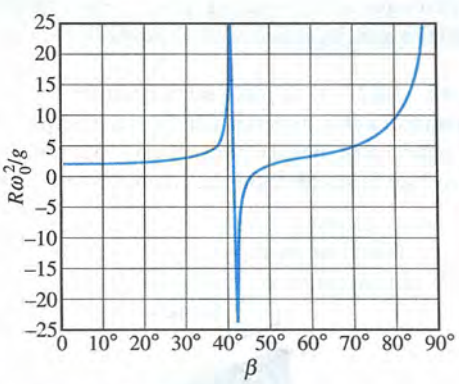


Figura 9.25
Gráfica de $R\omega_0^2/g$ en función de β.

Problemas

9.42 La matriz de inercia de un cuerpo rígido en un sistema coordenado fijo al cuerpo con su origen en el centro de masa es

$$[I] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ kg-m}^2.$$

Si la velocidad angular del cuerpo rígido es $\omega = 10\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ (rad/s) y su aceleración angular es cero, ¿cuáles son las componentes del momento total respecto a su centro de masa?

9.43 Si el momento total respecto al centro de masa del cuerpo rígido del Prob. 9.42 es cero, ¿cuáles son las componentes de su aceleración angular?

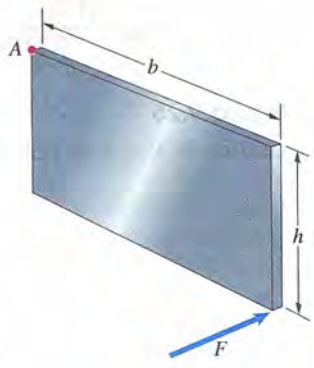
9.44 Un cuerpo rígido gira respecto a un punto fijo O. Su matriz de inercia en un sistema coordenado fijo al cuerpo con origen en O es

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ slug-pie}^2$$

Si la velocidad angular del cuerpo rígido es $\omega = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ (rad/s) y su aceleración angular es cero, ¿cuáles son las componentes del momento total respecto a O?

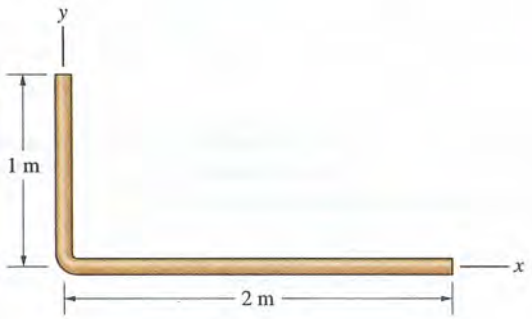
9.45 Si el momento total respecto a O debido a las fuerzas y pares que actúan sobre el cuerpo rígido del Prob. 9.44 es cero, ¿cuáles son las componentes de su aceleración angular?

9.46 En $t = 0$, la placa rectangular en reposo de masa m que se muestra está sometida a la fuerza F perpendicular a la placa. Ninguna otra fuerza o par actúa sobre la placa. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración del punto A en $t = 0$?



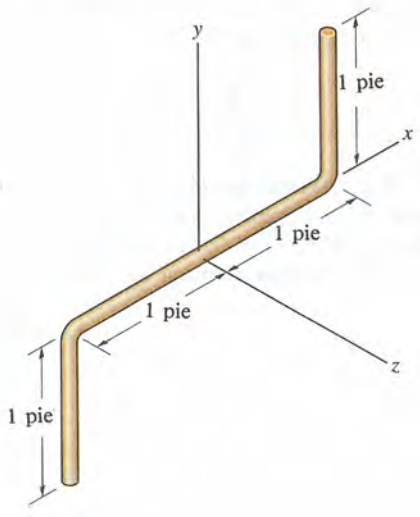
P9.46

9.47 En la Fig. P9.47 la masa de la barra esbelta homogénea es de 6 kg. En $t = 0$, la barra en reposo está sometida a la fuerza $\mathbf{F} = 12\mathbf{k}$ (N) en el punto $x = 2$ m, $y = 0$. Ninguna otra fuerza o par actúa sobre la barra.
(a) ¿Cuál es la aceleración angular de la barra en $t = 0$?
(b) ¿Cuál es la aceleración del punto $x = 2$ m, $y = 0$ en $t = 0$?



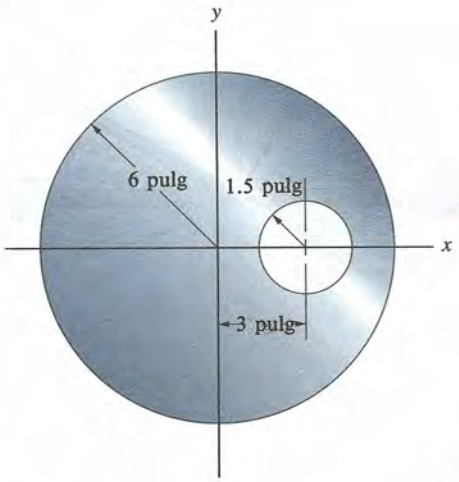
P9.47

9.48 En la Fig. P9.48 la masa de la barra esbelta homogénea es de 1.2 slugs. En $t = 0$, la barra en reposo está sometida a la fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ (lb) en el punto $x = 1$ pie, $y = 1$ pie. Ninguna otra fuerza o par actúa sobre la barra.
(a) ¿Cuál es la aceleración angular de la barra en $t = 0$?
(b) ¿Cuál es la aceleración del punto $x = -1$ pie, $y = -1$ pie en $t = 0$?



P9.48

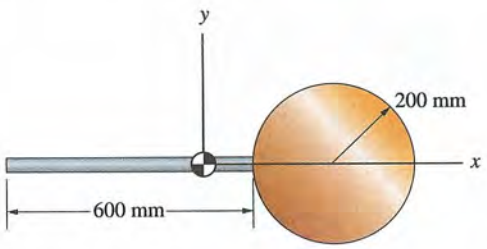
9.49 En la Fig. P9.49, la placa delgada de 0.6 slugs tiene velocidad angular $\omega = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ (rad/s) y su aceleración angular es cero. ¿Cuáles son las componentes del momento total ejercido sobre la placa respecto a su centro de masa?



P9.49

9.50 En $t = 0$, la placa del Prob. 9.49 tiene velocidad angular $\omega = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ (rad/s) y está sometida a la fuerza $\mathbf{F} = -10\mathbf{k}$ (lb) que actúa en el punto (0, 6, 0) pulg. Ninguna otra fuerza o par actúa sobre la placa. ¿Cuáles son las componentes de su aceleración angular en ese instante?

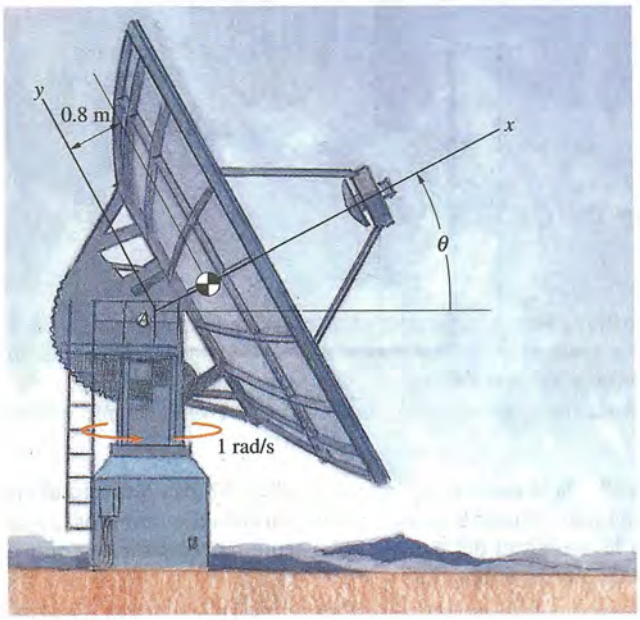
9.51 Una barra esbelta de 3 kg está rígidamente unida a un disco circular delgado de 2 kg. En el sistema coordenado fijo al cuerpo que se muestra, la velocidad angular del cuerpo compuesto es $\omega = 100\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (rad/s) y su aceleración angular es cero. ¿Cuáles son las componentes del momento total ejercido sobre el cuerpo respecto a su centro de masa?



P9.51

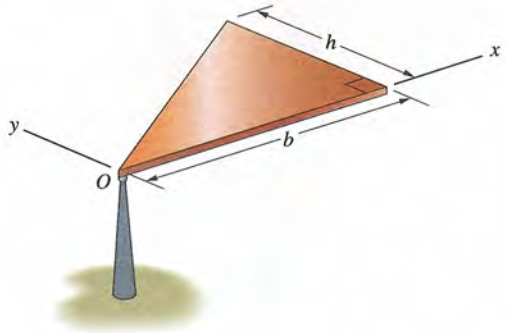
9.52 En $t = 0$, el cuerpo del Prob. 9.51 está en reposo y sometido al momento $\Sigma\mathbf{M} = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ (N-m) respecto a su centro de masa. Ninguna otra fuerza o par actúan sobre él. ¿Cuáles son las componentes de su aceleración angular en $t = 0$?

9.53 La base de la antena parabólica gira con una velocidad angular constante de 1 rad/s. El ángulo $\theta = 30°$, $d\theta/dt = 20°/s$ y $d^2\theta/dt^2 = -40°/s^2$. La masa de la antena es de 280 kg, y sus momentos y productos de inercia en kg-m^2 son $I_{xx} = 140$, $I_{yy} = I_{zz} = 220$, $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$. Determine el par ejercido por su soporte A sobre la antena en ese instante.



P9.53

9.54 Una placa triangular delgada de masa m está soportada en O por una junta de bola y cuenca. Si está en posición horizontal y se suelta del reposo, ¿cuáles son las componentes de su aceleración angular en ese instante?

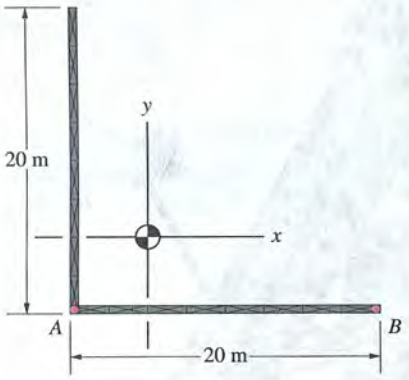


P9.54

9.55 Determine la fuerza que ejerce el soporte de bola y cuenca sobre la placa del Prob. 9.54 en el instante en que se libera.

9.56 En el Prob. 9.54, la masa de la placa es de 5 kg, b = 900 mm y h = 600 mm. Si la placa se libera en la posición horizontal con velocidad angular $\omega = 4\mathbf{i}$ (rad/s), ¿cuáles son las componentes de su aceleración angular en ese instante?

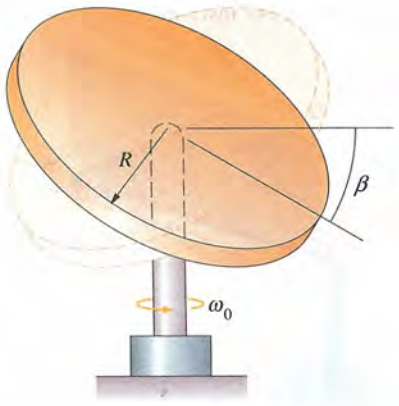
9.57 Una parte de una estación espacial se puede modelar como dos barras esbeltas rígidamente unidas, cada una de masa 5 Mg. La parte no está girando en $t = 0$ cuando un motor de reacción de control ejerce una fuerza $\mathbf{F} = 400\mathbf{k}$ (N) en B. ¿Cuál es la aceleración del punto A en ese instante?



P9.57

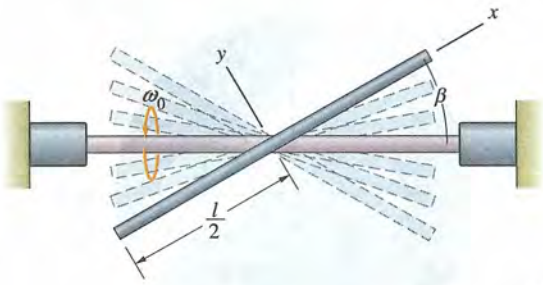
9.58 Si la parte descrita en el Prob. 9.57 gira respecto al eje x a razón constante de una revolución cada diez minutos, ¿cuál es la magnitud del par que su sistema de reacción de control debe ejercer sobre ella?

9.59 En la Fig. P9.59, el disco circular delgado de radio R y masa m está rígidamente unido al árbol vertical. El disco está inclinado en un ángulo β respecto al plano horizontal. El árbol gira con velocidad angular constante ω_0. ¿Cuál es la magnitud del par que ejerce el árbol sobre el disco?



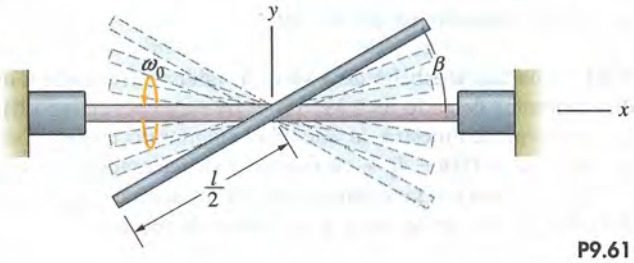
P9.59

9.60 En la Fig. P9.60, una barra esbelta de masa m y longitud l está soldada a un eje horizontal que gira con velocidad angular constante ω_0. Determine las magnitudes de la fuerza $\mathbf{F}$ y el par $\mathbf{C}$ ejercidos por el eje sobre la barra (escriba las ecuaciones del movimiento angular relativas al sistema coordenado fijo al cuerpo que se muestra).



P9.60

9.61 Una barra esbelta de masa m y longitud l está soldada a un eje horizontal que gira con velocidad angular constante ω_0. Determine la magnitud del par $\mathbf{C}$ ejercido por el eje sobre la barra (escriba la ecuación del movimiento angular relativa al sistema coordenado fijo al cuerpo que se muestra).



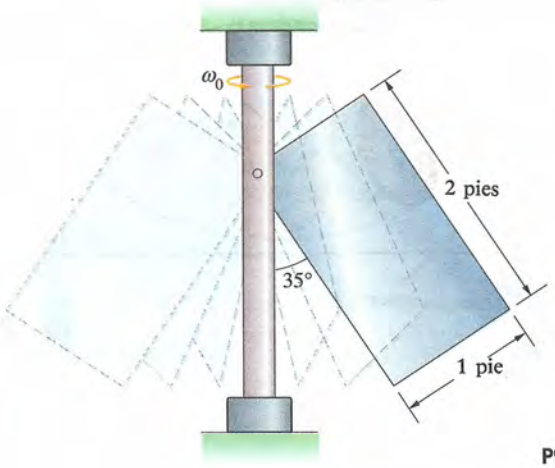
P9.61

9.62 La barra esbelta de longitud l y masa m está articulada al eje vertical en O. El eje vertical gira con velocidad angular constante ω_0. Muestre que el valor ω_0 necesario para que la barra permanezca en un ángulo constante β respecto a la vertical es

$$\omega_0 = \sqrt{3g/(2l\cos\beta)}.$$

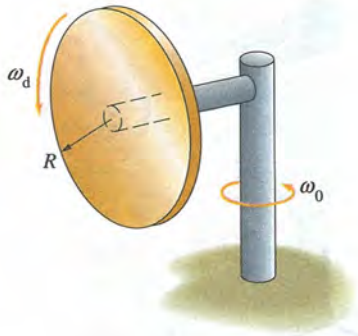
P9.62

9.63 El árbol vertical gira con velocidad angular constante ω_0. El ángulo de 35° entre el borde de la placa rectangular delgada de 10 lb articulada al árbol y el árbol permanece constante. Determine ω_0.



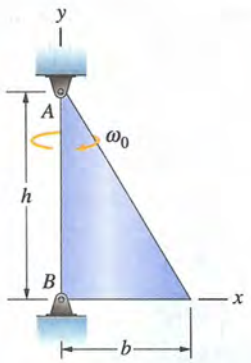
P9.63

9.64 Un disco circular delgado de masa m montado sobre un eje horizontal gira respecto al eje con velocidad angular constante ω_d. El eje horizontal está rígidamente unido a un árbol vertical que gira con velocidad angular constante ω_0. Determine la magnitud del par que ejerce el eje horizontal sobre el disco.



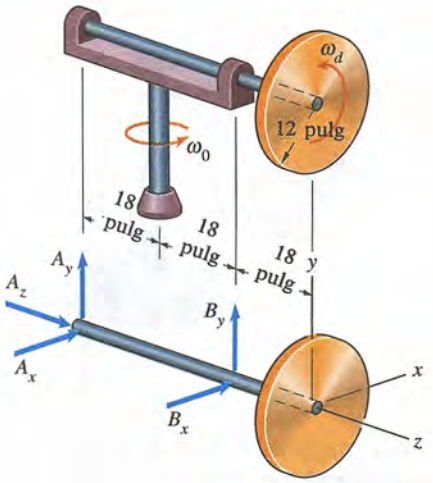
P9.64

9.65 La placa triangular delgada de la figura tiene soportes de bola y cuenca en A y B. El eje y es vertical. Si la placa gira con velocidad angular constante ω_0, ¿cuáles son las componentes horizontales de las reacciones sobre la placa en A y B?



P9.65

9.66 El disco circular delgado de 10 lb de la figura está unido rígidamente al árbol esbelto horizontal de 12 lb. Ambos giran respecto al eje del árbol con velocidad angular constante ω_d = 20 rad/s. El conjunto gira respecto al eje vertical con velocidad angular constante ω_0 = 4 rad/s. Determine las componentes de la fuerza y el par que ejerce el disco sobre el árbol horizontal.

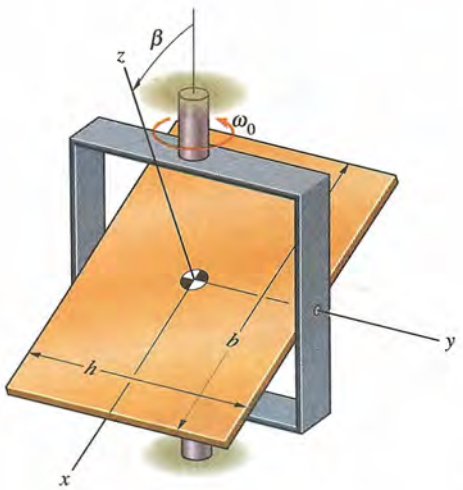


P9.66

9.67 En el Prob. 9.66 determine las reacciones ejercidas por los dos cojinetes sobre el árbol horizontal.

9.68 La placa rectangular delgada está unida al marco rectangular por medio de pasadores. El marco gira con velocidad angular constante ω_0. Demuestre que

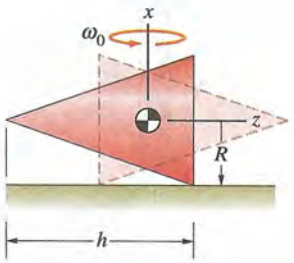
$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\omega_0^2 \operatorname{sen}\beta \cos\beta.$$



P9.68

9.69 En la Fig. P9.69 el eje del cono circular recto de masa m, altura h y radio R gira respecto al eje vertical con velocidad angular constante ω_0. Su centro de masa es fijo y su base rueda sobre el piso. Demuestre que la velocidad angular ω_0 requerida para este movimiento es $\omega_0 = \sqrt{10g/3R}$.

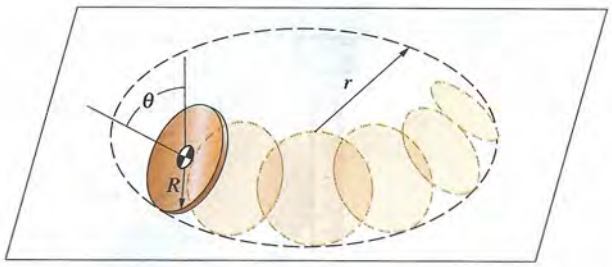
Estrategia: Considere que el eje z permanece alineado con el eje del cono y que el eje x permanece vertical.



P9.69

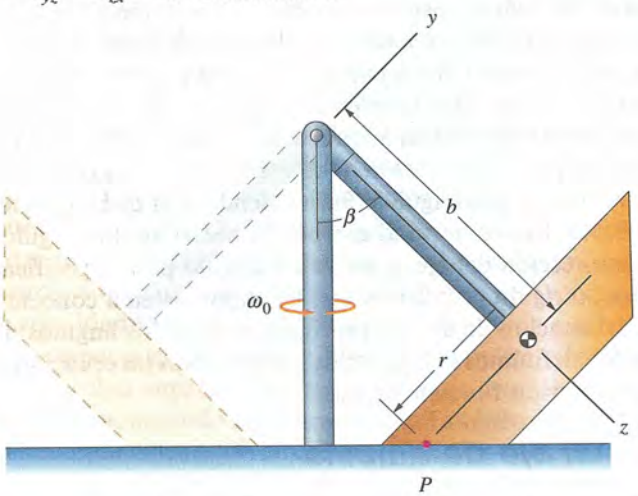
9.70 Un disco circular delgado de radio R y masa m rueda a lo largo de una trayectoria circular de radio r. La magnitud v de la velocidad del centro del disco y el ángulo θ entre el eje del disco y la vertical son constantes. Demuestre que v satisface la ecuación

$$v^2 = \frac{\frac{2}{3}g\cot\theta(r - R\cos\theta)^2}{r - \frac{5}{6}R\cos\theta}.$$



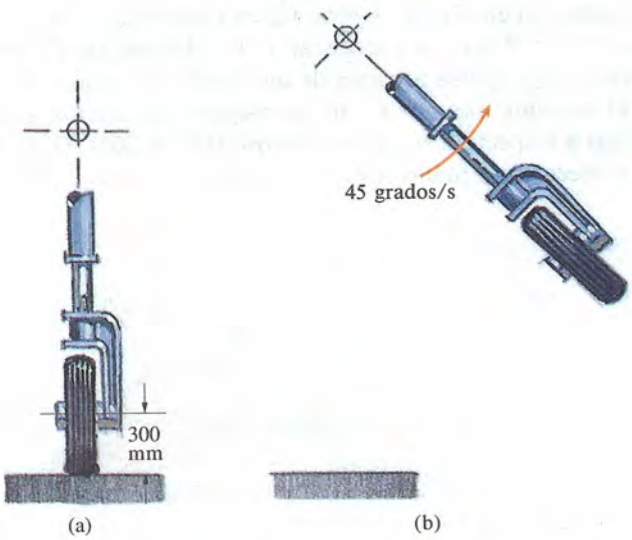
P9.70

9.71 El eje vertical mostrado gira con velocidad angular constante ω_0, ocasionando que la rueda gire sobre la superficie horizontal. Suponga que el punto P de la rueda está en reposo en el instante mostrado, y que la fuerza N ejercida por la superficie sobre la rueda es perpendicular a ésta y actúa en P. La masa de la rueda es m y sus momentos y productos de inercia relativos al sistema coordenado que se muestra son I_{xx}, $I_{yy} = I_{zz}$ e $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$. Determine N.



P9.71

9.72 En la Fig. (a) se muestra el tren de aterrizaje visto desde atrás del avión. El radio de la rueda es de 300 mm y su momento de inercia es de 2 kg-m^2. El avión despega a 30 m/s. Después del despegue, el tren se recoge girando hacia el lado derecho del avión (Fig. b). Determine la magnitud del par ejercido por la rueda sobre su soporte. (Ignore el movimiento angular del avión.)



P9.72

9.73 Si el conductor vira a su izquierda, ¿tenderá el par que ejercen las ruedas sobre la motocicleta a que ésta se incline hacia el lado izquierdo o hacia el derecho del conductor?

P9.73

9.74 Sustituyendo en la Ec. (9.22) las componentes de $\mathbf{H}_O$ dadas por las Ecs. (9.5), deduzca las Ecs. (9.23).

9.5 Ángulos de Euler

Las ecuaciones del movimiento angular relacionan el momento total que actúa sobre un cuerpo rígido con su velocidad y aceleración angulares. Si conocemos el momento total y la velocidad angular, podemos determinar la aceleración angular. Sin embargo, ¿cómo podemos usar la aceleración angular para determinar la posición angular u orientación en función del tiempo? Para explicar cómo se hace esto, primero debemos mostrar cómo especificar la orientación de un cuerpo rígido en tres dimensiones.

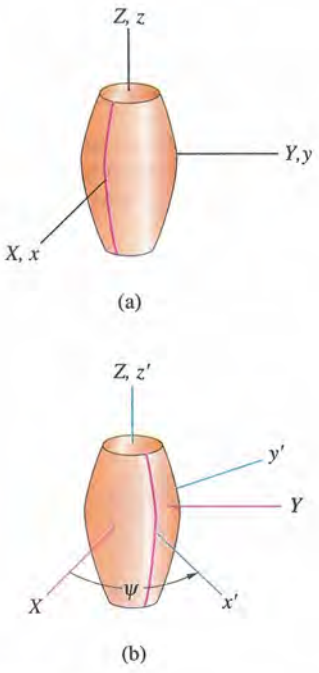
Hemos visto que para describir la orientación de un cuerpo rígido en movimiento plano se requiere sólo el ángulo θ que especifica la rotación del cuerpo respecto a alguna orientación de referencia. En el movimiento tridimensional se requieren tres ángulos. Para entender por qué, consideremos un eje particular fijo respecto al cuerpo. Se necesitan dos ángulos para especificar la dirección del eje, y un tercer ángulo para especificar la rotación del cuerpo rígido respecto al eje. El mejor sistema conocido para describir la orientación de un cuerpo rígido es el de los ángulos de Euler. En esta sección definimos tales ángulos y expresamos las ecuaciones del movimiento angular en función de ellos.

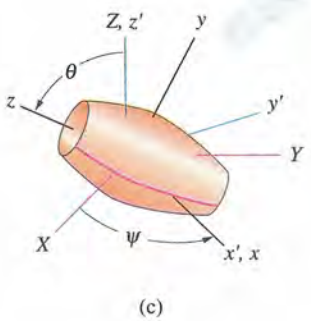
Cuerpos con un eje de simetría

Primero explicamos cómo se usan los ángulos de Euler para describir la orientación de un cuerpo que tiene un eje de simetría rotacional, ya que este caso da las ecuaciones más sencillas de movimiento angular.

Definiciones Suponemos que un cuerpo tiene un eje de simetría rotacional y presentamos dos sistemas coordenados: el xyz, con su eje z coincidiendo con el eje de simetría del cuerpo, y el XYZ, que es un **sistema coordenado de referencia** inercial. Empezamos considerando que el cuerpo está en una posición tal que los sistemas xyz y XYZ quedan sobrepuestos (Fig. 9.26a).

Nuestro primer paso es girar el cuerpo y el sistema xyz juntos a través de un ángulo ψ respecto al eje Z (Fig. 9.26b). En esta orientación intermedia denotamos con $x'y'z'$ el sistema coordenado. A continuación giramos el cuerpo y el sistema xyz juntos a través de un ángulo θ respecto al eje x' (Fig. 9.26c). Finalmente giramos el cuerpo respecto al sistema xyz a través de un ángulo ϕ respecto a su eje de simetría (Fig. 9.26d). Observe que el eje x permanece en el plano XY.





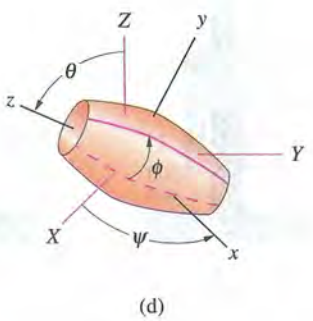


Figura 9.26
(a) Posición de referencia.
(b) Rotación ψ respecto al eje Z.
(c) Rotación θ respecto al eje x'.
(d) Rotación ϕ del cuerpo respecto al sistema xyz.

Los ángulos ψ y θ especifican la orientación del sistema xyz respecto al sistema de referencia XYZ. ψ es el **ángulo de precesión** y θ es el **ángulo de nutación**. El ángulo ϕ que especifica el giro del cuerpo rígido respecto al sistema xyz se llama **ángulo de giro**. Estos tres ángulos especifican la orientación del cuerpo rígido respecto al sistema coordenado de referencia y se llaman **ángulos de Euler**. Podemos obtener cualquier orientación del cuerpo respecto al sistema coordenado de referencia mediante una elección apropiada de estos ángulos: Escogemos ψ y θ para obtener la dirección deseada del eje de simetría, y luego escogemos ϕ para obtener la posición deseada del cuerpo respecto a su eje de simetría.

Ecuaciones del movimiento angular Para analizar el movimiento de un cuerpo en términos de los ángulos de Euler, debemos expresar las ecuaciones del movimiento angular en función de ellos. La Fig. 9.27(a) muestra la rotación ψ desde la orientación de referencia del sistema xyz hasta su orientación intermedia $x'y'z'$. La velocidad angular del sistema coordenado debido a la razón de cambio de ψ se representa con el vector de velocidad angular $\dot{\psi}$ apuntando en la dirección z' (el punto denota derivada respecto al tiempo). La Fig. 9.27(b) muestra la segunda rotación θ. La velocidad angular debido a la razón de cambio de θ se representa con el vector $\dot{\theta}$ apuntando en la dirección x. También descomponemos el vector $\dot{\psi}$ en componentes en las direcciones y y z. Las componentes de la velocidad angular del sistema xyz respecto al sistema de referencia son

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \dot{\theta},\\ \Omega_y &= \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\theta,\\ \Omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta.\end{aligned} \tag{9.32}$$

En la Fig. 9.27(c), la velocidad angular del cuerpo rígido respecto al sistema xyz se representa con el vector $\dot{\phi}$. Sumando esta velocidad angular a la del sistema xyz, obtenemos las componentes de la velocidad angular del cuerpo rígido respecto al sistema XYZ:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta},\\ \omega_y &= \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\theta,\\ \omega_z &= \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta.\end{aligned} \tag{9.33}$$

Derivando estas ecuaciones respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_x}{dt} &= \ddot{\theta},\\ \frac{d\omega_y}{dt} &= \ddot{\psi}\,\mathrm{sen}\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta,\\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\theta.\end{aligned} \tag{9.34}$$

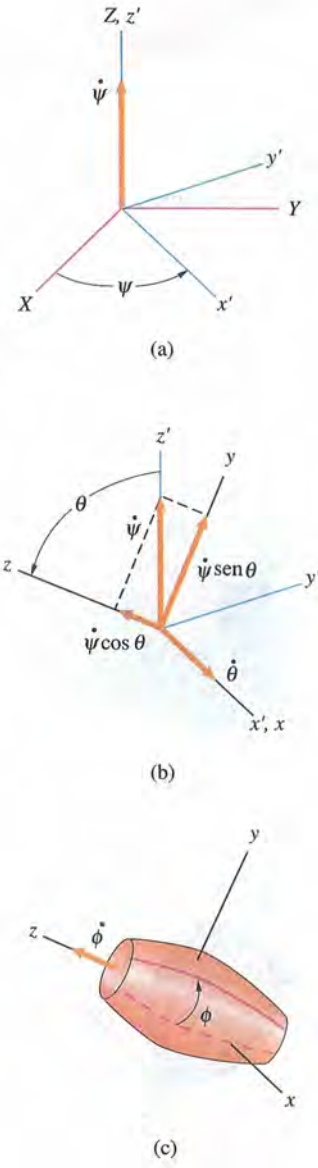


Figura 9.27

(a) Rotación ψ y velocidad angular $\dot{\psi}$.
(b) Rotación θ, velocidad angular $\dot{\theta}$ y componentes de la velocidad angular $\dot{\psi}$.
(c) Rotación ψ y velocidad angular $\dot{\psi}$.

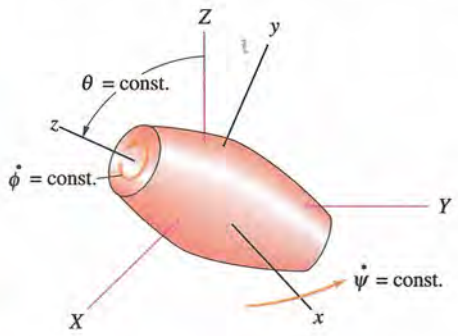


Figura 9.28
Precesión permanente.

A causa de la simetría rotacional del cuerpo, los productos de inercia I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} son cero, e $I_{xx} = I_{yy}$. La matriz de inercia es de la forma

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \tag{9.35}$$

Sustituyendo las Ecs. (9.32) a (9.35) en las Ecs. (9.28), obtenemos las ecuaciones del movimiento angular en función de los ángulos de Euler:

$$\Sigma M_x = I_{xx}\ddot{\theta} + (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta, \tag{9.36}$$

$$\Sigma M_y = I_{xx}(\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) - I_{zz}(\dot{\phi}\dot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta), \tag{9.37}$$

$$\Sigma M_z = I_{zz}(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta). \tag{9.38}$$

Para determinar los ángulos de Euler en función del tiempo cuando se conoce el momento total, esas ecuaciones suelen resolverse por integración numérica. Sin embargo, podemos obtener una clase importante de soluciones cerradas suponiendo un tipo específico de movimiento.

Precesión permanente El movimiento llamado **precesión permanente** se observa comúnmente en trompos y giróscopos. La razón de giro $\dot{\phi}$ del cuerpo respecto al sistema coordenado xyz se supone constante (Fig. 9.28). El ángulo de nutación θ, es decir, la inclinación del **eje de giro** z respecto al eje Z, se supone constante; y la **razón de precesión** $\dot{\psi}$, que es la razón a la que el sistema xyz gira respecto al eje Z, también se supone constante. La última hipótesis explica el nombre dado a este movimiento.

Con estas hipótesis, las Ecs. (9.36) a (9.38) se reducen a

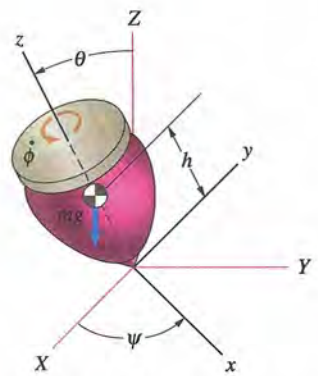
$$\Sigma M_x = (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta, \tag{9.39}$$

$$\Sigma M_y = 0, \tag{9.40}$$

$$\Sigma M_z = 0. \tag{9.41}$$

Analizaremos dos ejemplos: la precesión permanente de un trompo que gira y la precesión permanente de un cuerpo axialmente simétrico libre de momentos externos.

(a)



(b)

Figura 9.29
(a) Un trompo girando parece que desafía la gravedad.
(b) El ángulo de precesión ψ y el ángulo de nutación θ especifican la orientación del eje de giro.

Precesión de un trompo. El peculiar comportamiento de un trompo (Fig. 9.29a) motivó algunos de los primeros análisis de los movimientos tridimensionales de cuerpos rígidos. Cuando el trompo se pone en movimiento, su eje de giro es inicialmente vertical, y se dice que el trompo está **dormido**. Conforme la fricción reduce la razón de giro, el eje de giro se inclina girando alrededor del eje vertical. Esta fase del movimiento se aproxima a la precesión permanente (la razón de giro disminuye debido a la fricción, pero en la precesión permanente suponemos que es constante).

Para analizar el movimiento, colocamos el sistema de referencia XYZ con su origen en la punta del trompo y el eje Z hacia arriba. Luego alineamos el eje z del sistema xyz con el eje de giro (Fig. 9.29b). Suponemos que

la punta del trompo descansa en una pequeña depresión, de modo que permanece en un punto fijo. El ángulo de precesión ψ y el de nutación θ especifican el eje de giro, y la razón de giro respecto al sistema xyz es $\dot{\phi}$.

El peso del trompo ejerce un momento $M_x = mgh \operatorname{sen}\theta$ respecto al origen, y los momentos $M_y = 0$ y $M_z = 0$. Sustituyendo $M_x = mgh \operatorname{sen}\theta$ en la Ec. (9.39), obtenemos

$$mgh = (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}^2 \cos\theta + I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi}, \tag{9.42}$$

y las Ecs. (9.40) y (9.41) se satisfacen idénticamente. La Ec. (9.42) relaciona la razón de giro, el ángulo de nutación y la razón de precesión. Por ejemplo, si conocemos la razón de giro $\dot{\phi}$ y el ángulo de nutación θ, podemos hallar la razón de precesión $\dot{\psi}$ del trompo.

Precesión permanente libre de momento. Un cuerpo axisimétrico en rotación, sin momentos externos, como un satélite axisimétrico en órbita, puede exhibir un movimiento similar al de precesión permanente de un trompo. Observamos esto cuando se lanza un balón de fútbol americano en espiral "oscilante". Para analizarlo, colocamos el origen del sistema xyz en el centro de masa del cuerpo (Fig. 9.30a). La Ec. (9.39) se vuelve

$$(I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi} \cos\theta + I_{zz}\dot{\phi} = 0, \tag{9.43}$$

y las Ecs. (9.40) y (9.41) se satisfacen idénticamente. Para un valor dado de θ, la Ec. (9.43) relaciona las razones de precesión y giro del cuerpo.

Podemos interpretar la Ec. (9.43) de manera que nos permita visualizar el movimiento. Busquemos un punto en el plano y-z (que no sea el centro de masa) para el cual la velocidad del cuerpo respecto al sistema XYZ sea cero en el instante considerado. Deseamos un punto $(0, y, z)$ tal que

$$\omega \times (y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) = [(\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j} + (\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\mathbf{k}] \times [y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}]$$

$$= [z\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta - y(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)]\,\mathbf{i} = \mathbf{0}.$$

Esta ecuación se satisface en puntos del plano y-z tales que

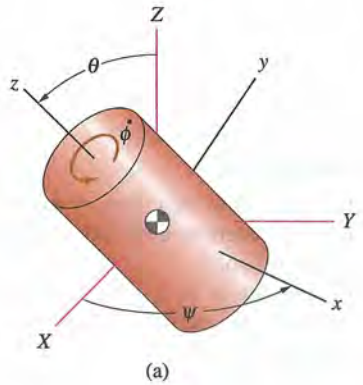
$$\frac{y}{z} = \frac{\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta}{\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta}.$$

Esta relación se satisface con los puntos sobre la recta a un ángulo β respecto al eje z de la Fig. 9.30(b), donde

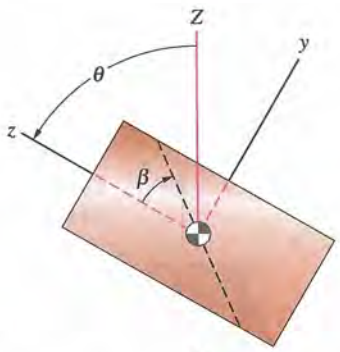
$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta}{\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta}.$$

Despejando $\dot{\phi}$ en la Ec. (9.43) y sustituyendo el resultado en esta ecuación, obtenemos

$$\tan\beta = \left(\frac{I_{zz}}{I_{xx}}\right)\tan\theta.$$



(a)



(b)

Figura 9.30
(a) Cuerpo axisimétrico.
(b) Los puntos sobre la línea recta inclinada respecto al eje z están fijos respecto al sistema coordenado XYZ.

Si $I_{xx} > I_{zz}$, $\beta < \theta$. En la Fig. 9.30(c) se ve un cono imaginario de medio ángulo β, llamado **cono de cuerpo**, cuyo eje coincide con el eje z. Este cono está en contacto con uno fijo llamado **cono espacial**, cuyo eje coincide con el eje Z. Si el cono de cuerpo rueda sobre la superficie curva del cono espacial conforme el eje z precesa respecto al eje Z (Fig. 9.30d), los puntos del cono de cuerpo sobre la recta de la Fig. 9.30(b) tienen velocidad nula respecto al sistema XYZ. Esto significa que *el movimiento del cono de cuerpo es idéntico al del cuerpo*. Se puede visualizar el movimiento del cuerpo visualizando el cono de cuerpo a medida que rueda alrededor de la superficie del cono espacial. Esto se llama **precesión directa.**

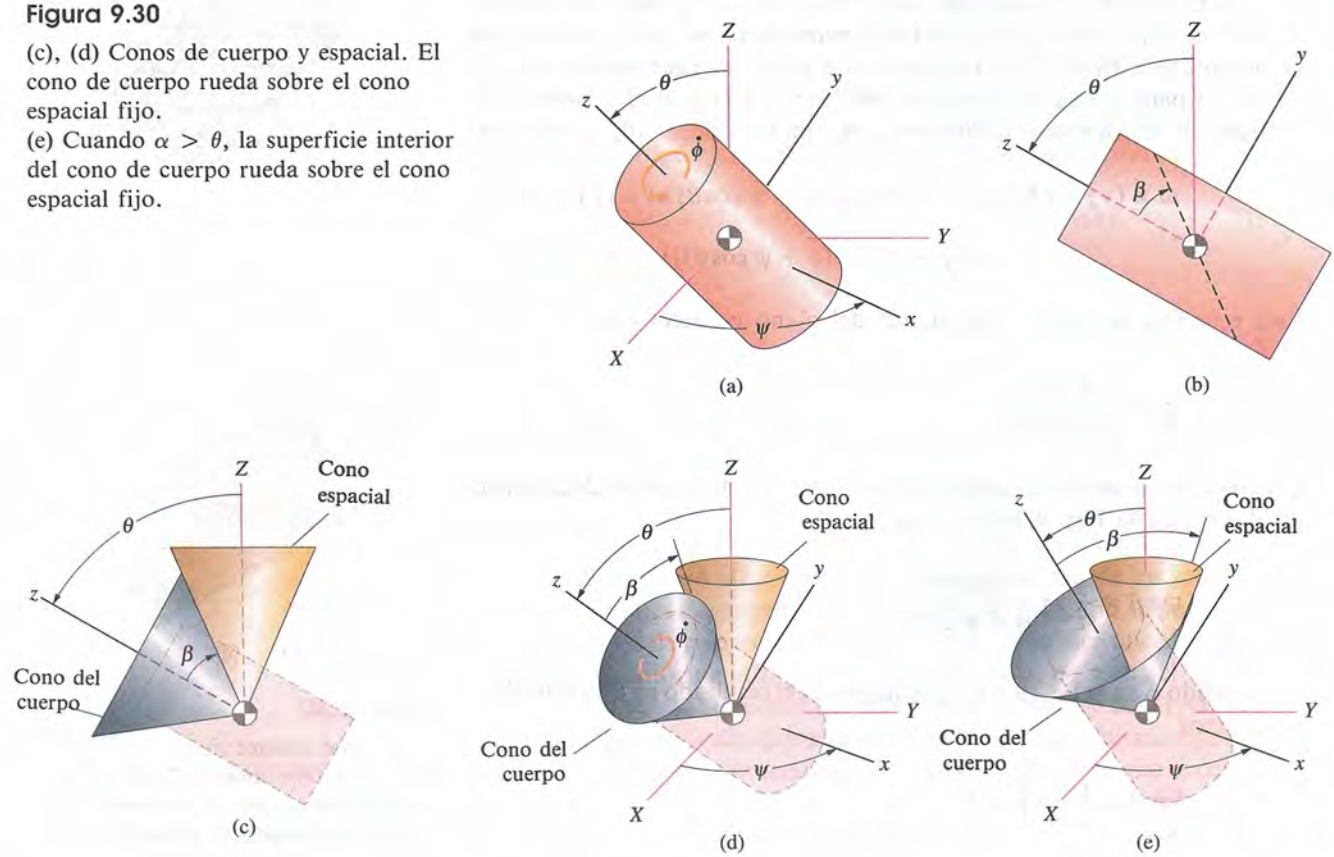
Si $I_{xx} < I_{zz}$, el ángulo $\beta > \theta$. En este caso se debe visualizar la superficie *interior* del cono de cuerpo rodando sobre el cono espacial fijo (Fig. 9.30e). Este movimiento se llama **precesión retrógrada.**

Cuerpos arbitrarios

Ahora mostramos cómo las ecuaciones del movimiento angular se pueden expresar en función de los ángulos de Euler para un cuerpo arbitrario. Los pasos iniciales son similares a los de nuestro tratamiento del cuerpo axisimétrico, pero aquí suponemos que el sistema xyz está fijo al cuerpo.

Figura 9.30

(c), (d) Conos de cuerpo y espacial. El cono de cuerpo rueda sobre el cono espacial fijo.
(e) Cuando $\alpha > \theta$, la superficie interior del cono de cuerpo rueda sobre el cono espacial fijo.



Definiciones Empezamos con una posición de referencia en la que los sistemas xyz y XYZ están sobrepuestos (Fig. 9.31a). Primero giramos el sistema xyz a través del ángulo de precesión ψ respecto al eje Z (Fig. 9.31b) y lo denotamos con $x'y'z'$ en esta orientación intermedia. Luego giramos el sistema xyz a través del ángulo de nutación θ respecto al eje x' (Fig. 9.31c), y lo denotamos con $x''y''z''$. Obtenemos la orientación final del sistema xyz girándolo a través del ángulo ϕ respecto al eje z'' (Fig. 9.31d). Observe que hemos usado una rotación más del sistema xyz que en el caso de un cuerpo axisimétrico.

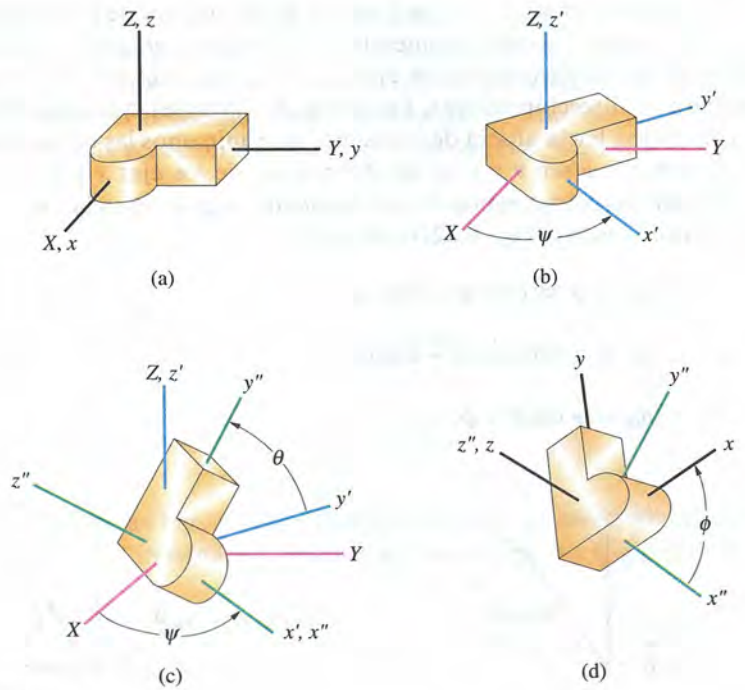


Figura 9.31

(a) Posición de referencia.
(b) Rotación ψ respecto al eje Z.
(c) Rotación θ respecto al eje x'.
(d) Rotación ϕ respecto al eje z''.

Por medio de estas tres rotaciones podemos obtener cualquier orientación del sistema coordenado fijo al cuerpo respecto al sistema coordenado de referencia. Escogemos ψ y θ para obtener la dirección deseada del eje z y luego elegimos ϕ para obtener la orientación deseada de los ejes x y y.

Como en el caso de un cuerpo con simetría rotacional, debemos expresar las componentes de la velocidad angular del cuerpo rígido en función

de los ángulos de Euler para obtener las ecuaciones del movimiento angular. La Fig. 9.32(a) muestra la rotación ψ desde la orientación de referencia del sistema xyz hasta la orientación intermedia $x'y'z'$. La velocidad angular del sistema coordenado fijo al cuerpo debido a la razón de cambio de ψ se representa con el vector $\dot{\psi}$ apuntando en la dirección z'. La Fig. 9.32(b) muestra la siguiente rotación θ que lleva al sistema fijo al cuerpo a la orientación intermedia $x''y''z''$. La velocidad angular debida a la razón de cambio de θ se representa con el vector $\dot{\theta}$ apuntando en la dirección x''. Aquí también mostramos las componentes del vector de velocidad angular $\dot{\psi}$ en las direcciones y'' y z''. La Fig. 9.32(c) muestra la tercera rotación ϕ que lleva al sistema fijo al cuerpo a su orientación final definida por los tres ángulos de Euler. La velocidad angular debido a la razón de cambio de ϕ se representa con el vector $\dot{\phi}$ apuntando en la dirección z.

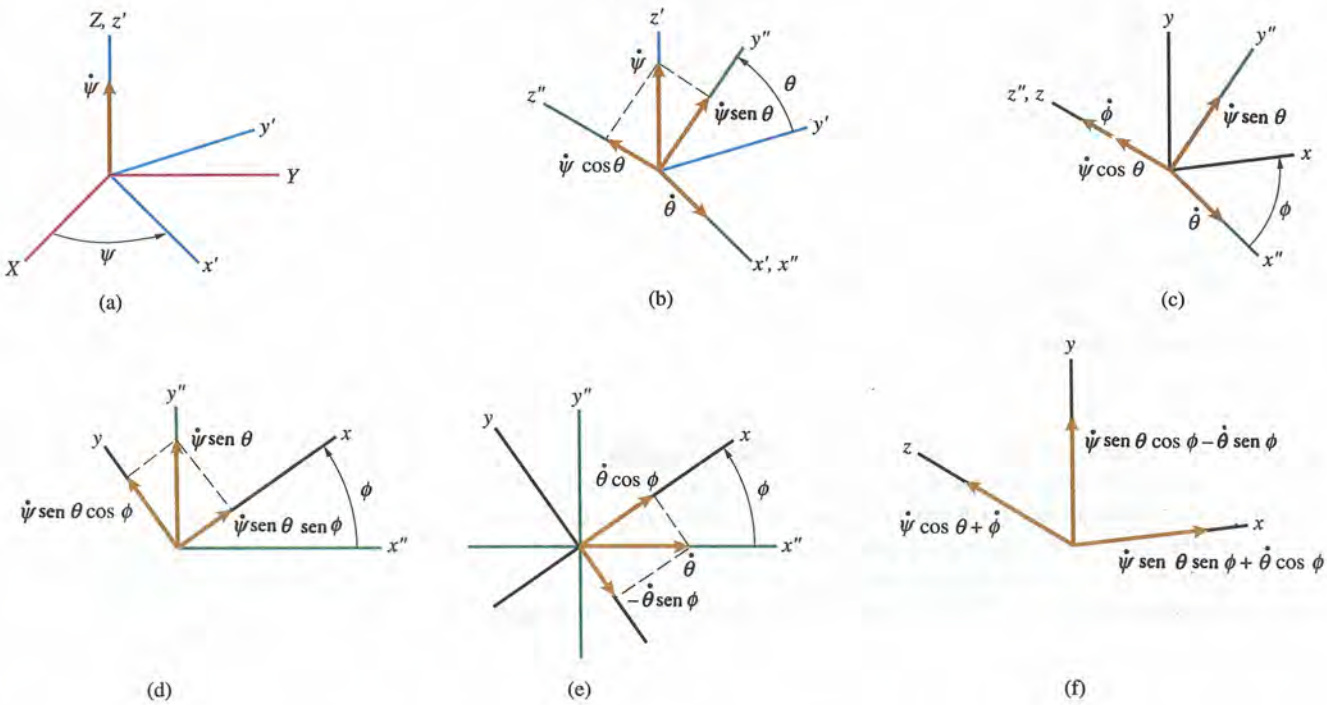
Para determinar ω_x, ω_y y ω_z en función de los ángulos de Euler, necesitamos determinar las componentes de las velocidades angulares de la Fig. 9.32(c) en las direcciones de los ejes x, y y z. Los vectores $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}\cos\theta$ apuntan en la dirección del eje z. En las Figs. 9.32(d) y (e), que están dibujadas con el eje z hacia afuera de la página, determinamos las componentes de los vectores $\dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta$ y $\dot{\theta}$ en las direcciones de los ejes x y y.

Sumando las componentes de las velocidades angulares en las tres direcciones coordenadas (Fig. 9.32f), obtenemos

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi + \dot{\theta}\cos\phi,\\ \omega_y &= \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi,\\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}.\end{aligned} \tag{9.44}$$

Figura 9.32

(a) Rotación ψ y velocidad angular $\dot{\psi}$. (b) Rotación θ, velocidad angular $\dot{\theta}$ y componentes de $\dot{\psi}$ en el sistema $x''y''z''$. (c) Rotación ϕ y velocidad angular $\dot{\phi}$. (d), (e) Componentes de las velocidades angulares $\dot{\psi}$ sen θ y $\dot{\theta}$ en el sistema xyz. (f) Velocidades angulares ω_x, ω_y y ω_z.



Las derivadas respecto al tiempo de esas ecuaciones son

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_x}{dt} &= \ddot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\,\text{sen}\,\phi + \dot{\psi}\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi \\
&\quad + \ddot{\theta}\cos\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}\,\text{sen}\,\phi, \\
\frac{d\omega_y}{dt} &= \ddot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\psi}\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \\
&\quad - \ddot{\theta}\,\text{sen}\,\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi, \\
\frac{d\omega_z}{dt} &= \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta + \ddot{\phi}.
\end{aligned} \tag{9.45}$$

Ecuaciones del movimiento angular Con las Ecs. (9.44) y (9.45) podemos expresar las ecuaciones del movimiento angular en función de los tres ángulos de Euler. Para simplificar las ecuaciones, suponemos que el sistema *xyz* coordenado fijo al cuerpo es un conjunto de ejes principales. Entonces, las ecuaciones del movimiento angular, Ecs. (9.28), son

$$\Sigma M_x = I_{xx}\frac{d\omega_x}{dt} - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z,$$

$$\Sigma M_y = I_{yy}\frac{d\omega_y}{dt} - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x,$$

$$\Sigma M_z = I_{zz}\frac{d\omega_z}{dt} - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y.$$

Sustituyendo las Ecs. (9.44) y (9.45) en estas ecuaciones, obtenemos las ecuaciones del movimiento angular en función de los ángulos de Euler:

$$\begin{aligned}
M_x &= I_{xx}\ddot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi + I_{xx}\ddot{\theta}\cos\phi \\
&\quad + I_{xx}(\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\,\text{sen}\,\phi + \dot{\psi}\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}\,\text{sen}\,\phi) \\
&\quad - (I_{yy} - I_{zz})(\dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}), \\
M_y &= I_{yy}\ddot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi - I_{yy}\ddot{\theta}\,\text{sen}\,\phi \\
&\quad + I_{yy}(\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\psi}\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi) \\
&\quad - (I_{zz} - I_{xx})(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})(\dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi + \dot{\theta}\cos\phi), \\
M_z &= I_{zz}\ddot{\psi}\cos\theta + I_{zz}\ddot{\phi} - I_{zz}\dot{\psi}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta \\
&\quad - (I_{xx} - I_{yy})(\dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi + \dot{\theta}\cos\phi)(\dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi).
\end{aligned} \tag{9.46}$$

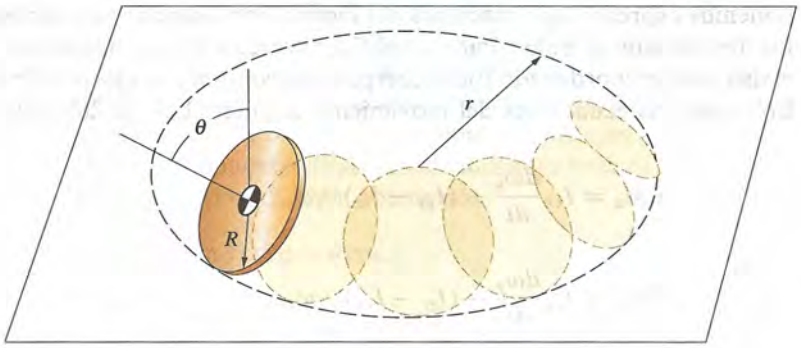
Si se conocen los ángulos de Euler junto con sus primeras y segundas derivadas respecto al tiempo, se pueden resolver esas ecuaciones para obtener las componentes del momento total. Si se conoce éste, los ángulos de Euler y sus primeras derivadas respecto al tiempo, se pueden determinar las segundas derivadas de los ángulos. Con esas ecuaciones se puede determinar los ángulos de Euler en función del tiempo cuando se conoce el momento total, pero usualmente se requiere una integración numérica.

En el siguiente ejemplo analizamos el movimiento de un cuerpo con precesión permanente. Alineando el sistema coordenado como en la Fig. 9.28, la Ec. (9.39) relaciona el momento total respecto al eje x con el ángulo de nutación θ, la razón de precesión $\dot{\psi}$, y la razón de giro $\dot{\phi}$.

Ejemplo 9.9

El disco circular delgado de radio R y masa m de la Fig. 9.33 rueda a lo largo de una trayectoria circular horizontal de radio r. El ángulo θ entre el eje del disco y la vertical permanece constante. Determine la magnitud v de la velocidad del centro del disco en función del ángulo θ.

Figura 9.33



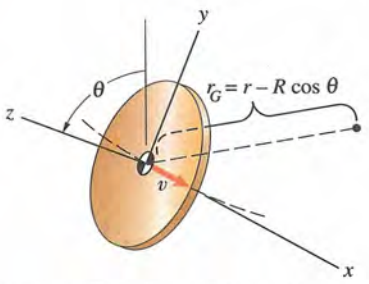
ESTRATEGIA

Podemos obtener la velocidad del centro del disco suponiendo que éste se halla en precesión permanente y determinando las condiciones necesarias para que las ecuaciones del movimiento se satisfagan.

SOLUCIÓN

En la Fig. (a) alineamos el eje z con el eje de rotación del disco y suponemos que el eje x permanece paralelo a la superficie sobre la que rueda el disco. El ángulo θ es el ángulo de nutación. El centro de masa se mueve en una trayectoria circular de radio $r_G = r - R\cos\theta$. Por tanto, la razón de precesión, o sea la razón a la que el eje x gira en el plano horizontal, es

$$\dot{\psi} = \frac{v}{r_G}.$$



(a) Eje z alineado con el eje de giro. El eje x es horizontal.

De las Ecs. (9.33), las componentes de la velocidad angular del disco son

$$\omega_x = \dot{\theta} = 0,$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta = \frac{v}{r_G}\,\text{sen}\,\theta,$$

$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta = \dot{\phi} + \frac{v}{r_G}\cos\theta,$$

donde $\dot{\phi}$ es la razón de giro. Para determinar $\dot{\phi}$ usamos la condición de que la velocidad del punto del disco en contacto con la superficie es cero. En función de la velocidad del centro, la velocidad del punto de contacto es

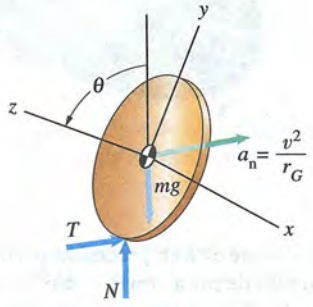
$$\mathbf{0} = v\mathbf{i} + \omega \times (-R\,\mathbf{j}) = v\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{v}{r_G}\operatorname{sen}\theta & \dot{\phi} + \frac{v}{r_G}\cos\theta \\ 0 & -R & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el determinante y despejando $\dot{\phi}$ obtenemos

$$\dot{\phi} = -\frac{v}{R} - \frac{v}{r_G}\cos\theta.$$

En la Fig. (b) dibujamos el diagrama de cuerpo libre del disco. Como el centro de masa se mueve en el plano horizontal, su aceleración en la dirección vertical es cero. Por tanto, la fuerza normal $N = mg$. La aceleración del centro de masa en la dirección perpendicular a su trayectoria circular es $a_n = v^2/r_G$. La segunda ley de Newton en la dirección perpendicular a la trayectoria circular es

$$T = m\frac{v^2}{r_G}.$$



(b) Diagrama de cuerpo libre del disco, que muestra la aceleración normal del centro de masa.

Por tanto, las componentes del momento total respecto al centro de masa son

$$\Sigma M_x = TR\operatorname{sen}\theta - NR\cos\theta = m\frac{v^2}{r_G}R\operatorname{sen}\theta - mgR\cos\theta,$$

$$\Sigma M_y = 0,$$

$$\Sigma M_z = 0.$$

Sustituyendo las expresiones para $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$ y ΣM_x en la ecuación del movimiento angular para la precesión permanente, Ec. (9.39), y despejando v, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}g\cot\theta(r - R\cos\theta)^2}{r - \frac{5}{6}R\cos\theta}}.$$

Problemas

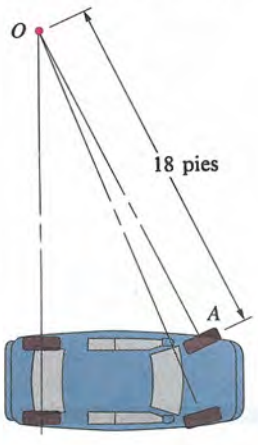
9.75 El eje de giro de la turbina axisimétrica mostrada es horizontal y está alineada con el eje longitudinal del barco. La turbina gira a 10 000 rpm. Su momento de inercia respecto a su eje de giro es de 1000 kg-m^2. Si el barco vira a una razón constante de 20 grados por minuto, ¿cuál es la magnitud del momento que ejerce la turbina sobre el barco?

Estrategia: Trate el movimiento de la turbina como una precesión permanente con ángulo de nutación $\theta = 90°$.

P9.75

9.76 El centro de la rueda A del auto mostrado viaja en una trayectoria circular alrededor de O a 15 mi/h. El radio de la rueda es de 1 pie, y su momento de inercia respecto a su eje de rotación es de 0.8 slug-pie^2. ¿Cuál es la magnitud del momento externo total respecto al centro de masa de la rueda?

Estrategia: Trate el movimiento de la rueda como una precesión permanente con ángulo de nutación $\theta = 90°$.

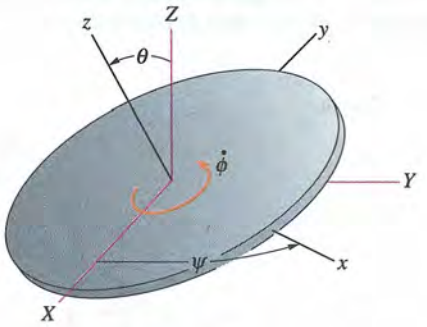


P9.76

9.77 Resuelva el Prob. 9.64 tratando el movimiento como una precesión permanente.

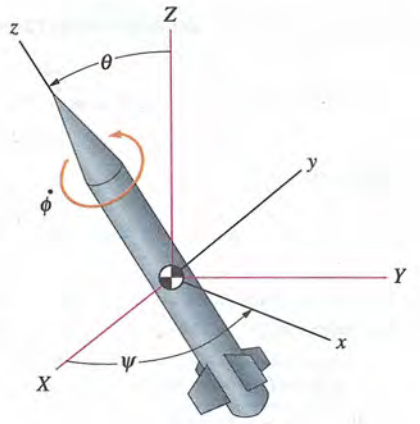
9.78 Resuelva el Prob. 9.69 tratando el movimiento como una precesión permanente.

9.79 Un disco circular delgado tiene precesión permanente libre de momento. El eje z es perpendicular al disco. Demuestre que la razón de precesión del disco es $\dot{\psi} = -2\dot{\phi}/\cos\theta$ (observe que cuando el ángulo de nutación es pequeño, la razón de precesión es aproximadamente igual a dos veces la razón de giro).



P9.79

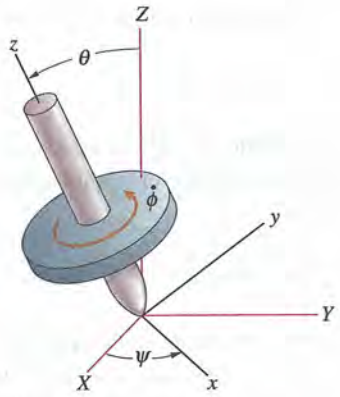
9.80 El cohete está en precesión permanente libre de momento con ángulo de nutación $\theta = 40°$ y velocidad angular de giro $\dot{\phi} = 4$ rev/s. Sus momentos de inercia son $I_{xx} = 10\,000$ kg-m^2 e $I_{zz} = 2000$ kg-m^2. ¿Cuál es la razón de precesión $\dot{\psi}$ del cohete en rev/s?



P9.80

9.81 Esboce los conos de cuerpo y espacial para el movimiento del cohete del Prob. 9.80.

9.82 El trompo de la figura está en precesión permanente con ángulo de nutación $\theta = 15°$ y razón de precesión $\dot{\psi} = 1$ rev/s. La masa del trompo es de 8×10^{-4} slugs, su centro de masa está a 1 pulg de la punta y sus momentos de inercia son $I_{xx} = 6 \times 10^{-6}$ slug-pie^2 e $I_{zz} = 2 \times 10^{-6}$ slug-pie^2. ¿Cuál es la razón de giro $\dot{\phi}$ del trompo en rev/s?

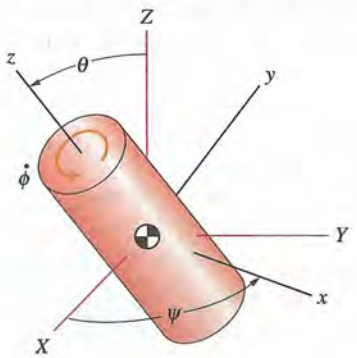


P9.82

9.83 El trompo descrito del Prob. 9.82 tiene una razón de giro $\dot{\phi} = 15$ rev/s. Dibuje una gráfica de la razón de precesión (en rev/s) en función del ángulo de nutación θ para valores de θ entre 0 y 45°.

9.84 El rotor de un giróscopo bamboleante se puede modelar en precesión permanente sin momento. Sus momentos de inercia son $I_{xx} = I_{yy} = 0.04$ kg-m^2, $I_{zz} = 0.18$ kg-m^2. Su razón de giro es $\phi = 1500$ rpm y su ángulo de nutación es $\theta = 20°$.
(a) ¿Cuál es su razón de precesión en rpm?
(b) Dibuje los conos de cuerpo y espacial.

9.85 Un satélite se puede modelar como un cilindro de 800 kg de 4 m de longitud y 2 m de diámetro. Si el ángulo de nutación es $\theta = 20°$ y su razón de giro $\dot{\phi}$ es 1 rev/s, ¿cuál es su razón de precesión $\dot{\psi}$ en rev/s?



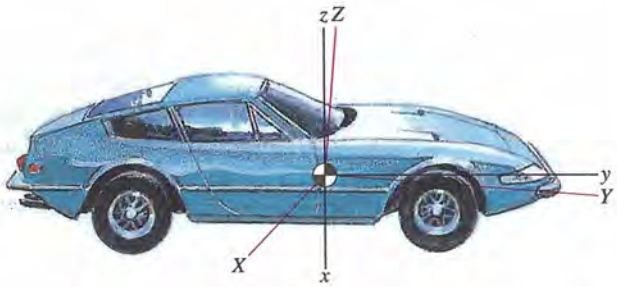
P9.85

9.86 Resuelva el Prob. 9.71 tratando el movimiento como una precesión permanente.

9.87 Resuelva el Prob. 9.72 tratando el movimiento como una precesión permanente.

9.88 Resuelva el Prob. 9.73 tratando el movimiento como una precesión permanente.

9.89 Se está probando un auto y se usan acelerómetros y giróscopos para medir sus ángulos de Euler y sus derivadas respecto a un sistema coordenado de referencia. En cierto momento, $\psi = 15°$, $\theta = 4°$, $\phi = 15°$, las razones de cambio de los ángulos de Euler son cero y sus segundas derivadas respecto al tiempo son $\ddot{\psi} = 0$, $\ddot{\theta} = 1$ rad/s^2 y $\ddot{\phi} = -0.5$ rad/s^2. Los momentos de inercia principales del auto en kg-m^2 son $I_{xx} = 2200$, $I_{yy} = 480$ e $I_{zz} = 2600$. ¿Cuáles son las componentes del momento total respecto al centro de masa del auto?



P9.89

9.90 Si los ángulos de Euler y sus segundas derivadas para el automóvil descrito en el Prob. 9.89 tienen los valores dados pero sus razones de cambio son $\dot{\psi} = 0.2$ rad/s, $\dot{\theta} = -2$ rad/s, y $\dot{\phi} = 0$, ¿cuáles son las componentes del momento total respecto al centro de masa del automóvil?

9.91 Suponga que los ángulos de Euler del auto descrito en el Prob. 9.89 son $\psi = 40°$, $\theta = 20°$ y $\phi = 5°$, sus razones de cambio son cero y las componentes del momento total respecto al centro de masa del auto son $\Sigma M_x = -400$ N-m, $\Sigma M_y = 200$ N-m y $\Sigma M_z = 0$. ¿Cuáles son las componentes x, y y z de la aceleración angular del auto?

Resumen del capítulo

Cinemática

Un cuerpo rígido sometido a cualquier movimiento que no sea traslación tiene un eje instantáneo de rotación. La dirección de ese eje en un momento dado y la razón a la que gira el cuerpo rígido respecto al eje están especificadas por su vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

La velocidad de un punto A de un cuerpo rígido está dada en función del vector de velocidad angular y la velocidad de un punto B por

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}. \qquad \text{Ec. (9.1)}$$

La aceleración de un punto A de un cuerpo rígido está dada en función del vector de velocidad angular, el vector de aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ y la aceleración de un punto B por

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}). \qquad \text{Ec. (9.2)}$$

Sea $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular de un sistema coordenado xyz en rotación respecto a un marco de referencia fijo, y sea $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}$ la velocidad angular de un cuerpo rígido *respecto al* sistema xyz. La velocidad angular del cuerpo rígido y su aceleración angular respecto al marco de referencia fijo son

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}},$$

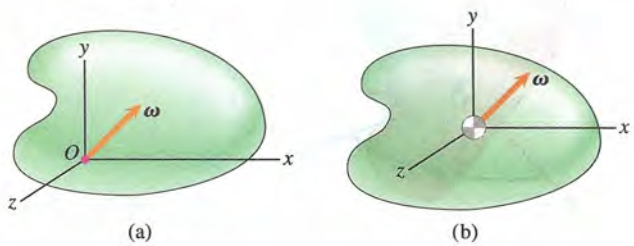
$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}\,x}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}\,y}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}\,z}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}. \qquad \text{Ec. (9.3)}$$

Momento angular

Si un cuerpo gira respecto a un punto fijo O con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (Fig. a), las componentes de su momento angular respecto a O están dadas por

$$\begin{bmatrix} H_{Ox} \\ H_{Oy} \\ H_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \qquad \text{Ec. (9.8)}$$

Esta ecuación también da las componentes del momento angular del cuerpo rígido respecto al centro de masa en el movimiento tridimensional general (Fig. b). En ese caso los momentos de inercia se evalúan respecto a un sistema coordenado con su origen en el centro de masa.



Ecuaciones de Euler

Las ecuaciones que rigen el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido incluyen la segunda ley de Newton y las ecuaciones del movimiento angular. Para un cuerpo rígido que gira alrededor de un punto fijo O (Fig. a), las ecuaciones del movimiento angular se expresan en función de las componentes del momento total respecto a O:

$$\begin{bmatrix} \Sigma M_{Ox} \\ \Sigma M_{Oy} \\ \Sigma M_{Oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega_x/dt \\ d\omega_y/dt \\ d\omega_z/dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \text{Ec. (9.25)}$$

donde Ω es la velocidad angular del sistema coordenado. Si el sistema coordenado está fijo al cuerpo, $\Omega = \omega$. En el caso del movimiento tridimensional general (Fig. b), las ecuaciones del movimiento angular son idénticas excepto que se expresan en función de las componentes del momento total respecto al centro de masa.

La aceleración angular del cuerpo rígido está relacionada con las derivadas de las componentes de ω mediante

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d\omega_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{d\omega_z}{dt}\mathbf{k} + \Omega \times \omega. \quad \text{Ec. (9.24)}$$

Si el sistema coordenado no gira o está fijo al cuerpo, los términos $d\omega_x/dt$, $d\omega_y/dt$ y $d\omega_z/dt$ son las componentes de la aceleración angular.

Momentos y productos de inercia

En un sistema coordenado dado xyz, la **matriz de inercia** de un cuerpo se define con la Ec. (9.11)

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_m (y^2+z^2)\,dm & -\int_m xy\,dm & -\int_m xz\,dm \\ -\int_m yx\,dm & \int_m (x^2+z^2)\,dm & -\int_m yz\,dm \\ -\int_m zx\,dm & -\int_m zy\,dm & \int_m (x^2+y^2)\,dm \end{bmatrix},$$

donde x, y, z son las coordenadas del elemento diferencial de masa dm. Los términos I_{xx}, I_{yy} e I_{zz} son los momentos de inercia respecto a los ejes x, y, z e I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} son los **productos de inercia**.

Si $x'y'z'$ es un sistema coordenado con su origen en el centro de masa de un cuerpo y xyz es un sistema paralelo, los **teoremas de los ejes paralelos** establecen que

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_{x'x'} + (d_y^2 + d_z^2)m, \\ I_{yy} &= I_{y'y'} + (d_x^2 + d_z^2)m, \\ I_{zz} &= I_{z'z'} + (d_x^2 + d_y^2)m, \\ I_{xy} &= I_{x'y'} + d_x d_y m, \\ I_{yz} &= I_{y'z'} + d_y d_z m, \\ I_{zx} &= I_{z'x'} + d_z d_x m, \end{aligned} \qquad \text{Ec. (9.16)}$$

donde (d_x, d_y, d_z) son las coordenadas del centro de masa en el sistema coordenado xyz.

El momento de inercia respecto a un eje que pase por el origen y paralelo a un vector unitario **e** está dado por

$$I_O = I_{xx}e_x^2 + I_{yy}e_y^2 + I_{zz}e_z^2 - 2I_{xy}e_x e_y - 2I_{yz}e_y e_z - 2I_{zx}e_z e_x. \qquad \text{Ec. (9.17)}$$

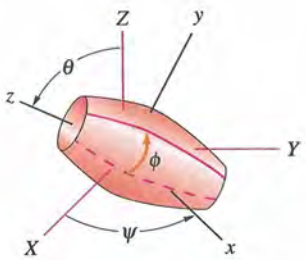
Para cualquier cuerpo y origen O existe por lo menos un sistema coordenado para el cual los productos de inercia son cero. Los ejes coordenados se llaman **ejes principales** y los momentos de inercia, **momentos de inercia principales**. Si se conoce la matriz de inercia en un sistema coordenado $x'y'z'$, los momentos de inercia principales son raíces de la ecuación cúbica

$$\begin{aligned} &I^3 - (I_{x'x'} + I_{y'y'} + I_{z'z'})I^2 \\ &+(I_{x'x'}I_{y'y'} + I_{y'y'}I_{z'z'} + I_{z'z'}I_{x'x'} - I_{x'y'}^2 - I_{y'z'}^2 - I_{z'x'}^2)I \qquad \text{Ec. (9.19)} \\ &-(I_{x'x'}I_{y'y'}I_{z'z'} - I_{x'x'}I_{y'z'}^2 - I_{y'y'}I_{x'z'}^2 - I_{z'z'}I_{x'y'}^2 - 2I_{x'y'}I_{y'z'}I_{z'x'}) = 0. \end{aligned}$$

Para cada momento de inercia principal I, el vector **V** con componentes

$$\begin{aligned} V_{x'} &= (I_{y'y'} - I)(I_{z'z'} - I) - I_{y'z'}^2, \\ V_{y'} &= I_{x'y'}(I_{z'z'} - I) + I_{x'z'}I_{y'z'}, \\ V_{z'} &= I_{x'z'}(I_{y'y'} - I) + I_{x'y'}I_{y'z'} \end{aligned} \qquad \text{Ec. (9.20)}$$

es paralelo al correspondiente eje principal.



(c)

Ángulos de Euler: cuerpos axisimétricos

En el caso de un cuerpo con un eje de simetría rotacional, la orientación del sistema xyz respecto al sistema de referencia XYZ está especificada por el **ángulo de precesión** ψ y el **ángulo de nutación** θ (Fig. c). La rotación del cuerpo respecto al sistema xyz está especificada por el **ángulo de giro** ϕ.

Las componentes de la velocidad angular del cuerpo rígido respecto al sistema XYZ están dadas por

$$\omega_x = \dot{\theta},$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta, \qquad \text{Ec. (9.33)}$$

$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta.$$

Las ecuaciones del movimiento angular expresadas en función de esos **ángulos de Euler** son [Ecs. (9.36) a (9.38)]:

$$\Sigma M_x = I_{xx}\ddot{\theta} + (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}^2\,\text{sen}\theta\cos\theta + I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta,$$

$$\Sigma M_y = I_{xx}(\ddot{\psi}\,\text{sen}\,\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) - I_{zz}(\dot{\phi}\dot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta),$$

$$\Sigma M_z = I_{zz}(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta).$$

En la **precesión permanente** de un cuerpo que gira axisimétricamente, la **razón de giro** $\dot{\phi}$, el **ángulo de nutación** θ y la **razón de precesión** $\dot{\psi}$ se suponen constantes. Con estas hipótesis, las ecuaciones del movimiento angular se reducen a [Ecs. (9.39) a (9.41)].

$$\Sigma M_x = (I_{zz} - I_{xx})\dot{\psi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + I_{zz}\dot{\phi}\dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta,$$

$$\Sigma M_y = 0,$$

$$\Sigma M_z = 0.$$

Ángulos de Euler: cuerpos arbitrarios

En el caso de un cuerpo arbitrario, la orientación del sistema xyz fijo al cuerpo respecto al sistema XYZ de referencia se especifica con el ángulo de precesión ψ, el ángulo de nutación θ y el ángulo de giro ϕ (Fig. d).

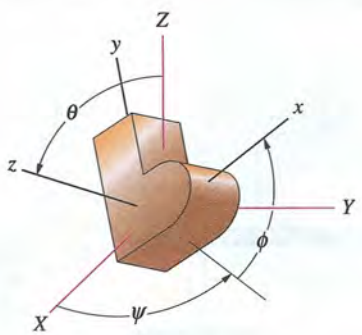
Las componentes de la velocidad angular del cuerpo rígido respecto al sistema XYZ están dadas por

$$\omega_x = \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi + \dot{\theta}\cos\phi,$$

$$\omega_y = \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi, \qquad \text{Ec. (9.44)}$$

$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}.$$

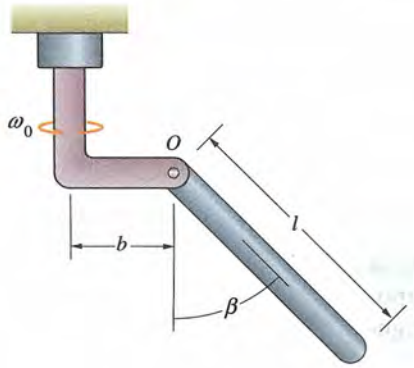
Si xyz es un conjunto de ejes principales, las ecuaciones del movimiento angular en función de los ángulos de Euler están dadas por las Ecs. (9.46).



(d)

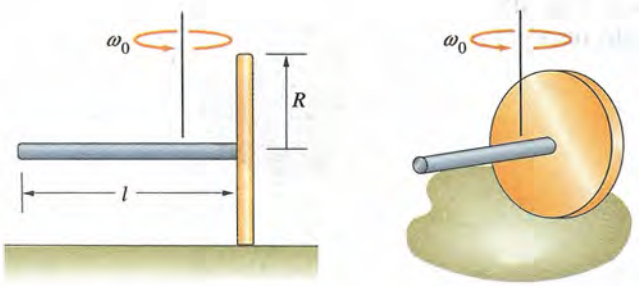
Problemas de repaso

9.92 La barra esbelta de longitud l y masa m de la figura está articulada a la barra en forma de L en O. La barra en L gira respecto al eje vertical con una velocidad angular constante ω_0. Determine el valor de ω_0 necesario para que la barra permanezca con un ángulo constante β respecto a la vertical.



P9.92

9.93 Una barra esbelta de longitud l y masa m está rígidamente unida al centro de un disco circular delgado de radio R y masa m. El cuerpo compuesto está sometido a un movimiento en el que la barra gira en un plano horizontal con velocidad angular constante ω_0 respecto al centro de masa del cuerpo compuesto, y el disco rueda sobre el piso. Demuestre que $\omega_0 = 2\sqrt{g/R}$.

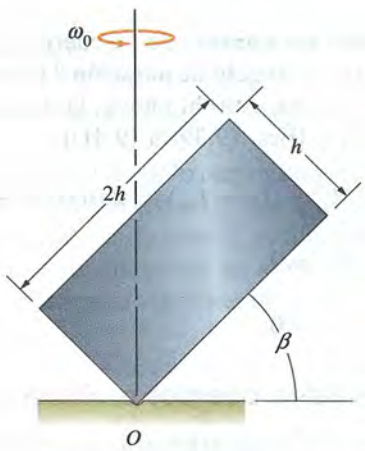


P9.93

9.94 Una placa delgada de masa m gira alrededor de un eje vertical con su plano perpendicular al piso. La esquina en O descansa en una ranura de manera que permanece en el mismo punto. La velocidad angular ω_0 y el ángulo β son constantes. (a) Demuestre que la velocidad angular ω_0 está relacionada con el ángulo β por

$$\frac{h\omega_0^2}{g} = \frac{2\cos\beta - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}^2\beta - 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta - \cos^2\beta}.$$

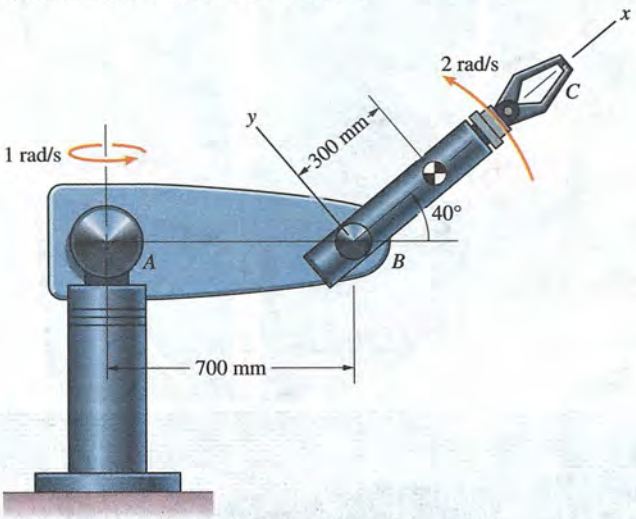
(b) La ecuación obtenida en la parte (a) indica que $\omega_0 = 0$ cuando $2\cos\beta - \operatorname{sen}\beta = 0$. ¿Qué significa este resultado?



P9.94

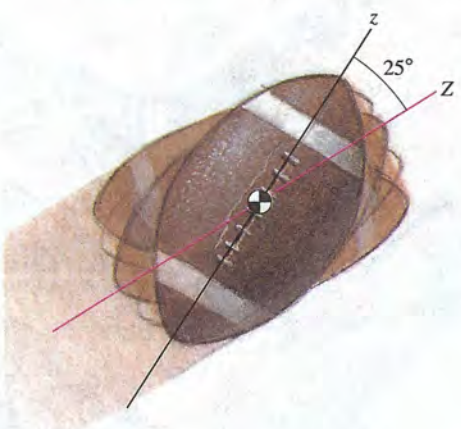
9.95 En el Prob. 9.94, determine el intervalo de valores del ángulo β para los cuales la placa permanecerá en el movimiento permanente descrito.

9.96 El brazo BC tiene una masa de 12 kg y sus momentos y productos de inercia respecto al sistema coordenado de la figura son $I_{xx} = 0.03$ kg-m^2, $I_{yy} = I_{zz} = 4$ kg-m^2, $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$. En el instante mostrado, el brazo AB está girando en un plano horizontal con una velocidad angular constante de 1 rad/s en dirección antihoraria visto desde arriba. Respecto al brazo AB, el brazo BC está girando respecto al eje z con velocidad angular constante de 2 rad/s. Determine la fuerza y el par ejercidos sobre el brazo BC en B.



P9.96

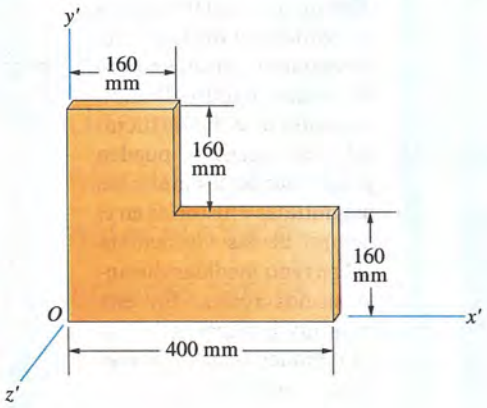
9.97 Un balón de fútbol americano se lanza con un movimiento espiral oscilante y un ángulo de nutación de 25°. Los momentos de inercia del balón son $I_{xx} = I_{yy} = 0.003$ slug-pie^2 e $I_{zz} = 0.001$ slug-pie^2. Si su razón de giro es $\dot{\phi} = 4$ rev/s, ¿cuál es la magnitud de su razón de precesión (la razón a la que oscila)?



P9.97

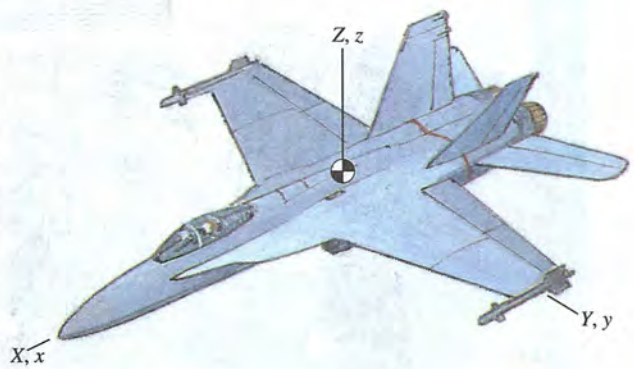
9.98 Dibuje los conos de cuerpo y espacial para el movimiento del balón del Prob. 9.97.

9.99 En la Fig. P9.99 la masa de la placa delgada homogénea es de 1 kg. Para un sistema coordenado con origen en O, determine los momentos de inercia principales y las direcciones de los vectores unitarios paralelos a los correspondientes ejes principales.



P9.99

9.100 Los momentos de inercia principales en slug-pie^2 del avión mostrado son $I_{xx} = 8000$, $I_{yy} = 48\,000$ e $I_{zz} = 50\,000$. (a) El avión parte de la posición de referencia mostrada y maniobra con la orientación $\psi = \theta = \phi = 45°$. Dibuje un esquema que muestre su orientación relativa al sistema XYZ. (b) El avión está con la orientación descrita en la parte (a), las razones de cambio de los ángulos de Euler son $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\theta} = 0.2$ rad/s y $\dot{\phi} = 0.2$ rad/s, y sus segundas derivadas respecto al tiempo son cero, ¿cuáles son las componentes del momento total respecto al centro de masa del avión?

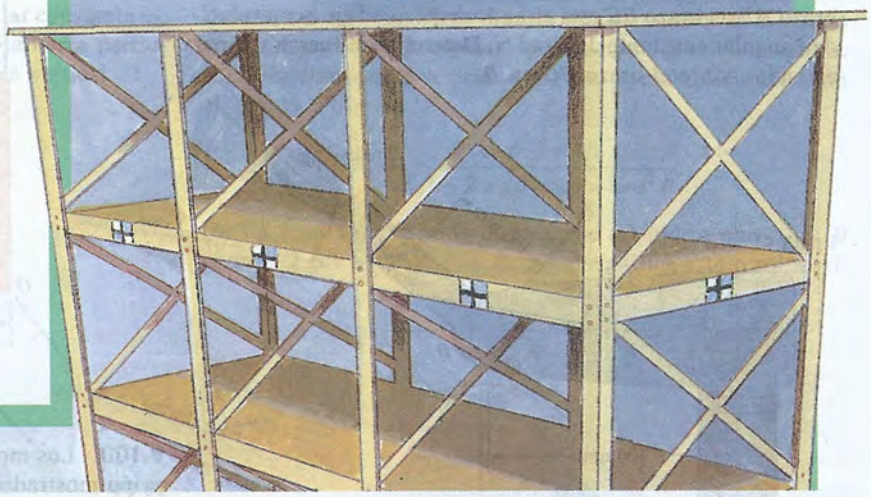


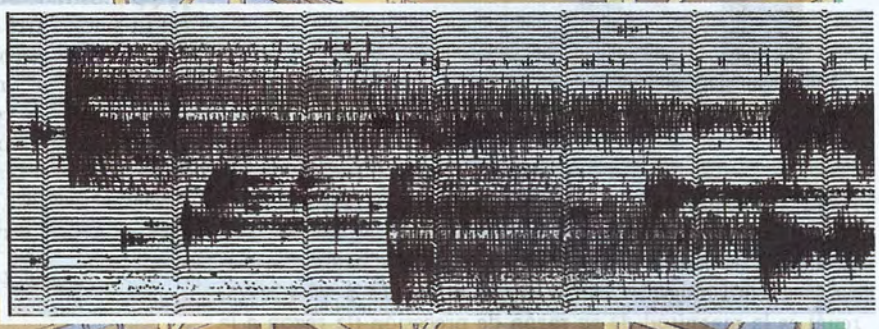
P9.100

9.101 ¿Cuáles son las componentes x, y, z de la aceleración angular del avión descrito en el Prob. 9.100?

9.102 Si la orientación del avión del Prob. 9.100 es $\psi = 45°$, $\theta = 60°$, $\phi = 45°$, las razones de cambio de los ángulos de Euler son $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\theta} = 0.2$ rad/s y $\dot{\phi} = 0.1$ rad/s, y las componentes del momento total respecto al centro de masa son $\Sigma M_x = 400$ pie-lb, $\Sigma M_y = 1200$ pie-lb y $\Sigma M_z = 0$, ¿cuáles son las componentes x, y, z de la aceleración angular del avión?

Los ingenieros usan "mesas vibratorias" para simular las vibraciones de edificios y otras estructuras durante sismos y para investigar métodos de minimización de daño estructural. Las mesas se pueden programar para simular las magnitudes e historias en el tiempo de las vibraciones del terreno medidas durante sismos reales. En este capítulo analizaremos las vibraciones de sistemas mecánicos sencillos.





Capítulo 10

Vibraciones

LAS vibraciones han sido de interés en la ingeniería por lo menos desde el principio de la Revolución Industrial. Los movimientos oscilatorios de los motores rotatorios y alternativos someten a sus partes a grandes cargas que deben considerarse en su diseño. Los operadores y pasajeros de los vehículos movidos por esos motores deben quedar aislados de tales vibraciones. Empezando con el desarrollo de dispositivos electromecánicos capaces de generar y medir vibraciones mecánicas, como altoparlantes y micrófonos, las aplicaciones en ingeniería de las vibraciones han incluido las diversas áreas de la acústica, desde la acústica arquitectónica hasta la detección y análisis de sismos.

En este capítulo consideraremos sistemas vibratorios de un grado de libertad; esto es, la posición o configuración de cada sistema se especifica con una sola variable. Muchos sistemas vibratorios reales tienen un solo grado de libertad o sus movimientos se pueden modelar por medio de un sistema de un grado de libertad en circunstancias particulares. Analizaremos conceptos fundamentales como la amplitud, la frecuencia, el periodo, el amortiguamiento y la resonancia, que también se usan en el análisis de sistemas con múltiples grados de libertad.

10.1 *Sistemas conservativos*

Empezamos presentando diferentes ejemplos de sistemas de un grado de libertad sometidos a fuerzas conservativas, y demostramos que sus movimientos son descritos por la misma ecuación diferencial. Luego examinamos soluciones de esta ecuación y las usamos para describir las vibraciones de sistemas conservativos de un grado de libertad.

Ejemplos

El oscilador resorte-masa (Fig. 10.1a) es el ejemplo más sencillo de un sistema vibratorio de un grado de libertad. Una sola coordenada x que mide el desplazamiento de la masa respecto a un punto de referencia es suficiente para especificar la posición del sistema. Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la masa de la Fig. 10.1(b), ignorando la fricción y suponiendo que el resorte no está estirado cuando $x = 0$. Aplicando la segunda ley de Newton, podemos escribir la ecuación del movimiento horizontal de la masa como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{10.1}$$

También podemos obtener esta ecuación usando un método diferente, que será de mucha utilidad. La única fuerza que efectúa trabajo sobre la masa, es decir, la fuerza ejercida por el resorte, es conservativa, lo que implica que la suma de las energías cinética y potencial es constante:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}.$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo, podemos escribir la ecuación resultante como

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x\right) = 0,$$

que es la misma Ec. (10.1).

Supongamos que la masa está suspendida del resorte, como se muestra en la Fig. 10.1(c), y que está sometida a movimiento vertical. Si el resorte no está estirado en $x = 0$, se puede confirmar fácilmente que la ecuación del movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = g.$$

Si la masa suspendida está en reposo, la magnitud de la fuerza ejercida por el resorte debe ser igual al peso, $kx = mg$, por lo que la posición de equilibrio es $x = mg/k$ (observe que también se puede determinar la posición de equilibrio haciendo igual a cero la aceleración en la ecuación de movimiento). Incluyamos una nueva variable $\bar{x}$ que mida la posición de la

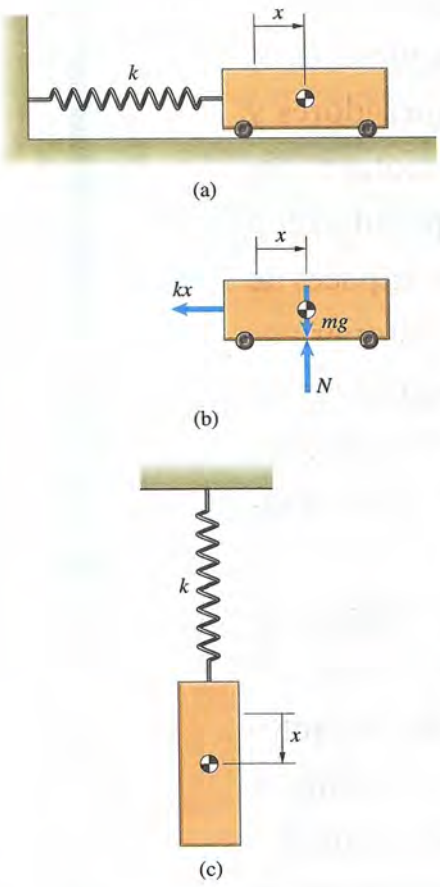


Figura 10.1
(a) El oscilador resorte-masa tiene un grado de libertad.
(b) Diagrama de cuerpo libre de la masa.
(c) Masa suspendida.

masa respecto a su posición de equilibrio: $\tilde{x} = x - mg/k$. Escribiendo la ecuación de movimiento en función de esta variable obtenemos

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \frac{k}{m}\tilde{x} = 0,$$

que es idéntica a la Ec. (10.1). El movimiento vertical de la masa de la Fig. 10.1(c) *respecto a su posición de equilibrio* está descrito por la misma ecuación que describe el movimiento horizontal de la masa de la Fig. 10.1(a) respecto a su posición de equilibrio.

Consideremos un sistema diferente de un grado de libertad. Si desplazamos la barra de la Fig. 10.2(a) lateralmente y la soltamos, oscilará (un cuerpo que oscila desde un punto fijo se llama **péndulo**). Tiene un solo grado de libertad, ya que θ especifica la posición de la barra.

Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la barra (Fig. 10.2b) y escribiendo la ecuación del movimiento angular respecto a A, obtenemos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2l}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{10.2}$$

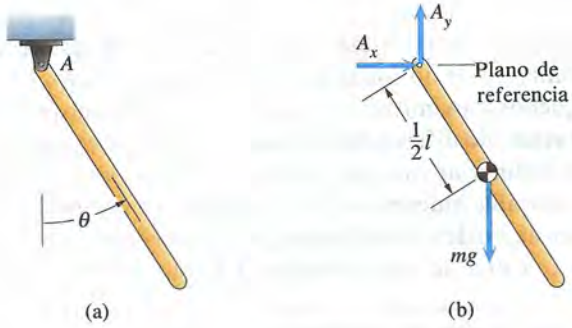


Figura 10.2
(a) Péndulo formado por una barra esbelta.
(b) Diagrama de cuerpo libre de la barra.

También podemos llegar a ecuación usando la conservación de la energía. La energía cinética de la barra es $T = \frac{1}{2}I_A\,(d\theta/dt)^2$. Si colocamos el plano de referencia al nivel del punto A (Fig. 10.2b), la energía potencial asociada con el peso de la barra es $V = -mg\,(\frac{1}{2}l\cos\theta)$, por lo que

$$T + V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}mgl\cos\theta = \text{constante}.$$

Derivando respecto al tiempo y escribiendo el resultado en la forma

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2l}\operatorname{sen}\theta\right) = 0,$$

obtenemos la Ec. (10.2).

La Ec. (10.2) no tiene la misma forma que la Ec. (10.1). Sin embargo, si expresamos sen θ en series de Taylor,

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 + \cdots,$$

y suponemos que θ permanece bastante pequeña para sustituir sen θ por θ, entonces la Ec. (10.2) resulta idéntica en forma a la Ec. (10.1):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2l}\theta = 0. \tag{10.3}$$

Nuestros análisis del oscilador resorte-masa y el péndulo produjeron ecuaciones de movimiento idénticas en forma. Para lograr esto en el primer caso tuvimos que expresar la ecuación del movimiento en función del desplazamiento relativo a la posición de equilibrio. En el caso del péndulo, tuvimos que suponer que las amplitudes eran pequeñas. Sin embargo, con esas restricciones se verá que las ecuaciones obtenidas describen los movimientos de muchos sistemas conservativos de un grado de libertad.

Soluciones

Consideremos la ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,} \tag{10.4}$$

donde ω es una constante. Vimos que con $\omega^2 = k/m$, esta ecuación describe el movimiento de un oscilador resorte-masa, y con $\omega^2 = 3g/2l$ describe los pequeños movimientos de una barra esbelta suspendida. La Ec. (10.4) es una **ecuación diferencial ordinaria**, porque se expresa en términos de derivadas ordinarias (no parciales) de la variable dependiente x con respecto a la variable independiente t. Es **lineal**, ya que no contiene términos no lineales de x o de sus derivadas, y es **homogénea**, pues cada término contiene a x o a una de sus derivadas. La solución general es

$$\boxed{x = A \text{ sen } \omega t + B \cos \omega t,} \tag{10.5}$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

Aunque en problemas prácticos se encontrará que la Ec. (10.5) es la forma más conveniente de la solución de la Ec. (10.4), podemos describir las propiedades de la solución más fácilmente expresándola en la forma alternativa

$$x = E \text{ sen } (\omega t - \phi), \tag{10.6}$$

donde E y ϕ son constantes. Para demostrar que esas dos soluciones son equivalentes, usamos la identidad

$$\begin{aligned} E \text{ sen } (\omega t - \phi) &= E(\text{sen } \omega t \cos \phi - \cos \omega t \text{ sen } \phi) \\ &= (E \cos \phi) \text{ sen } \omega t + (-E \text{ sen } \phi) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Esta expresión es idéntica a la Ec. (10.5) si las constantes A y B se relacionan con E y ϕ por

$$A = E \cos \phi, \qquad B = -E \text{ sen } \phi. \tag{10.7}$$

La Ec. (10.6) muestra claramente la naturaleza oscilatoria de la solución de la Ec. (10.4). Llamada **movimiento armónico simple**, describe una función senoidal de ωt. La constante ϕ determina la posición horizontal de la función senoidal respecto al origen $\omega t = 0$, y se llama **fase**. Definimos ϕ como la distancia a la derecha de $\omega t = 0$ en donde la solución corta por primera vez el eje horizontal con pendiente positiva (Fig. 10.3). La constante positiva E se llama **amplitud** de la vibración. Elevando al cuadrado las Ecs. (10.7) y sumándolas, obtenemos una relación entre la amplitud y las constantes A y B:

$$E = \sqrt{A^2 + B^2}. \tag{10.8}$$

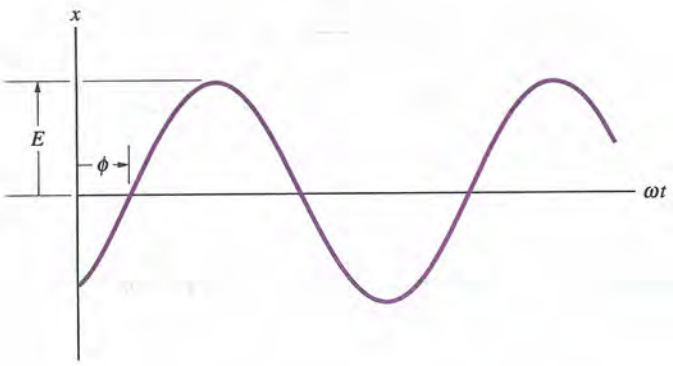


Figura 10.3
Gráfica de x en función de ωt.

Podemos interpretar la Ec. (10.6) como el movimiento uniforme de un punto a lo largo de una trayectoria circular. Dibujamos un círculo cuyo radio es igual a la amplitud (Fig. 10.4) y suponemos que la línea de O a P gira en dirección antihoraria con velocidad angular constante ω. Si escogemos la posición de P en $t = 0$ como se indica, la proyección de la línea OP sobre el eje vertical es $E \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$.

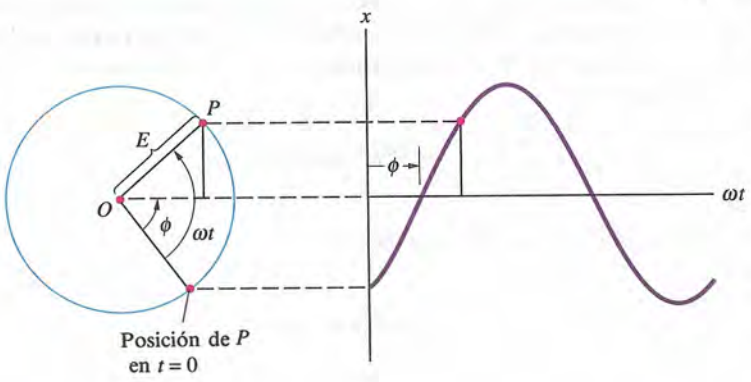


Figura 10.4
Correspondencia del movimiento armónico simple con el movimiento circular de un punto.

Así, se tiene una correspondencia biunívoca entre el movimiento circular de P y la Ec. (10.6). El punto P efectúa una revolución completa, o **ciclo**, durante el tiempo requerido para que el ángulo ωt crezca 2π rad. El tiempo $\tau = 2\pi/\omega$ requerido para un ciclo se llama **periodo** de la vibración. Como τ es el tiempo requerido para un ciclo, su inverso $f = 1/\tau$ es el número de ciclos por unidad de tiempo, o **frecuencia natural** de la vibración. La frecuencia suele expresarse en ciclos por segundo, o Hertz (Hz). En la Fig. 10.5 ilustramos el efecto de cambiar el periodo y la frecuencia.

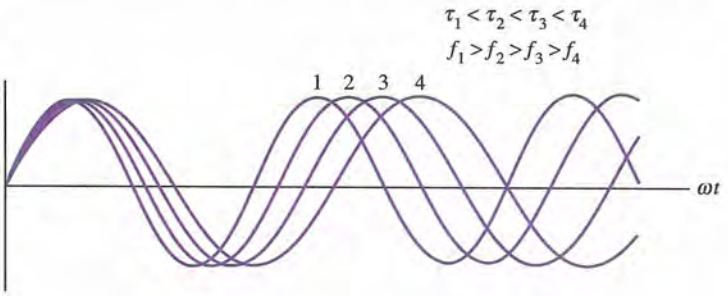


Figura 10.5
Efecto de incrementar el periodo (disminución de la frecuencia) del movimiento armónico simple.

En resumen, el periodo y la frecuencia natural son

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{10.9}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{10.10}$$

El periodo y la frecuencia natural de un sistema se determinan mediante sus propiedades físicas y no dependen de la función con la que se expresa el movimiento.

La frecuencia natural f es el número de revoluciones que el punto P se mueve en la trayectoria circular de la Fig. 10.4 en un tiempo unitario, por lo que $\omega = 2\pi f$ son los radianes por unidad de tiempo. Por tanto, ω también es una medida de la frecuencia y se expresa en rad/s. Para distinguirla de f, ω se llama **frecuencia natural circular.** El término ωt y la variable ϕ que especifica la fase se pueden dar en radianes o en grados.

Supongamos que la Ec. (10.6) describe el desplazamiento del oscilador resorte-masa de la Fig. 10.1(a), de modo que $\omega^2 = k/m$. La energía cinética de la masa es

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mE^2\omega^2\cos^2(\omega t - \phi),$$

y la energía potencial del resorte es

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mE^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t - \phi).$$

La suma de las energías cinética y potencial, $T + V = \frac{1}{2}mE^2\omega^2$, es constante (Fig. 10.6). Al vibrar el sistema su energía total oscila entre energía cinética y energía potencial. Observe que la energía total es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia natural.

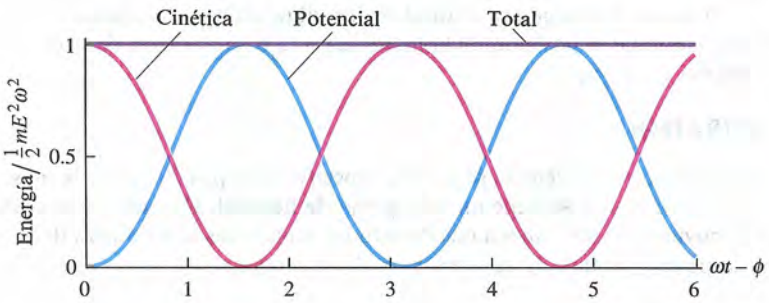


Figura 10.6
Energías cinética, potencial y total de un oscilador resorte-masa.

En los siguientes ejemplos analizamos sistemas vibratorios de un grado de libertad. Nuestro primer objetivo será determinar la ecuación de movimiento del sistema y expresarlo en la forma de la Ec. (10.4):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Para hacerlo así, se debe escribir la ecuación de movimiento en función del desplazamiento del sistema respecto a su posición de equilibrio. También se requiere hacer lineal la ecuación suponiendo que el desplazamiento es pequeño, como lo hicimos para obtener la Ec. (10.3) de la Ec. (10.2). Una vez que se tiene la ecuación de movimiento en esta forma, se conoce el valor de ω para el sistema y se puede usar para hallar el periodo y la frecuencia natural con las Ecs. (10.9) y (10.10). También se puede determinar el movimiento del sistema con las Ecs. (10.5) o (10.6) si se tiene suficiente información para determinar las constantes arbitrarias.

Ejemplo 10.1

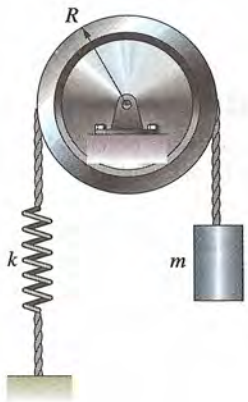


Figura 10.7

La polea de la Fig. 10.7 tiene radio R y momento de inercia I; el cable no resbala respecto a la polea. La masa m se desplaza hacia abajo una distancia h desde su posición de equilibrio y se libera del reposo en $t = 0$.
(a) ¿Cuál es la frecuencia natural de las vibraciones resultantes?
(b) Determine la posición de la masa respecto a su posición de equilibrio en función del tiempo.

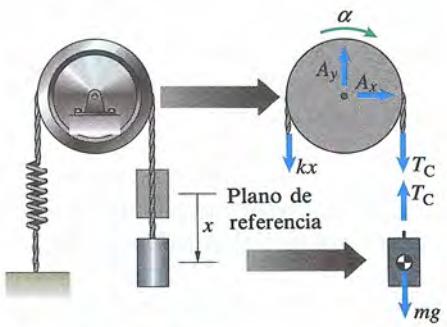
ESTRATEGIA

Con una sola coordenada se pueden especificar las posiciones de la masa y la polea, por lo que se tiene un solo grado de libertad. Obtenemos la ecuación de movimiento del sistema escribiendo las ecuaciones individuales de la masa y la polea y usando la conservación de la energía.

SOLUCIÓN

Sea x el desplazamiento hacia abajo de la masa respecto a su posición cuando el resorte no está estirado. Dibujamos los diagramas de cuerpo libre de la polea y la masa de la Fig. (a), donde T_C es la tensión en el cable y α es la aceleración angular de la polea. Aplicando la segunda ley de Newton a la masa obtenemos

$$mg - T_C = m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{10.11}$$



(a) Diagramas de cuerpo libre de la polea y la masa.

La ecuación del movimiento angular de la polea es

$$T_C R - (kx)R = I\alpha. \tag{10.12}$$

La aceleración angular de la polea y la aceleración de la masa están relacionadas por $\alpha = (d^2x/dt^2)/R$, por lo que podemos escribir la Ec. (10.12) como

$$T_C - kx = (I/R^2)\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Sumando esta ecuación con la Ec. (10.11) obtenemos la ecuación de movimiento

$$(m + I/R^2)\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg. \tag{10.13}$$

Solución alternativa En función de la velocidad de la masa, la velocidad angular de la polea es $(dx/dt)/R$. Por tanto, podemos escribir la energía cinética total de la masa y la polea como

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left[\frac{1}{R}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]^2.$$

Colocando el plano de referencia para la energía potencial asociada con el peso de la masa en $x = 0$, la energía potencial total es

$$V = -mgx + \frac{1}{2}kx^2.$$

La suma de las energías cinética y potencial es constante:

$$T + V = \frac{1}{2}(m + I/R^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}.$$

Derivando respecto al tiempo esta ecuación, obtenemos de nuevo la Ec. (10.13).

Haciendo $d^2x/dt^2 = 0$ en la Ec. (10.13), vemos que la posición de equilibrio es $x = mg/k$. Expresando la Ec. (10.13) en función de una nueva variable $\tilde{x} = x - mg/k$ que mide la posición de la masa respecto a su posición de equilibrio, obtenemos la ecuación

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \omega^2\tilde{x} = 0,$$

donde

$$\omega^2 = \frac{k}{m + I/R^2}.$$

(a) La frecuencia natural de vibración del sistema es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + I/R^2}}.$$

(b) De la Ec. (10.5), podemos escribir la solución general para $\tilde{x}$ en la forma

$$\tilde{x} = A\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t.$$

Con $t = 0$, $\tilde{x} = h$ y $d\tilde{x}/dt = 0$. La derivada de la solución general es

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\omega\cos\omega t - B\omega\,\text{sen}\,\omega t.$$

Las condiciones iniciales dan las ecuaciones

$$h = B, \qquad 0 = A\omega,$$

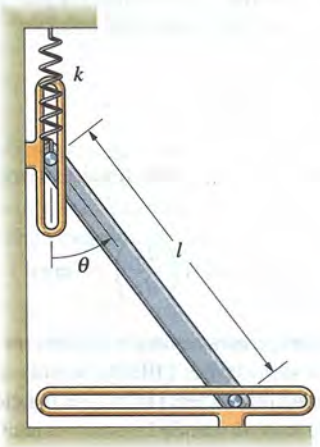
de manera que la posición de la masa respecto a su posición de equilibrio es

$$\tilde{x} = h\cos\omega t.$$

Ejemplo 10.2

El resorte unido a la barra esbelta de masa m de la Fig. 10.8 no está estirado cuando $\theta = 0$. Ignorando la fricción, determine la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones de la barra respecto a su posición de equilibrio.

Figura 10.8



ESTRATEGIA

El ángulo θ especifica la posición de la barra, por lo que sólo hay un grado de libertad. Podemos expresar las energías cinética y potencial en función de θ y de su derivada respecto al tiempo y derivar respecto al tiempo la energía total para obtener la ecuación de movimiento.

SOLUCIÓN

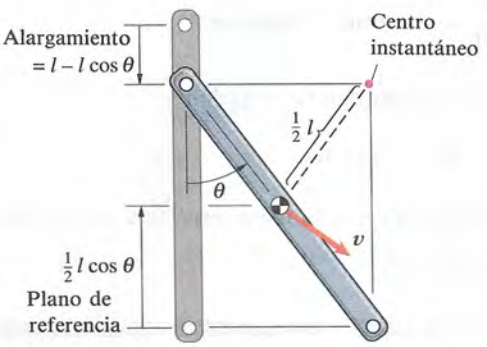
La energía cinética de la barra es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

donde v es la velocidad del centro de masa e $I = \frac{1}{12}ml^2$. La distancia del centro instantáneo de la barra a su centro de masa es $\frac{1}{2}l$ (Fig. a), por lo que $v = (\frac{1}{2}l)(d\theta/dt)$, y la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{6}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

(a) Determinación de la velocidad del centro de masa, del alargamiento del resorte y de la altura del centro de masa sobre el nivel de referencia.



En función de θ, el alargamiento del resorte es $l - l\cos\theta$. Situamos el plano de referencia para la energía potencial asociada con el peso en el fondo de la barra (Fig. a), por lo que la energía potencial total es

$$V = mg\left(\frac{1}{2}l\cos\theta\right) + \frac{1}{2}k(l - l\cos\theta)^2.$$

La suma de las energías cinética y potencial es constante:

$$T + V = \frac{1}{6}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mgl\cos\theta + \frac{1}{2}kl^2(1 - \cos\theta)^2 = \text{constante}.$$

Derivando respecto al tiempo esta ecuación, obtenemos la ecuación del movimiento:

$$\frac{1}{3}ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{1}{2}mgl\,\text{sen}\,\theta + kl^2(1 - \cos\theta)\,\text{sen}\,\theta = 0. \tag{10.14}$$

Para expresar esta ecuación en la forma de la Ec. (10.4), necesitamos escribirla en términos de pequeñas vibraciones respecto a la posición de equilibrio. Sea θ_e el valor de θ cuando la barra está en equilibrio. Haciendo $d^2\theta/dt^2 = 0$ en la Ec. (10.14), encontramos que θ_e debe satisfacer la relación

$$\cos\theta_e = 1 - \frac{mg}{2kl}. \tag{10.15}$$

Definimos $\tilde{\theta} = \theta - \tilde{\theta}_e$ y desarrollamos sen θ y cos θ en series de Taylor en función de θ:

$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}(\theta_e + \tilde{\theta}) = \text{sen}\,\theta_e + \cos\theta_e\,\tilde{\theta} + \cdots,$$

$$\cos\theta = \cos(\theta_e + \tilde{\theta}) = \cos\theta_e - \text{sen}\,\theta_e\,\tilde{\theta} + \cdots.$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (10.14), ignorando los términos en $\tilde{\theta}$ de segundo orden y superiores, y usando la Ec. (10.15) obtenemos

$$\frac{d^2\tilde{\theta}}{dt^2} + \omega^2\tilde{\theta} = 0,$$

donde

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}\left(1 - \frac{mg}{4kl}\right).$$

De la Ec. (10.10), la frecuencia natural de pequeñas vibraciones de la barra es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{l}\left(1 - \frac{mg}{4kl}\right)}.$$

Problemas

10.1 Confirme que $x = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$, donde A y B son constantes arbitrarias, satisface la Ec. (10.4).

10.2 Confirme que $x = E \operatorname{sen} (\omega t - \phi)$, donde E y ϕ son constantes arbitrarias, satisface la Ec. (10.4).

10.3 (a) Demuestre que $x = G \cos (\omega t - \psi)$, donde G y ψ son constantes arbitrarias, satisface la Ec. (10.4). (b) Determine las constantes A y B en la forma de la solución dada por la Ec. (10.5) en función de las constantes G y ψ.

10.4 La posición de un sistema en vibración es

$$x = (1/\sqrt{2}) \operatorname{sen} \omega t - (1/\sqrt{2}) \cos \omega t \text{ pie.}$$

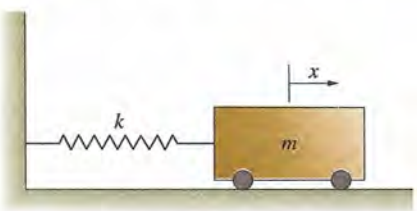
(a) Determine la amplitud E de la vibración y el ángulo ϕ en grados.
(b) Dibuje un diagrama de x para valores de ωt de 0 a 4π radianes, mostrando el ángulo ϕ.

10.5 La posición de un sistema en vibración es

$$x = -\sqrt{2} \operatorname{sen} \omega t + \sqrt{2} \cos \omega t \text{ m.}$$

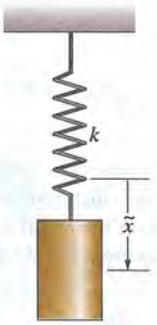
(a) Determine la amplitud E de la vibración y el ángulo ϕ en grados.
(b) Dibuje un diagrama de x para valores de ωt de 0 a 4π radianes, mostrando el ángulo ϕ.

10.6 En la Fig. P10.6, la coordenada x mide el desplazamiento de la masa $m = 10$ kg respecto a su posición de equilibrio. $k = 90$ N/m. En $t = 0$, la masa se suelta del reposo en la posición $x = 0.1$ m.
(a) Determine el periodo y la frecuencia natural de las vibraciones resultantes.
(b) Determine x en función del tiempo.



P10.6

10.7 El cuerpo suspendido pesa 30 lb y $k = 20$ lb/pie. En $t = 0$, su desplazamiento *respecto a la posición de equilibrio* es $\tilde{x} = 0.25$ pies y se mueve hacia abajo a 1.5 pie/s.
(a) Determine el periodo y la frecuencia natural de las vibraciones resultantes.
(b) Determine $\tilde{x}$ en función del tiempo.
(c) Grafique $\tilde{x}$ en función del tiempo entre $t = 0$ y $t = 3$ s.

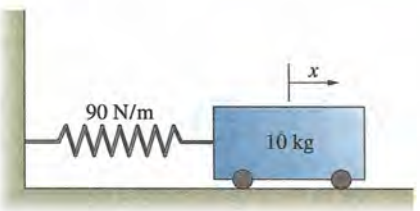


P10.7

10.8 La coordenada x mide el desplazamiento de la masa respecto a la posición en que el resorte no está estirado. La masa tiene las siguientes condiciones iniciales:

$$t = 0 \begin{cases} x = 0.1 \text{ m}, \\ \dfrac{dx}{dt} = 0. \end{cases}$$

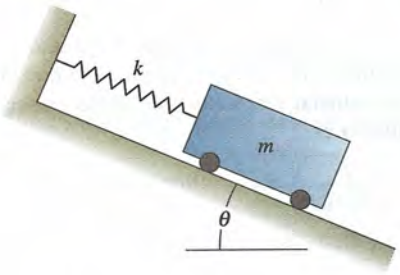
(a) Determine la posición de la masa en función del tiempo.
(b) Dibuje gráficas de la posición y velocidad de la masa en función del tiempo para los primeros 5 s de movimiento.



P10.8

10.9 Cuando $t = 0$, la masa del Prob. 10.8 está en la posición en que el resorte no está estirado y tiene una velocidad de 0.3 m/s hacia la derecha. Determine la posición de la masa en función del tiempo y la amplitud de la vibración: (a) expresando la solución en la forma dada por la Ec. (10.5); (b) expresando la solución en la forma dada por la Ec. (10.6).

10.10 Determine la frecuencia natural de vibración de la masa respecto a su posición de equilibrio.



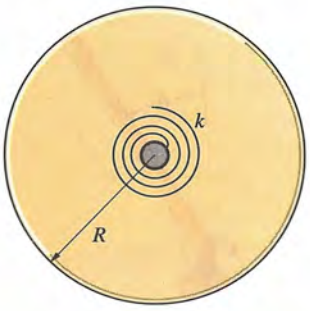
P10.10

10.11 Un saltador al vacío de 200 lb salta desde un puente. La cuerda sin estirar tiene una longitud de 60 pies y se estira 40 pies antes de que él rebote. Si la cuerda se modela como un resorte lineal, ¿cuál es el periodo de sus oscilaciones verticales?

P10.11

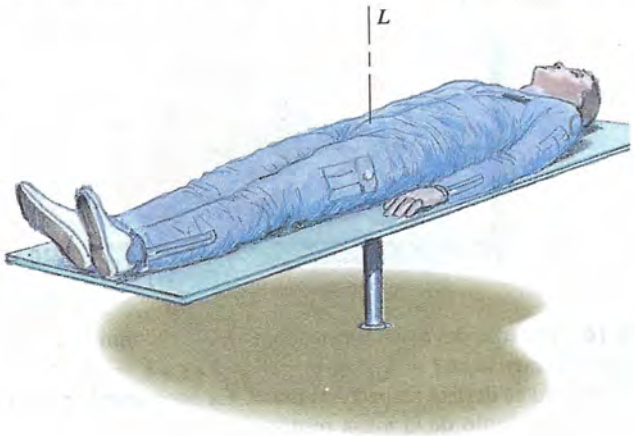
10.12 Un disco homogéneo de masa m y radio R gira alrededor de un eje fijo y está unido a un resorte torsional con constante k (el resorte ejerce un momento restaurador de magnitud $k\theta$, donde θ es el ángulo de rotación del disco respecto a su posición cuando el resorte no está estirado). Demuestre que el periodo de las vibraciones rotacionales del disco es

$$\tau = \pi R\sqrt{2m/k}.$$



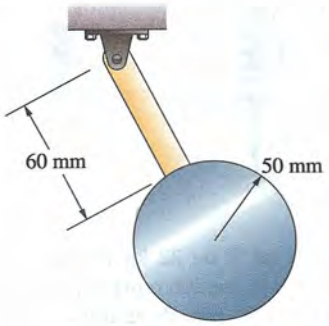
P10.12

10.13 Para determinar los momentos de inercia de un astronauta, se une una plataforma horizontal a una barra vertical de acero. El momento de inercia de la plataforma respecto a L es de 7.5 kg-m^2, y la frecuencia natural de las oscilaciones torsionales de la plataforma descargada es de 1 Hz. Con el astronauta en la plataforma, la frecuecia natural de las oscilaciones torsionales es de 0.520 Hz. ¿Cuál es el momento de inercia del astronauta respecto a L?



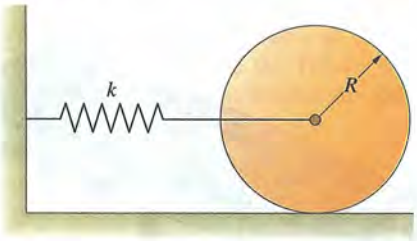
P10.13

10.14 El péndulo mostrado consiste en un disco homogéneo de 1 kg unido a una barra esbelta de 0.2 kg. ¿Cuál es la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones del péndulo?



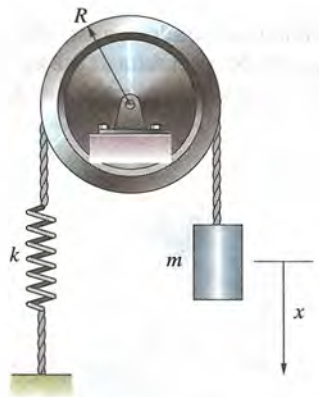
P10.14

10.15 El disco homogéneo pesa 100 lb y su radio es $R = 1$ pie. Rueda sobre la superficie plana. La constante del resorte es $k = 100$ lb/pie.
(a) Determine la frecuencia natural de las vibraciones del disco respecto a su posición de equilibrio.
(b) En $t = 0$, el resorte no está estirado y el disco tiene una velocidad angular horaria de 2 rad/s. ¿Cuál es la amplitud de las vibraciones resultantes y cuál es la velocidad angular del disco cuando $t = 3$ s?



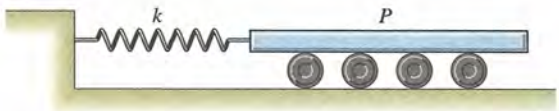
P10.15

10.16 El radio del disco mostrado es $R = 100$ mm y su momento de inercia es $I = 0.1$ kg-m^2. $m = 5$ kg y $k = 135$ N/m. El cable no se desliza respecto al disco. La coordenada x mide el desplazamiento de la masa respecto a la posición en que el resorte no está estirado.
(a) ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia natural de las vibraciones verticales de la masa respecto a su posición de equilibrio?
(b) Determine x en función del tiempo si el sistema se libera del reposo con $x = 0$.



P10.16

10.17 La plataforma P de 22 kg mostrada descansa sobre cuatro rodillos. Éstos se pueden representar como cilindros homogéneos de 1 kg con 30 mm de radio; $k = 900$ N/m. ¿Cuál es la frecuencia natural de las vibraciones horizontales de la plataforma respecto a su posición de equilibrio?

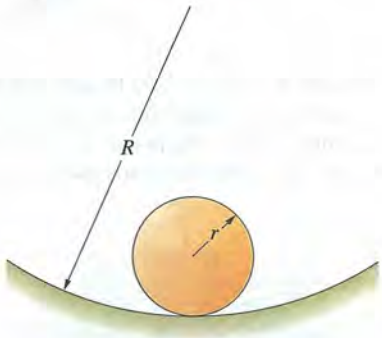


P10.17

10.18 En $t = 0$, la plataforma del Prob. 10.17 está 0.1 m a la izquierda de su posición de equilibrio y se está moviendo hacia la derecha a 2 m/s. ¿Cuáles son la posición y la velocidad de la plataforma en $t = 4$ s?

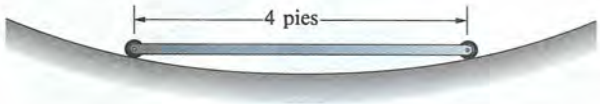
10.19 Un disco homogéneo de masa m y radio r rueda sobre una superficie curva de radio R. Demuestre que la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones del disco respecto a su posición de equilibrio es

$$f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{6(R-r)}}.$$



P10.19

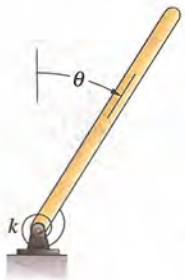
10.20 La barra esbelta mostrada tiene soportes de rodillo en sus extremos y está en equilibrio en una depresión circular de 8 pies de radio. ¿Cuál es la frecuencia de las pequeñas vibraciones de la barra respecto a su posición de equilibrio?



P10.20

10.21 Una barra esbelta de masa m y longitud l está articulada a un soporte fijo. Un resorte torsional de constante k unido a la barra en el soporte no está estirado cuando la barra está vertical. Demuestre que la ecuación que rige pequeñas vibraciones de la barra desde su posición vertical de equilibrio es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \quad \text{donde} \quad \omega^2 = \frac{(k - \frac{1}{2}mgl)}{\frac{1}{3}ml^2}.$$



P10.21

10.22 Las condiciones iniciales de la barra esbelta del Prob. 10.21 son

$$t = 0 \begin{cases} \theta = 0 \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}_0. \end{cases}$$

(a) Si $k > \frac{1}{2}mgL$, demuestre que θ está dada por

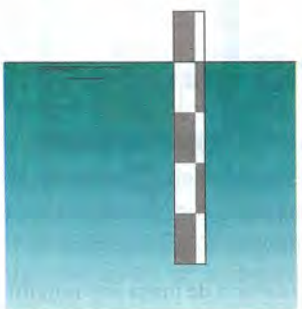
$$\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t, \quad \text{donde} \quad \omega^2 = \frac{(k - \frac{1}{2}mgl)}{\frac{1}{3}ml^2}.$$

(b) Si $k < \frac{1}{2}mgL$, demuestre que θ está dada por

$$\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{2h}(e^{ht} - e^{-ht}), \quad \text{donde} \quad h^2 = \frac{(\frac{1}{2}mgl - k)}{\frac{1}{3}ml^2}.$$

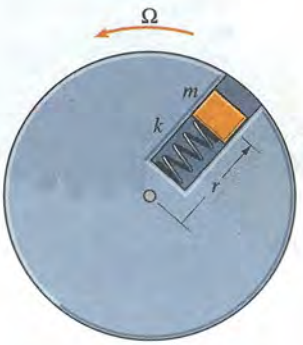
Estrategia: En (b), busque una solución de la ecuación de movimiento de la forma $x = Ce^{\lambda t}$, con C y λ constantes.

10.23 Una boya flotante está en equilibrio en la posición vertical mostrada (su centro de masa está suficientemente bajo, de modo que se encuentra estable en esta posición). Es un cilindro de 10 kg de 1 m de longitud y 125 mm de diámetro. La densidad del agua es de 1025 kg/m^3, y la fuerza de flotación que soporta a la boya es igual al peso del agua que ocuparía el volumen de la parte del cilindro bajo la superficie. Si la boya se empuja ligeramente hacia abajo y se suelta, ¿cuál es la frecuencia natural de las vibraciones verticales resultantes?



P10.23

10.24 Un disco gira respecto a un eje fijo *vertical* con velocidad angular constante Ω (el plano del disco es horizontal). Una masa m se desliza en una ranura lisa del disco y está unida a un resorte con constante k. La distancia del centro del disco a la masa cuando el resorte no está estirado es r_0. Demuestre que si $k/m > \Omega^2$, la frecuencia natural de vibración de la masa es $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m - \Omega^2}$.



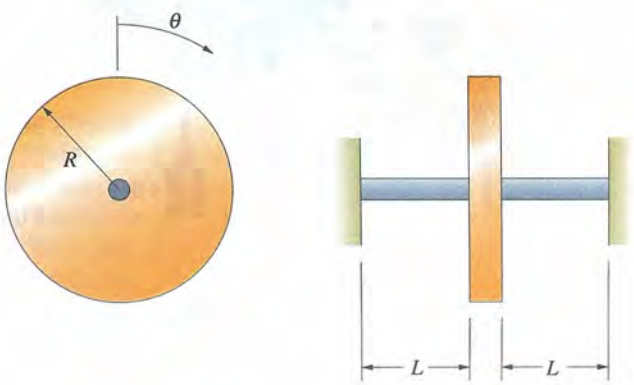
P10.24

10.25 Suponga que en $t = 0$, la masa descrita del Prob. 10.24 está localizada en $r = r_0$ y que su velocidad radial es $dr/dt = 0$. Determine la posición r de la masa en función del tiempo.

10.26 Un disco homogéneo de 100 lb con radio $R = 1$ pie está unido a dos barras cilíndricas idénticas de acero de longitud $L = 1$ pie. La relación entre el momento M que ejerce una de las barras sobre el disco y el ángulo de giro θ del disco es

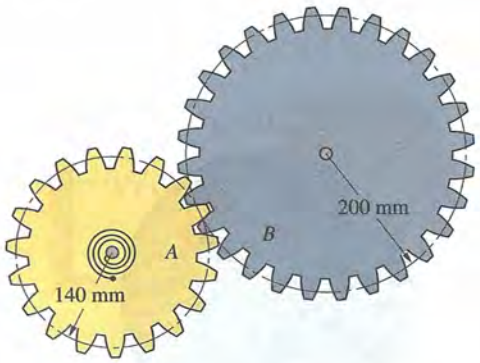
$$M = \frac{GJ}{L}\theta,$$

donde J es el momento polar de inercia de la sección transversal de la barra y $G = 1.7 \times 10^9$ lb/pie^2 es el módulo por cortante del acero. Determine el radio requerido de las barras si la frecuencia natural de las vibraciones rotacionales del disco debe ser de 10 Hz.



P10.26

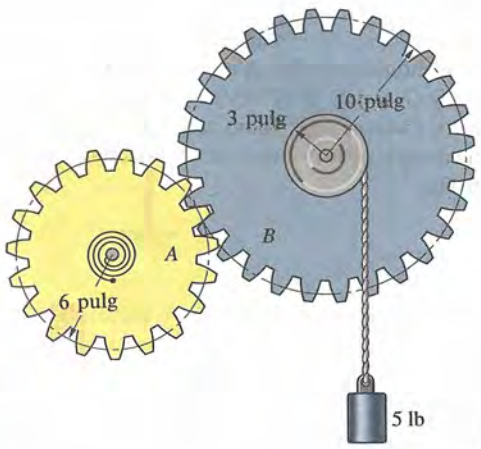
10.27 Los momentos de inercia de los engranes A y B mostrados son $I_A = 0.025$ kg-m^2 e $I_B = 0.100$ kg-m^2. El engrane A está conectado a un resorte torsional con $k = 10$ N-m/rad constante. ¿Cuál es la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones angulares de los engranes?



P10.27

10.28 En $t = 0$, el resorte torsional del Prob. 10.27 no está estirado y el engrane B tiene velocidad angular antihoraria de 2 rad/s. Determine la posición angular antihoraria del engrane B respecto a su posición de equilibrio en función del tiempo.

10.29 Los momentos de inercia de los engranes A y B mostrados son $I_A = 0.014$ slug-pie^2 e $I_B = 0.100$ slug-pie^2. A está conectado a un resorte torsional con $k = 2$ pie-lb/rad constante. ¿Cuál es la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones angulares de los engranes respecto a su posición de equilibrio?



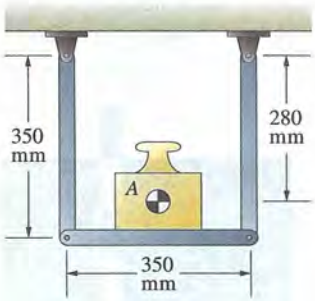
P10.29

10.30 El peso de 5 lb del Prob. 10.29 se levanta 0.5 pulg desde su posición de equilibrio y se libera del reposo en $t = 0$. Determine la posición angular antihoraria del engrane B respecto a su posición de equilibrio en función del tiempo.

10.31 En la Fig. P10.31 cada barra esbelta tiene masa m y longitud l. Determine la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones del sistema.

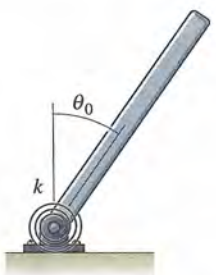
P10.31

10.32 En la Fig. P10.32 la masa de cada barra esbelta es de 1 kg. Si la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones del sistema es 0.935 Hz, ¿cuál es la masa del cuerpo A?



P10.32

10.33 La barra esbelta de masa m y longitud l se mantiene en equilibrio en la posición mostrada, mediante un resorte torsional con constante k. El resorte no está estirado cuando la barra está vertical. Determine la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones respecto a la posición de equilibrio mostrada.



P10.33

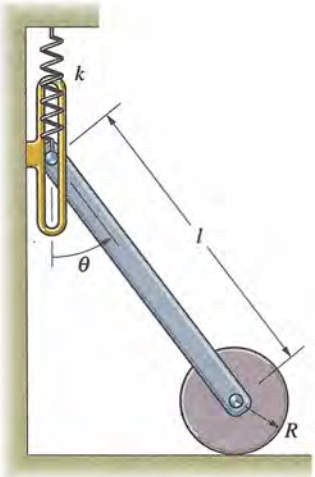
10.34 Las masas de la barra esbelta y el disco homogéneo mostrados son m y m_d respectivamente. El resorte no está estirado cuando $\theta = 0$. Suponga que el disco rueda sobre la superficie horizontal.

(a) Demuestre que el movimiento está regido por la ecuación

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{3m_d}{2m}\cos^2\theta\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{3m_d}{2m}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{g}{2l}\operatorname{sen}\theta + \frac{k}{m}(1-\cos\theta)\operatorname{sen}\theta = 0.$$

(b) Si el sistema está en equilibrio en el ángulo $\theta = \theta_e$ y $\tilde{\theta} = \theta - \theta_e$, demuestre que la ecuación que rige las pequeñas vibraciones respecto a la posición de equilibrio es

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{3m_d}{2m}\cos^2\theta_e\right)\frac{d^2\tilde{\theta}}{dt^2} + \left[\frac{k}{m}\left(\cos\theta_e - \cos^2\theta_e + \operatorname{sen}^2\theta_e\right) - \frac{g}{2l}\cos\theta_e\right]\tilde{\theta} = 0.$$



P10.34

10.35 Las masas de la barra y el disco del Prob. 10.34 son $m = 2$ kg y $m_d = 4$ kg respectivamente. Las dimensiones son $l = 1$ m y $R = 0.28$ m, y $k = 70$ N/m.

(a) Determine el ángulo θ_e en el que el sistema está en equilibrio.

(b) El sistema está en reposo en la posición de equilibrio cuando al disco se le imparte una velocidad angular horaria de 0.1 rad/s. Determine θ en función del tiempo.

10.2 *Vibraciones amortiguadas*

Si se desplaza la masa de un oscilador resorte-masa y se libera, es obvio que no continuará vibrando indefinidamente; se irá frenando y finalmente se detendrá debido a la fricción o a los **mecanismos de amortiguamiento** que actúan sobre el sistema. Estos mecanismos amortiguan o **atenúan** la vibración. En algunos casos se incluyen intencionalmente mecanismos amortiguadores en los sistemas vibratorios. Por ejemplo, los amortiguadores de los autos se diseñan para absorber vibraciones de la suspensión respecto al bastidor. En la sección anterior ignoramos el amortiguamiento, y las soluciones que obtuvimos sólo describen movimientos en periodos breves. Veremos ahora un método sencillo para modelar el amortiguamiento en sistemas vibratorios.

El oscilador resorte-masa de la Fig. 10.9(a) tiene un **elemento amortiguador**, representado esquemáticamente como un pistón moviéndose en un cilindro con fluido viscoso. La fuerza requerida para alargar o acortar un elemento amortiguador se define como el producto de una constante c, llamada **constante de amortiguamiento**, y la razón de cambio de su longitud (Fig. 10.9b). Por tanto, la ecuación del movimiento de la masa es

$$-c\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

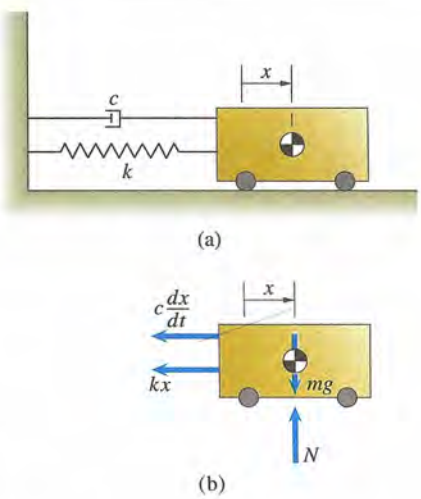


Figura 10.9

(a) Oscilador amortiguado resorte-masa.

(b) Diagrama de cuerpo libre de la masa.

Definiendo $\omega = \sqrt{k/m}$ y $d = c/(2m)$, podemos escribir esta ecuación en la forma

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2d\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.} \tag{10.16}$$

Esta ecuación describe las vibraciones de muchos sistemas amortiguados de un grado de libertad. La forma de su solución, y en consecuencia el carácter del comportamiento predicho del sistema, depende de si d es menor, igual o mayor que ω. Veremos estos casos en las siguientes secciones.

Amortiguamiento subcrítico

Si $d < \omega$, se dice que el sistema está **subcríticamente amortiguado**. Suponiendo una solución de la forma

$$x = Ce^{\lambda t}, \tag{10.17}$$

donde C y λ son constantes, y sustituyéndolas en la Ec. (10.16) obtenemos

$$\lambda^2 + 2d\lambda + \omega^2 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática da dos valores para la constante λ que podemos escribir como

$$\lambda = -d \pm i\omega_d,$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - d^2}. \tag{10.18}$$

Como hemos supuesto que $d < \omega$, la constante ω_d es un número real. Las dos raíces para λ nos dan dos soluciones de la forma de la Ec. (10.17). La solución general resultante de la Ec. (10.16) es

$$x = e^{-dt}(Ce^{i\omega_d t} + De^{-i\omega_d t}),$$

donde C y D son constantes. Usando la identidad $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, podemos expresar la solución general en la forma

$$\boxed{x = e^{-dt}(A \operatorname{sen}\omega_d t + B\cos\omega_d t),} \tag{10.19}$$

donde A y B son constantes. La Ec. (10.19) es el producto de una función exponencial decreciente en el tiempo por una expresión idéntica en forma a la solución que obtuvimos para un sistema sin amortiguamiento. La función exponencial ocasiona el efecto esperado de amortiguamiento: la amplitud de la vibración se atenúa con el tiempo. El coeficiente d determina la razón con que disminuye la amplitud.

El amortiguamiento tiene un efecto importante además de la atenuación. Como la parte oscilatoria de la solución es idéntica en forma a la

Ec. (10.5), excepto que la frecuencia natural circular ω es reemplazada por ω_d, se infiere de las Ecs. (10.9) y (10.10) que el periodo y la frecuencia natural del sistema amortiguado son

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega_d}, \qquad f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_d}{2\pi}.} \tag{10.20}$$

De la Ec. (10.18) vemos que $\omega_d < \omega$, *por lo que el periodo de vibración aumenta y su frecuencia natural disminuye como resultado del amortiguamiento subcrítico.*

La razón de amortiguamiento suele expresarse en términos del **decremento logarítmico** δ, que es el logaritmo natural de la razón de la amplitud en un tiempo t a la amplitud en un tiempo $t + \tau$. Como la amplitud es proporcional a e^{-dt}, podemos obtener una relación sencilla entre el decremento logarítmico, el coeficiente d y el periodo:

$$\boxed{\delta = \ln\left[\frac{e^{-dt}}{e^{-d(t+\tau)}}\right] = d\tau.}$$

Amortiguamientos crítico y supercrítico

Cuando $d \geq \omega$, el tipo de la solución de la Ec. (10.16) es muy diferente del caso de amortiguamiento subcrítico. Supongamos que $d > \omega$. Cuando éste es el caso, se dice que el sistema está **supercríticamente amortiguado.** Sustituimos una solución de la forma

$$x = Ce^{\lambda t} \tag{10.21}$$

en la Ec. (10.16) y obtenemos

$$\lambda^2 + 2d\lambda + \omega^2 = 0. \tag{10.22}$$

Podemos escribir las raíces de esta ecuación como

$$\lambda = -d \pm h,$$

donde

$$h = \sqrt{d^2 - \omega^2}. \tag{10.23}$$

La solución general de la Ec. (10.16) es

$$\boxed{x = Ce^{-(d-h)t} + De^{-(d+h)t},} \tag{10.24}$$

donde C y D son constantes.

Cuando $d = \omega$, se dice que el sistema está **críticamente amortiguado.** La constante $h = 0$, por lo que la Ec. (10.22) tiene una raíz repetida,

$\lambda = -d$, y obtenemos sólo una solución de la forma (10.21). En este caso se puede demostrar que la solución general de la Ec. (10.16) es

$$\boxed{x = Ce^{-dt} + Dte^{-dt},} \tag{10.25}$$

donde C y D son constantes.

Las Ecs. (10.24) y (10.25) indican que el movimiento del sistema no es oscilatorio cuando $d \geq \omega$. Ellas están expresadas en términos de funciones exponenciales y no contienen senos ni cosenos. La condición $d = \omega$ define la cantidad mínima de amortiguamiento necesario para evitar un comportamiento oscilatorio, debido a lo cual se le llama caso críticamente amortiguado. La Fig. 10.10 muestra el efecto de cantidades crecientes de amortiguamiento en el comportamiento de un sistema vibratorio.

El concepto de amortiguamiento crítico tiene importantes implicaciones en el diseño de muchos sistemas. Por ejemplo, es deseable introducir suficiente amortiguamiento en la suspensión de un auto para que su movimiento no sea oscilatorio, aunque demasiado amortiguamiento haría muy rígida la suspensión.

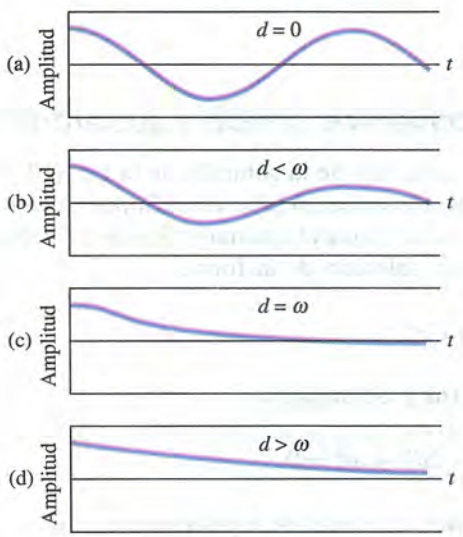


Figura 10.10
Historia de la amplitud de un sistema vibratorio (a) no amortiguado; (b) subcríticamente amortiguado; (c) críticamente amortiguado; (d) supercríticamente amortiguado.

En los siguientes ejemplos analizamos sistemas amortiguados de un grado de libertad. Expresando la ecuación del movimiento del sistema en la forma de la Ec. (10.16), se puede determinar d y ω. Sus valores nos dicen si el amortiguamiento es subcrítico, crítico o supercrítico, lo que indica la forma de la solución que se debe usar:

Tipo de amortiguamiento		Solución
$d < \omega$:	Subcritico	Ec. (10.19)
$d = \omega$:	Critico	Ec. (10.25)
$d > \omega$:	Supercritico	Ec. (10.24)

Ejemplo 10.3

El oscilador amortiguado masa-resorte de la Fig. 10.9(a) tiene masa $m = 2$ kg, $k = 8$ N/m y constante de amortiguamiento $c = 1$ N-s/m. En $t = 0$. la masa se libera del reposo en la posición $x = 0.1$ m. Determine su posición en función del tiempo.

SOLUCIÓN

Las constantes $\omega = \sqrt{k/m} = 2$ rad/s y $d = c/2m = 0.25$ rad/s, por lo que el amortiguamiento es subcrítico y el movimiento está descrito por la Ec. (10.19). De la Ec. (10.18),

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - d^2} = 1.98 \text{ rad/s}.$$

De la Ec.(10.19),

$$x = e^{-0.25t}(A \operatorname{sen} 1.98t + B \cos 1.98t),$$

y la velocidad de la masa es

$$\frac{dx}{dt} = -0.25e^{-0.25t}(A \operatorname{sen} 1.98t + B \cos 1.98t)$$

$$+e^{-0.25t}(1.98A \cos 1.98t - 1.98B \operatorname{sen} 1.98t).$$

De las condiciones $x = 0.1$ m y $dx/dt = 0$ en $t = 0$, obtenemos $A = 0.0126$ y $B = 0.1$ m, por lo que la posición de la masa es

$$x = e^{-0.25t}(0.0126 \operatorname{sen} 1.98t + 0.1 \cos 1.98t) \text{ m}.$$

La gráfica de x para los primeros 10 s de movimiento de la Fig. 10.11 muestra claramente la atenuación de la amplitud.

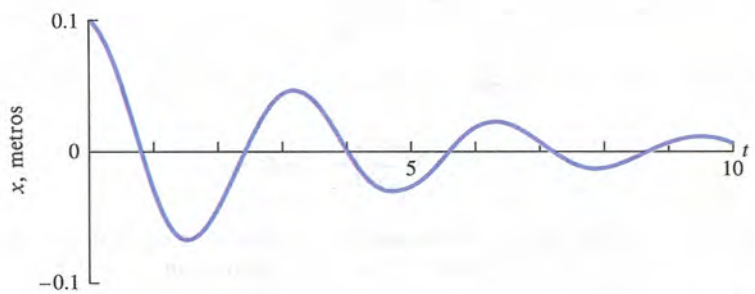
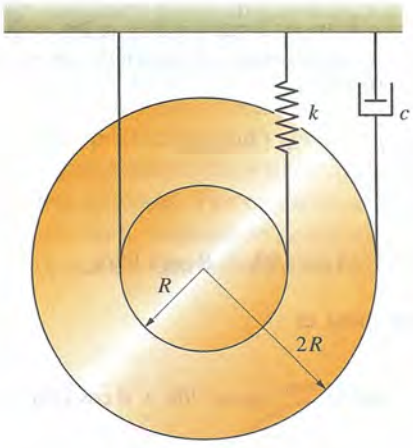


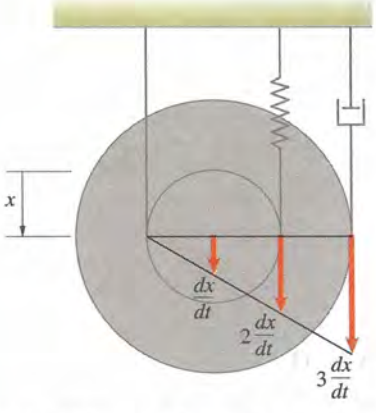
Figura 10.11
Posición de la masa en función del tiempo.

Ejemplo 10.4

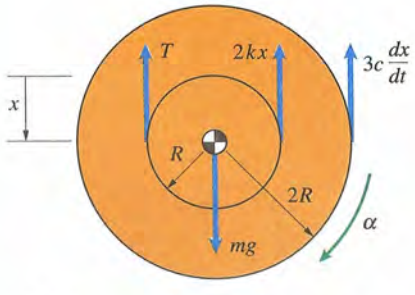
El disco escalonado de 40 lb de la Fig. 10.12 se libera del reposo con el resorte no estirado. Determine la posición del centro del disco en función del tiempo si $R = 1$ pie, $k = 10$ lb/pie, $c = 4$ lb-s/pie, y el momento de inercia en función de la masa m del disco es $I = 3mR^2$.

Figura 10.12





(a) Uso del centro instantáneo para determinar las relaciones entre las velocidades.



(b) Diagrama de cuerpo libre del disco.

SOLUCIÓN

Sea x el desplazamiento hacia abajo del centro del disco respecto a su posición cuando el resorte no está estirado. De la posición del centro instantáneo del disco (Fig. a), podemos ver que la razón a la que el resorte se estira es $2(dx/dt)$ y la razón a la que el elemento amortiguante se alarga es $3(dx/dt)$. Cuando el centro del disco se desplaza una distancia x, el alargamiento del resorte es $2x$.

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del disco de la Fig. (b), que muestra las fuerzas ejercidas por el resorte, el amortiguador y la tensión en el cable. Por la segunda ley de Newton,

$$mg - T - 2kx - 3c\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

y la ecuación del movimiento angular es

$$RT - R(2kx) - 2R\left(3c\frac{dx}{dt}\right) = (3mR^2)\alpha.$$

La aceleración angular está relacionada con la aceleración del centro del disco por $\alpha = (d^2x/dt^2)/R$. Sumando la ecuación del movimiento angular a la segunda ley de Newton, obtenemos la ecuación de movimiento

$$4m\frac{d^2x}{dt^2} + 9c\frac{dx}{dt} + 4kx = mg.$$

Haciendo en esta ecuación d^2x/dt^2 y dx/dt igual a cero, determinamos que la posición de equilibrio del disco es $x = mg/4k$. Planteando la ecuación del movimiento para la variable $\tilde{x} = x - mg/4k$, obtenemos

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \left(\frac{9c}{4m}\right)\frac{d\tilde{x}}{dt} + \frac{k}{m}\tilde{x} = 0.$$

Esta ecuación es idéntica en forma a la Ec. (10.16), donde las constantes d y ω son

$$d = \frac{9c}{8m} = \frac{(9)(4)}{(8)(40/32.2)} = 3.62 \text{ rad/s},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{(40/32.2)}} = 2.84 \text{ rad/s}.$$

El amortiguamiento es supercrítico, por lo que el movimiento es descrito por la Ec. (10.24) con $h = \sqrt{d^2 - \omega^2} = 2.25$ rad/s:

$$\tilde{x} = Ce^{-(d-h)t} + De^{-(d+h)t} = Ce^{-1.37t} + De^{-5.87t}.$$

La velocidad es

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = -1.37Ce^{-1.37t} - 5.87De^{-5.87t}.$$

En $t = 0$, $\tilde{x} = -mg/4k = -1$ pie y $d\tilde{x}/dt = 0$. De estas condiciones obtenemos $C = -1.304$ pies y $D = 0.304$ pies, por lo que la posición del centro del disco respecto a su posición de equilibrio es

$$\tilde{x} = -1.304e^{-1.37t} + 0.304e^{-5.87t} \text{ pie}.$$

En la Fig. 10.13 mostramos la gráfica de la posición para los primeros cuatro segundos del movimiento.

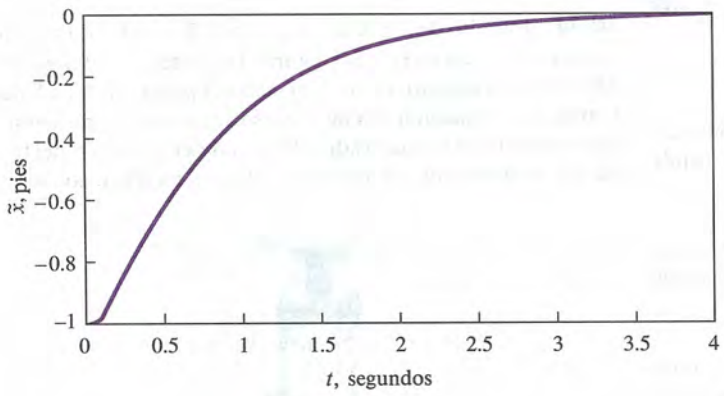


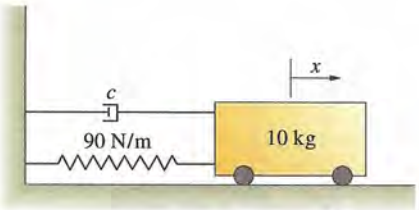
Figura 10.13
Posición del centro del disco en función del tiempo.

Problemas

10.36 (a) ¿Cuáles son la frecuencia natural y el periodo del oscilador resorte-masa descrito en el Ej. 10.3? (b) ¿Cuáles son la frecuencia natural y el periodo si se quita el amortiguador?

10.37 (a) ¿Qué valor debe tener c para que el disco escalonado del Ej. 10.4 esté críticamente amortiguado? (b) Si c tiene el valor determinado en (a) y el disco se libera del reposo con el resorte no estirado, determine la posición del centro del disco respecto a su posición de equilibrio en función del tiempo.

10.38 La constante de amortiguamiento del oscilador mostrado es $c = 20$ N-s/m. ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia natural del sistema? Compárelos con el periodo y la frecuencia natural del sistema no amortiguado.



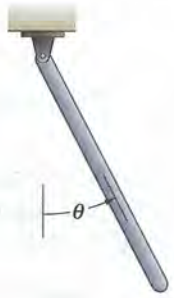
P10.38

10.39 En $t = 0$, la posición de la masa del Prob. 10.38 respecto a su posición de equilibrio es $x = 0$ y su velocidad es 1 m/s hacia la derecha. Determine x en función del tiempo.

10.40 En el Prob. 10.38, ¿qué valor de la constante c de amortiguamiento hará que la amplitud de la vibración del sistema disminuya a un medio de su valor inicial en 10 s?

10.41 En $t = 0$, la posición de la masa del Prob. 10.38 es $x = 0$ y tiene una velocidad de 1 m/s hacia la derecha. Determine x en función del tiempo si c duplica el valor necesario para que el sistema sea críticamente amortiguado.

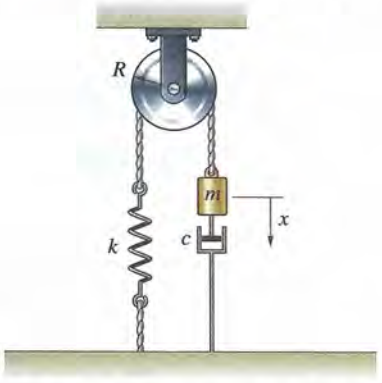
10.42 En la Fig. 10.42 la barra esbelta homogénea tiene 4 pies de longitud y pesa 10 lb. La resistencia aerodinámica y la fricción en el soporte ejercen un momento resistente sobre la barra de magnitud $0.5(d\theta/dt)$ pie-lb, donde $d\theta/dt$ es la velocidad angular de la barra en rad/s.
(a) ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones de la barra?
(b) ¿Cuánto tiempo pasa antes de que la amplitud de la vibración disminuya a la mitad de su valor inicial?



P10.42

10.43 Si la barra del Prob. 10.42 se desplaza un ángulo pequeño θ_0 y se libera del reposo en $t = 0$, determine θ en función del tiempo.

10.44 El radio de la polea mostrada es $R = 100$ mm y su momento de inercia es $I = 0.1$ kg-m^2. La masa $m = 5$ kg y $k = 135$ N/m. El cable no resbala respecto a la polea. La coordenada x mide el desplazamiento de la masa respecto a la posición en que el resorte no está estirado. Determine x en función del tiempo si $c = 60$ N-s/m y el sistema se libera del reposo con $x = 0$.

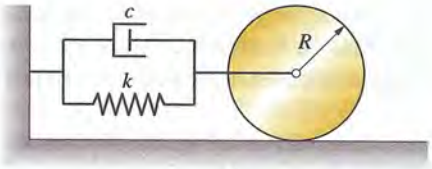


P10.44

10.45 Para el sistema descrito en el Prob. 10.44, determine x en función del tiempo si $c = 120$ N-s/m y el sistema se libera del reposo con $x = 0$.

10.46 Para el sistema descrito en el Prob. 10.44, escoja el valor de c de manera que el sistema sea críticamente amortiguado y determine x en función del tiempo si el sistema se libera del reposo con $x = 0$.

10.47 El disco homogéneo mostrado pesa 100 lb y su radio es $R = 1$ pie. Rueda sobre la superficie plana. $k = 100$ lb/pie y $c = 3$ lb-s/pie. Determine la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones del disco respecto a su posición de equilibrio.

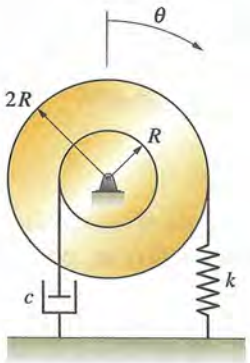


P10.47

10.48 En el Prob. 10.47, el resorte no está estirado en $t = 0$ y el disco tiene una velocidad angular horaria de 2 rad/s. ¿Cuál es la velocidad angular del disco cuando $t = 3$ s?

10.49 En la Fig. P10.49 el momento de inercia del disco escalonado es I. Sea θ el desplazamiento angular del disco respecto a su posición cuando el resorte no está estirado. Demuestre que la ecuación que rige a θ es idéntica en forma a la Ec. (10.16), donde

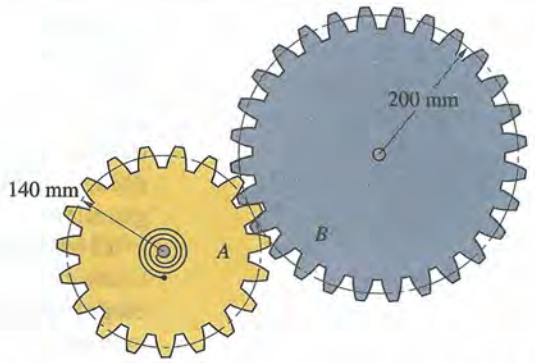
$$d = \frac{R^2 c}{2I} \quad \text{y} \quad \omega^2 = \frac{4R^2 k}{I}.$$



P10.49

10.50 En el Prob. 10.49, el radio $R = 250$ mm, $k = 150$ N/m y el momento de inercia del disco es $I = 2$ kg-m^2.
(a) ¿Qué valor de c hará que el sistema sea críticamente amortiguado?
(b) En $t = 0$, el resorte no está estirado y la velocidad angular horaria del disco es de 10 rad/s. Determine θ en función del tiempo si el sistema es críticamente amortiguado.
(c) Usando el resultado de la parte (b), determine el máximo desplazamiento angular resultante del disco y el tiempo en que ocurre.

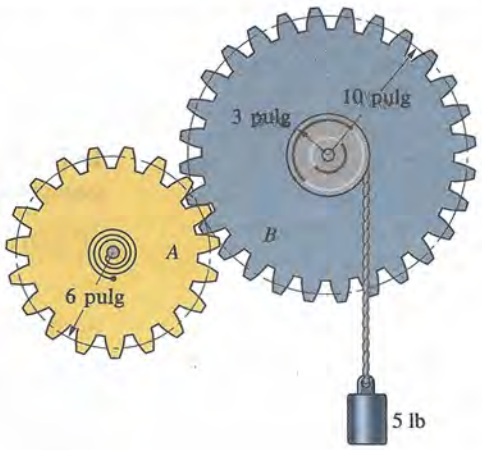
10.51 Los momentos de inercia de los engranes A y B mostrados son $I_A = 0.025$ kg-m^2 e $I_B = 0.100$ kg-m^2. A está conectado a un resorte helicoidal con $k = 10$ N-m/rad. El cojinete que soporta a B contiene un elemento amortiguador que ejerce un momento resistente sobre el engrane B de magnitud $2(d\theta_B/dt)$ N-m, donde $d\theta_B/dt$ es la velocidad angular de B en rad/s. ¿Cuál es la frecuencia de las pequeñas vibraciones angulares de los engranes?



P10.51

10.52 En $t = 0$, el resorte torsional del Prob. 10.51 no está estirado y el engrane B tiene una velocidad angular antihoraria de 2 rad/s. Determine la posición angular antihoraria de B respecto a su posición de equilibrio en función del tiempo.

10.53 Los momentos de inercia de los engranes A y B son $I_A = 0.014$ slug-pie^2 e $I_B = 0.100$ slug-pie^2. A está conectado a un resorte helicoidal con $k = 2$ pie-lb/rad. El cojinete que soporta a B contiene un elemento amortiguador que ejerce un momento resistente sobre B de magnitud $1.5(d\theta_B/dt)$ pie-lb, donde $d\theta_B/dt$ es la velocidad angular de B en rad/s. ¿Cuál es la frecuencia de las pequeñas vibraciones angulares de los engranes?



P10.53

10.54 El peso de 5 lb del Prob. 10.53 se eleva 0.5 pulg desde su posición de equilibrio y se libera del reposo en $t = 0$. Determine la posición angular antihoraria del engrane B respecto a su posición de equilibrio en función del tiempo.

10.55 Para el caso del movimiento críticamente amortiguado, confirme que la expresión

$$x = Ce^{-dt} + Dte^{-dt}$$

es una solución de la Ec. (10.16).

10.3 *Vibraciones forzadas*

El término **vibraciones forzadas** significa que fuerzas externas afectan las vibraciones de un sistema. Hasta ahora hemos analizado **vibraciones libres** de sistemas, o sea, vibraciones no afectadas por fuerzas externas. Por ejemplo, durante un sismo, un edificio sufre vibraciones forzadas inducidas por fuerzas oscilatorias ejercidas en su cimentación. Cuando el sismo pasa, el edificio vibra libremente hasta que su movimiento cesa por amortiguamiento.

El oscilador amortiguado resorte-masa de la Fig. 10.14(a) está sometido a una fuerza horizontal $F(t)$ dependiente del tiempo. De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre de la masa (Fig. 10.14b), su ecuación de movimiento es

$$F(t) - kx - c\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

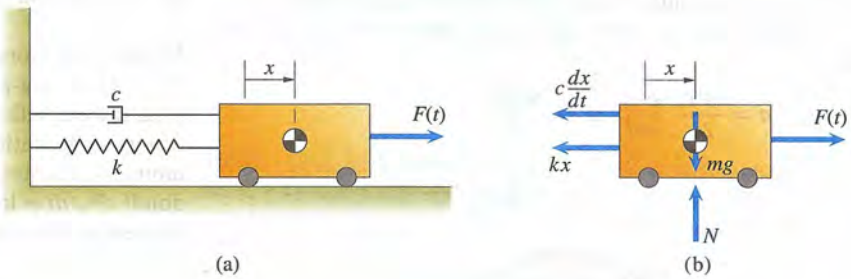


Figura 10.14
(a) Oscilador resorte-masa amortiguado sometido a una fuerza dependiente del tiempo. (b) Diagrama de cuerpo libre de la masa.

Definiendo $d = c/2m$, $\omega^2 = k/m$ y $a(t) = F(t)/m$, podemos escribir esta ecuación en la forma

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2d\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = a(t).} \tag{10.26}$$

Llamamos a $a(t)$ **función de excitación**. La Ec. (10.26) describe las vibraciones forzadas de muchos sistemas amortiguados de un grado de libertad. No es homogénea, porque la función de excitación no contiene a x o a una de sus derivadas. Su solución general consta de dos partes, la solución homogénea y la solución particular:

$$x = x_h + x_p.$$

La **solución homogénea** x_h es la solución general de la Ec. (10.26) con el miembro derecho igualado a cero. Por tanto, es la solución general para vibraciones libres, descritas en la Sec. 10.2. La **solución particular** x_p es una solución que satisface a la Ec. (10.26). En las secciones siguientes analizaremos las soluciones particulares para dos tipos de funciones de excitación que se presentan con frecuencia en las aplicaciones.

Función de excitación oscilatoria

Las ruedas y ejes desbalanceados fuerzas que oscilan a sus frecuencias de rotación. Si las ruedas de un auto están desbalanceadas, ejercen fuerzas oscilatorias que causan vibraciones perceptibles. Se diseñan dispositivos electromecánicos que transforman corrientes oscilatorias en fuerzas oscilatorias para probar sistemas vibratorios. La razón principal por la que nos interesa este tipo de función de excitación es que casi cualquiera puede representarse como una suma de funciones oscilatorias de excitación con diferentes frecuencias o un espectro continuo de frecuencias.

Estudiando el movimiento de un sistema vibratorio sometido a una función oscilatoria de excitación, podemos determinar su respuesta en función de la frecuencia de la fuerza. Supongamos que la función de excitación es una función oscilatoria de la forma

$$a(t) = a_0 \operatorname{sen}\omega_0 t + b_0 \cos\omega_0 t, \tag{10.27}$$

donde a_0, b_0 y la frecuencia circular ω_0 de la función de excitación son constantes dadas. Podemos obtener la solución particular de la Ec. (10.26) buscando una solución de la forma

$$x_p = A_p \operatorname{sen}\omega_0 t + B_p \cos\omega_0 t, \tag{10.28}$$

donde A_p y B_p son constantes por determinar. Sustituyendo esta expresión y la Ec. (10.27) en la Ec. (10.26), podemos escribir el resultado como

$$(-\omega_0^2 A_p - 2d\omega_0 B_p + \omega^2 A_p - a_0)\operatorname{sen}\omega_0 t$$

$$+(-\omega_0^2 B_p + 2d\omega_0 A_p + \omega^2 B_p - b_0)\cos\omega_0 t = 0.$$

Igualando los coeficientes de sen $\omega_0 t$ y cos $\omega_0 t$ a cero y despejando A_p y B_p, obtenemos

$$A_p = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)a_0 + 2d\omega_0 b_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4d^2\omega_0^2}, \quad B_p = \frac{-2d\omega_0 a_0 + (\omega^2 - \omega_0^2)b_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4d^2\omega_0^2}. \tag{10.29}$$

Sustituyendo estos resultados en la Ec. (10.28), la solución particular es

$$x_p = \left[\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)a_0 + 2d\omega_0 b_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4d^2\omega_0^2}\right]\operatorname{sen}\omega_0 t + \left[\frac{-2d\omega_0 a_0 + (\omega^2 - \omega_0^2)b_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4d^2\omega_0^2}\right]\cos\omega_0 t. \tag{10.30}$$

La amplitud de la solución particular es

$$E_p = \sqrt{A_p^2 + B_p^2} = \frac{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4d^2\omega_0^2}}. \tag{10.31}$$

En la Sec. 10.2 mostramos que la solución de la ecuación que describe la vibración libre de un sistema amortiguado se atenúa con el tiempo. Por

esta razón, la solución particular para el movimiento de un sistema vibratorio amortiguado sometido a una fuerza oscilatoria externa también se llama **solución de estado permanente**. El movimiento se aproxima a la solución de estado permanente al aumentar el tiempo (véase el Ej. 10.5).

En la Fig. 10.15 ilustramos los efectos del amortiguamiento y la frecuencia de la función de excitación sobre la amplitud de la solución particular. Dibujamos la expresión adimensional $\omega^2 E_p \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$ como función de ω_0/ω para varios valores del parámetro d/ω. Cuando no hay amortiguamiento ($d = 0$), la amplitud de la solución particular tiende al infinito cuando la frecuencia circular ω_0 de la función de excitación tiende a la frecuencia circular natural ω. Cuando el amortiguamiento es pequeño, la amplitud de la solución particular tiende a un valor máximo finito para un valor de ω_0 menor que ω. La frecuencia a la que la amplitud de la solución particular es máxima se llama **frecuencia de resonancia**.

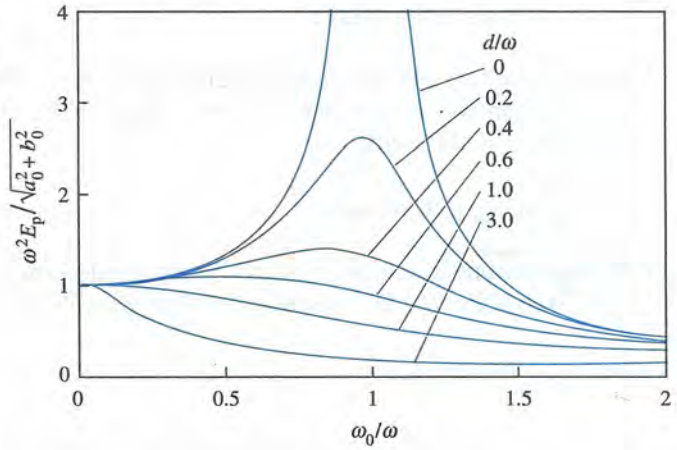


Figura 10.15
Amplitud de la solución particular (estado permanente) en función de la frecuencia de la función de excitación.

El fenómeno de resonancia es común en la vida diaria. Por ejemplo, cuando la rueda de un auto está desbalanceada, se perciben las vibraciones resultantes cuando el auto se mueve a cierta velocidad. A tal velocidad, las ruedas giran a la frecuencia de resonancia de la suspensión del auto. La resonancia es de importancia práctica en muchas aplicaciones, ya que fuerzas oscilatorias relativamente pequeñas pueden ocasionar grandes amplitudes de vibración que generan daños o interfieren con el funcionamiento de un sistema. El ejemplo clásico es el de un grupo de soldados marchando sobre un puente. Si el paso común de ellos coincide con una de las frecuencias de resonancia del puente, éste se puede dañar aun cuando pueda soportar con seguridad el peso de ellos.

Función de excitación polinomial

Supongamos que la función de excitación $a(t)$ de la Ec. (10.26) es una función polinomial del tiempo:

$$a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_N t^N,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_N$ son constantes dadas. Esta función de excitación es importante en las aplicaciones porque muchas funciones se pueden apro-

ximar con polinomios en un intervalo dado de tiempo. En este caso, obtenemos la solución particular de la Ec. (10.26) buscando una solución de la misma forma:

$$x_p = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_N t^N, \tag{10.32}$$

donde A_0, A_1, A_2,..., A_N son constantes por determinar.

Por ejemplo, si $a(t) = a_0 + a_1 t$, la Ec. (10.26) es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2d\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = a_0 + a_1 t, \tag{10.33}$$

y buscamos una solución particular de la forma $x_p = A_0 + A_1 t$. Sustituyendo esta solución en la Ec. (10.33), podemos escribir la ecuación resultante como

$$(2dA_1 + \omega^2 A_0 - a_0) + (\omega^2 A_1 - a_1)t = 0.$$

Esta ecuación se puede satisfacer en un intervalo de tiempo sólo si

$$2dA_1 + \omega^2 A_0 - a_0 = 0$$

y

$$\omega^2 A_1 - a_1 = 0.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones encontramos A_0 y A_1, y obtenemos la solución particular:

$$x_p = (a_0 - 2da_1/\omega^2 + a_1 t)/\omega^2.$$

Se puede comprobar que ésta es una solución particular sustituyéndola en la Ec. (10.33).

En los siguientes ejemplos analizamos vibraciones forzadas de sistemas de un grado de libertad. Después de expresar la ecuación del movimiento del sistema en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2d\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = a(t),$$

se deben determinar las soluciones homogénea y particular. Las formas de la solución homogénea se dan en la Sec. 10.2.

Ejemplo 10.5

Un ingeniero que diseña un sistema aislante de vibraciones para la consola de un instrumento modela ésta y el sistema de aislamiento por medio del oscilador resorte-masa amortiguado de la Fig. 10.14(a) con masa $m = 2$ kg, $k = 8$ N/m y $c = 1$ N-s/m. Para determinar la respuesta del sistema a vibraciones externas, él supone que la masa está inicialmente en reposo con el resorte sin estirar, y que en $t = 0$ se aplica a la masa la fuerza

$$F(t) = 20 \operatorname{sen} 4t \text{ N}.$$

(a) ¿Cuál es la amplitud de la solución particular (estado permanente)?
(b) ¿Cuál es la posición de la masa en función del tiempo?

ESTRATEGIA

La función de excitación es $a(t) = F(t)/m = 10 \operatorname{sen} 4t$ m/s^2, que es una función oscilatoria de la forma de la Ec. (10.27) con $a_0 = 10$ m/s^2, $b_0 = 0$ y $\omega_0 = 4$ rad/s. La amplitud de la solución particular está dada por la Ec. (10.31) y la solución particular por la Ec. (10.30). También debemos determinar si el amortiguamiento es subcrítico, crítico o supercrítico y escoger la forma apropiada de la solución homogénea.

SOLUCIÓN

(a) La frecuencia circular natural del sistema no amortiguado es $\omega = \sqrt{k/m} = 2$ rad/s y la constante $d = c/(2m) = 0.25$ rad/s. Por tanto, la amplitud de la solución particular es

$$E_p = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4d^2\omega_0^2}} = \frac{10}{\sqrt{[(2)^2 - (4)^2]^2 + 4(0.25)^2(4)^2}}$$

$$= 0.822 \text{ m}.$$

(b) Como $d < \omega$, el sistema está subcríticamente amortiguado y la solución homogénea está dada por la Ec. (10.19). La frecuencia circular del sistema amortiguado es $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - d^2} = 1.98$ rad/s, por lo que la solución homogénea es

$$x_h = e^{-0.25t}(A \operatorname{sen} 1.98t + B \cos 1.98t).$$

De la Ec. (10.30), la solución particular es

$$x_p = -0.811 \operatorname{sen} 4t - 0.135 \cos 4t,$$

y la solución completa es

$$x = x_h + x_p$$

$$= e^{-0.25t}(A \operatorname{sen} 1.98t + B \cos 1.98t) - 0.811 \operatorname{sen} 4t - 0.135 \cos 4t.$$

En $t = 0$, $x = 0$ y $dx/dt = 0$. Usando estas condiciones para determinar las constantes A y B, obtenemos $A = 1.651$ m y $B = 0.135$ m. La posición de la masa en función del tiempo es

$$x = e^{-0.25t}(1.651 \operatorname{sen} 1.98t + 0.135 \cos 1.98t)$$

$$- 0.811 \operatorname{sen} 4t - 0.135 \cos 4t \text{ m}.$$

La Fig. 10.16 muestra las soluciones homogénea, particular y completa para los primeros 25 segundos del movimiento. La solución completa tiene una fase inicial "transitoria" debido a la parte homogénea de la solución. Conforme la solución homogénea se atenúa, la solución completa tiende a la solución particular o de estado permanente.

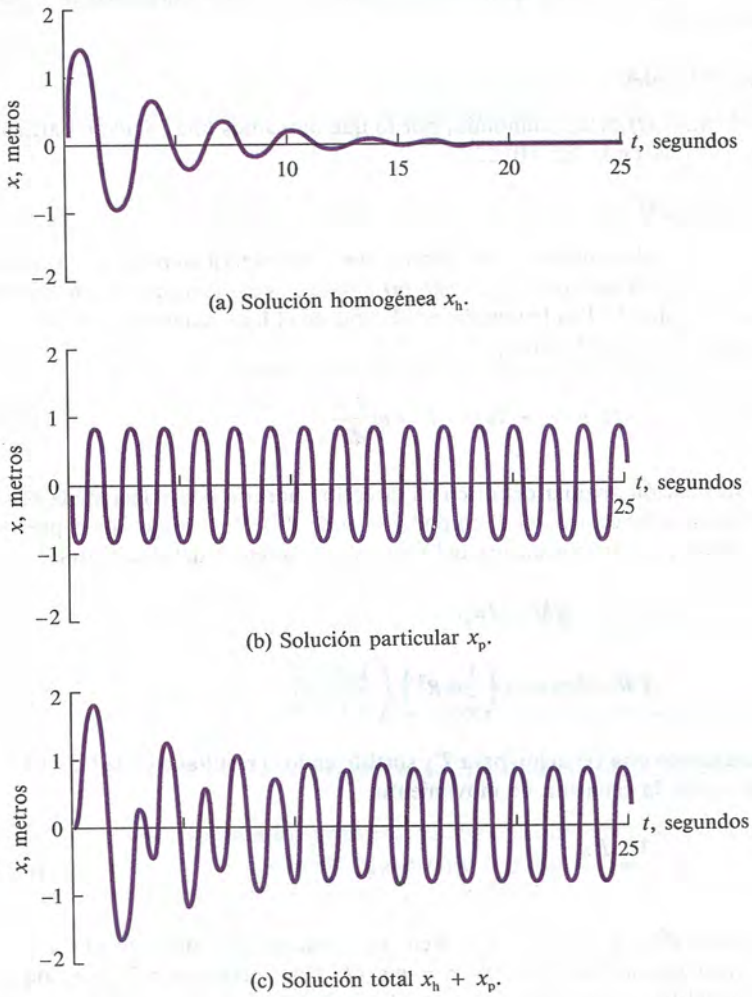


Figura 10.16
Soluciones homogénea, particular y completa.

Ejemplo 10.6

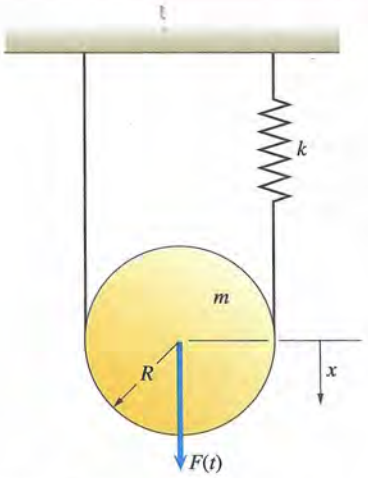


Figura 10.17

El disco homogéneo de la Fig. 10.17 tiene radio $R = 2$ pies y masa $m = 4$ slugs. $k = 30$ lb/pie. El disco está inicialmente en reposo en su posición de equilibrio, y en $t = 0$ se aplica al centro del disco una fuerza hacia abajo $F(t) = 12 + 12t - 0.6t^2$ lb. Determine la posición del centro del disco en función del tiempo.

ESTRATEGIA

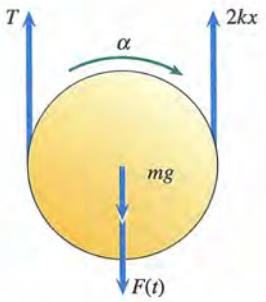
La fuerza $F(t)$ es un polinomio, por lo que buscamos una solución particular de la forma de la Ec. (10.32).

SOLUCIÓN

Sea x el desplazamiento del centro del disco respecto a su posición cuando el resorte no está estirado. En la Fig. (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre del disco, donde T es la tensión en el cable en el lado izquierdo del disco. De la segunda ley de Newton,

$$F(t) + mg - 2kx - T = m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{10.34}$$

La aceleración angular del disco en dirección horaria está relacionada con la aceleración del centro del disco por $\alpha = (d^2x/dt^2)/R$. Usando esta expresión, podemos escribir la ecuación del movimiento angular del disco como



(a) Diagrama de cuerpo libre del disco.

$$\Sigma M = I\alpha:$$

$$TR - 2kxR = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{1}{R}\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Resolviendo esta ecuación para T y sustituyendo el resultado en la Ec. (10.34), obtenemos la ecuación de movimiento

$$\frac{3}{2}m\frac{d^2x}{dt^2} + 4kx = F(t) + mg. \tag{10.35}$$

Haciendo $d^2x/dt^2 = 0$ y $F(t) = 0$ en esta ecuación, encontramos que la posición de equilibrio del disco es $x = mg/4k$. Con referencia a la posición del centro del disco respecto a su posición de equilibrio, $\tilde{x} = x - mg/4k$, la ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \frac{8k}{3m}\tilde{x} = \frac{2F(t)}{3m}.$$

Esta ecuación es idéntica en forma a la Ec. (10.26). Sustituyendo los valores de k y m y la función polinomial $F(t)$, obtenemos

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + 20\tilde{x} = 2 + 2t - 0.1t^2. \tag{10.36}$$

Comparando esta ecuación con la Ec. (10.26), vemos que $d = 0$ (no hay amortiguamiento) y $\omega^2 = 20$ (rad/s)^2. De la Ec. (10.19), la solución homogénea es

$$\tilde{x}_h = A \operatorname{sen} 4.472t + B \cos 4.472t.$$

Para obtener la solución particular, buscamos una solución en la forma de un polinomio del mismo orden que $F(t)$:

$$\tilde{x}_p = A_0 + A_1 t + A_2 t^2,$$

donde A_0, A_1 y A_2 son constantes por determinar. Sustituimos esta expresión en la Ec. (10.36) y agrupamos los términos de igual potencia de t:

$$(2A_2 + 20A_0 - 2) + (20A_1 - 2)t + (20A_2 + 0.1)t^2 = 0.$$

Esta ecuación se satisface si los coeficientes de cada potencia igual de t se igualan a cero:

$$2A_2 + 20A_0 = 2,$$

$$20A_1 = 2,$$

$$20A_2 = -0.1.$$

Resolviendo estas tres ecuaciones para A_0, A_1 y A_2 obtenemos la solución particular:

$$\tilde{x}_p = 0.101 + 0.100t - 0.005t^2.$$

La solución completa es

$$\tilde{x} = \tilde{x}_h + \tilde{x}_p$$

$$= A \operatorname{sen} 4.472t + B \cos 4.472t + 0.101 + 0.100t - 0.005t^2.$$

En $t = 0$, $\tilde{x} = 0$ y $d\tilde{x}/dt = 0$. Usando estas condiciones para determinar A y B, obtenemos la posición del centro del disco en función del tiempo:

$$\tilde{x} = -0.022 \operatorname{sen} 4.47t - 0.100 \cos 4.47t + 0.101 + 0.100t - 0.005t^2.$$

La posición se muestra para los primeros 30 segundos de movimiento en la Fig. 10.18. Se puede ver la solución homogénea oscilatoria no amortiguada superpuesta a la solución particular que varía lentamente.

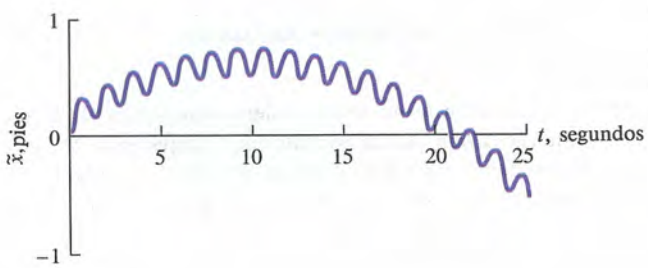


Figura 10.18
Posición del centro del disco en función del tiempo.

Ejemplo 10.7

Aplicación a la ingeniería

Transductores de desplazamiento

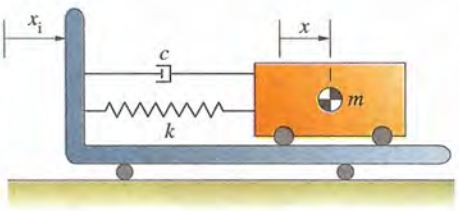


Figura 10.19

Para medir el desplazamiento de un cuerpo se puede usar un oscilador resorte-masa amortiguado, *o un dispostivo que se pueda modelar como ese tipo de oscilador*. Supongamos que la base del oscilador de la Fig. 10.19 está unida a un cuerpo, la coordenada x_i es un desplazamiento por medir respecto a un marco de referencia inercial, y x mide el desplazamiento de la masa *respecto a la base*. Si $x = 0$, el resorte no está estirado. Suponga que el sistema está inicialmente en reposo y que en $t = 0$ la base se somete al movimiento oscilatorio

$$x_i = a_i \operatorname{sen} \omega_i t + b_i \cos \omega_i t. \tag{10.37}$$

Si $m = 2$ kg, $k = 8$ N/m, $c = 4$ N-s/m, $a_i = 0.1$ m, $b_i = 0.1$ m y $\omega_i = 10$ rad/s, ¿cuál es la amplitud de estado permanente resultante del desplazamiento de la masa respecto a la base?

SOLUCIÓN

La aceleración de la masa respecto a la base es d^2x/dt^2, por lo que su aceleración respecto al marco de referencia inercial es $(d^2x/dt^2) + (d^2x_i/dt^2)$. La segunda ley de Newton para la masa es

$$-c\frac{dx}{dt} - kx = m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x_i}{dt^2}\right).$$

Podemos escribir esta ecuación como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2d\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = a(t),$$

donde $d = c/2m = 1$ rad/s, $\omega = \sqrt{k/m} = 2$ rad/s, y la función $a(t)$ es

$$a(t) = -\frac{d^2x_i}{dt^2} = a_i\omega_i^2 \operatorname{sen} \omega_i t + b_i\omega_i^2 \cos \omega_i t. \tag{10.38}$$

Así, obtenemos una ecuación de movimiento idéntica en forma a la del oscilador resorte-masa sometido a una fuerza oscilatoria. Comparando la Ec. (10.38) con la Ec. (10.27) obtenemos la amplitud de la solución particular (estado permanente) a partir de la Ec. (10.31) haciendo $a_0 = a_i\omega_i^2$, $b_0 = b_i\omega_i^2$ y $\omega_0 = \omega_i$:

$$E_p = \frac{\omega_i^2\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + 4d^2\omega_i^2}}. \tag{10.39}$$

Por tanto, la amplitud del estado permanente del desplazamiento de la masa respecto a su base es

$$E_p = \frac{(10)^2\sqrt{(0.1)^2 + (0.1)^2}}{\sqrt{[(2)^2 - (10)^2]^2 + 4(1)^2(10)^2}} = 0.144 \text{ m}.$$

CONSIDERACIONES DE DISEÑO

Un micrófono transforma las ondas de sonido en un voltaje variable que se puede registrar o convertir de nuevo en ondas sonoras por medio de una bocina. Un dispositivo que transforma una entrada mecánica en una salida electromagnética, o una entrada electromagnética en una salida mecánica, se llama **transductor**. Los transductores se pueden usar para medir desplazamientos, velocidades y aceleraciones transformándolas en voltajes o corrientes medibles.

En el caso del oscilador de la Fig. 10.19, x_i es el desplazamiento por medir, o sea la entrada. Se puede usar un transductor para medir el desplazamiento x de la masa respecto a la base, o sea, la salida. Si se conoce la relación entre la entrada y la salida, se puede determinar el desplazamiento x_i. Algunos sismógrafos (Fig. 10.20) miden de esta manera los movimientos de la Tierra.

Si la entrada es un desplazamiento oscilatorio dado por la Ec. (10.37), la amplitud de la salida está dada por la Ec. (10.39). Podemos escribir ésta como

$$\frac{E_p}{E_i} = \frac{(\omega_i/\omega)^2}{\sqrt{[1-(\omega_i/\omega)^2]^2 + 4(d/\omega)^2(\omega_i/\omega)^2}},$$

donde $E_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ es la amplitud de la entrada. En la Fig. 10.21 mostramos la razón E_p/E_i en función de la razón de la frecuencia de entrada a la frecuencia natural del sistema no amortiguado, ω_i/ω, para diferentes valores de d/ω. Si se conocen los parámetros del oscilador, una gráfica de este tipo sirve para determinar la amplitud de la entrada midiendo la de la salida.

En la práctica, el desplazamiento de entrada no suele tener una sola frecuencia, sino que consiste en una combinación de diferentes frecuencias o aun de un *espectro* continuo de frecuencias. Por ejemplo, los desplazamientos que resultan de los sismos tienen un espectro de frecuencias. En ese caso, es deseable que la razón de la amplitud de salida a la amplitud de entrada sea aproximadamente igual a 1 en el intervalo de las frecuencias de entrada. Se dice entonces que la respuesta del instrumento es "plana". En la Fig. 10.21 se ve que la respuesta es aproximadamente plana para frecuencias ω_i mayores que aproximadamente 2ω si el amortiguamiento del sistema se escoge de modo que d/ω quede en el intervalo de 0.6 a 0.7. Además, observe que haciendo pequeña a la frecuencia natural ω aumenta el intervalo de frecuencias de entrada sobre el cual la respuesta del instrumento es plana. Por esta razón, los sismógrafos suelen diseñarse con grandes masas y resortes relativamente débiles.

Figura 10.20
Sismógrafo que mide el desplazamiento local del terreno.

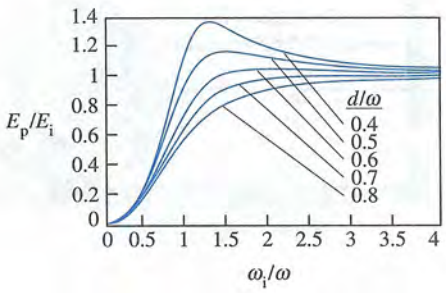
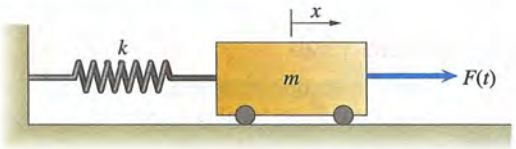


Figura 10.21
Razón de la amplitud de salida a la amplitud de entrada.

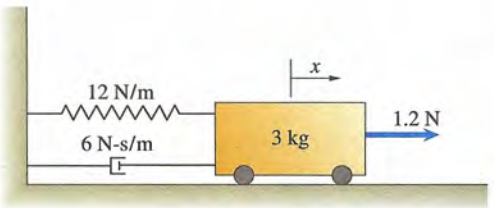
Problemas

10.56 En la Fig. P10.56 la masa $m = 2$ slug y $k = 200$ lb/pie. Sea x la posición de la masa respecto a su posición cuando el resorte no está estirado. La fuerza $F(t) = 36$ sen $8t$ lb.
(a) Determine la solución particular.
(b) En $t = 0$, $x = 1$ pie y la velocidad de la masa es cero. Determine x en función del tiempo.



P10.56

10.57 En la Fig. P10.57, el oscilador resorte-masa amortiguado está inicialmente en reposo con el resorte no estirado. En $t = 0$ se le aplica una fuerza constante de 1.2 N a la masa.
(a) ¿Cuál es la solución (particular) de estado permanente?
(b) Determine la posición de la masa en función del tiempo.



P10.57

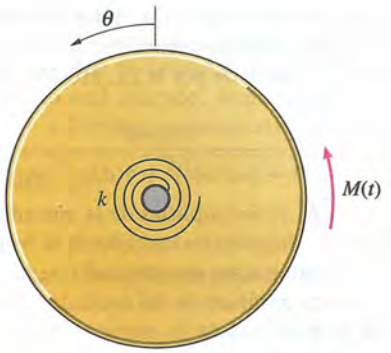
10.58 Un disco con momento de inercia I gira respecto a un eje fijo y está conectado a un resorte torsional con constante k. El ángulo θ mide la posición angular del disco respecto a su posición cuando el resorte no está estirado. El disco está inicialmente en reposo con el resorte no estirado. En $t = 0$, se aplica al disco el momento $M(t) = M_0(1 - e^{-t})$, donde M_0 es una constante. Demuestre que la posición angular del disco en función del tiempo es

$$\theta = \frac{M_0}{I}\left[-\frac{1}{\omega(1+\omega^2)}\operatorname{sen}\omega t - \frac{1}{\omega^2(1+\omega^2)}\cos\omega t + \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(1+\omega^2)}e^{-t}\right].$$

Estrategia: Para determinar la solución particular, busque una solución de la forma

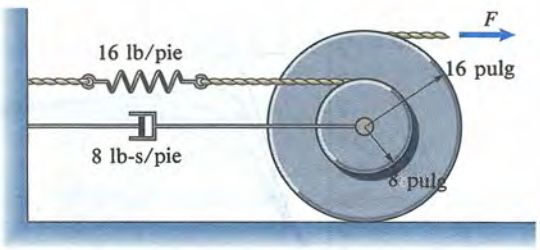
$$\theta_p = A_p + B_p e^{-t},$$

donde A_p y B_p son constantes por determinar.



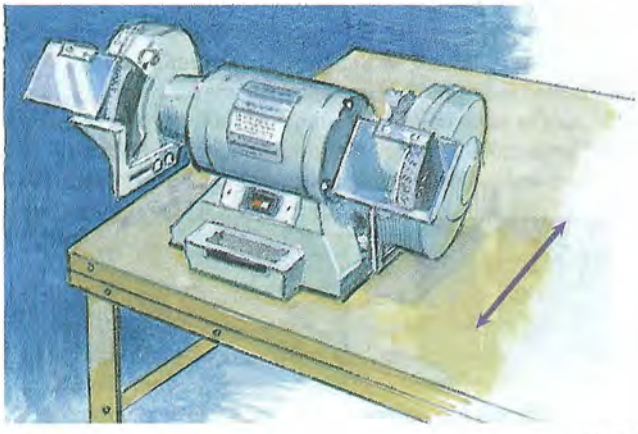
P10.58

10.59 El disco escalonado de la figura pesa 20 lb y su momento de inercia es $I = 0.6$ slug-pie^2. Rueda sobre la superficie horizontal. El disco está inicialmente en reposo con el resorte sin estirar. En $t = 0$ se le aplica una fuerza constante $F = 10$ lb como se muestra. Determine la posición del centro del disco en función del tiempo.



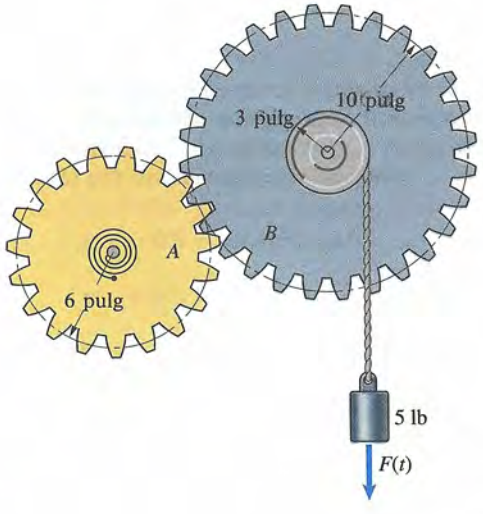
P10.59

10.60 Un motor eléctrico está atornillado a una mesa. Con el motor encendido, la mesa vibra horizontalmente. Suponga que las patas de la mesa se comportan como resortes lineales e ignore el amortiguamiento. El peso total del motor y la mesa es de 150 lb. Con el motor apagado, la frecuencia de la vibración horizontal de la mesa y el motor es de 5 Hz. Con el motor girando a 600 rpm, la amplitud de la vibración horizontal es de 0.01 pulg. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza oscilatoria ejercida sobre la mesa por el motor a esta velocidad?



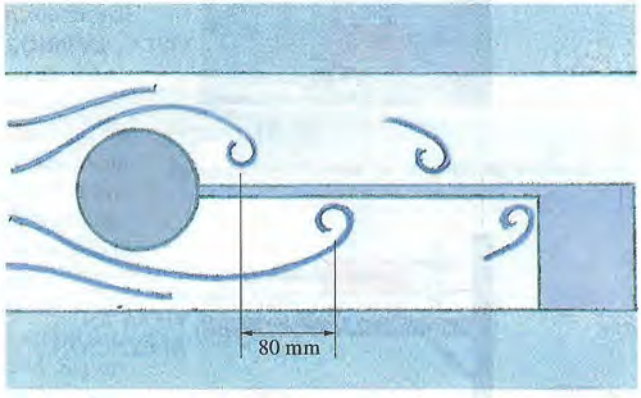
P10.60

10.61 Los momentos de inercia de los engranes A y B mostrados son $I_A = 0.014$ slug-pie^2 e $I_B = 0.100$ slug-pie^2. A está conectado a un resorte torsional con $k = 2$ pie-lb/rad. El sistema está en equilibrio en $t = 0$ cuando se le somete a una fuerza oscilatoria $F(t) = 4$ sen $3t$ lb. ¿Cuál es el desplazamiento hacia abajo del peso de 5 lb en función del tiempo?



P10.61

10.62 Un cilindro de 1.5 kg está montado sobre una barra en un túnel de viento con su eje transversal a la dirección del flujo. Sin flujo, una fuerza vertical de 10 N aplicada al cilindro lo deflexiona 0.15 mm. Con flujo de aire en el túnel, los vórtices someten al cilindro a fuerzas laterales alternantes. La velocidad del aire es de 5 m/s, la distancia entre vórtices es de 80 mm y la magnitud de las fuerzas laterales es de 1 N. Si las fuerzas laterales se modelan con la función oscilatoria $F(t) = (1.0)$ sen $\omega_0 t$ N, ¿cuál es la amplitud del movimiento lateral de estado permanente del cilindro?



P10.62

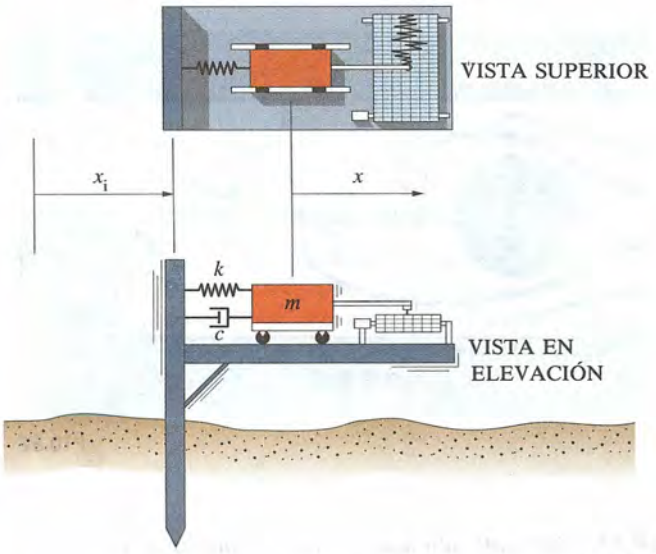
10.63 Demuestre que la amplitud de la solución particular dada por la Ec. (10.31) es máxima cuando la frecuencia de la función de excitación es $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - 2d^2}$.

Los Probs. 10.64 a 10.67 están relacionados con el Ej. 10.7.

10.64 En la Fig. 10.19 la masa pesa 50 lb. $k = 200$ lb/pie y $c = 10$ lb-s/pie. Si la base está sometida a un desplazamiento oscilatorio x_i con amplitud de 10 pulg y frecuencia circular $\omega_i = 15$ rad/s, ¿cuál es la amplitud resultante de estado permanente del desplazamiento de la masa respecto a la base?

10.65 La masa de la Fig. 10.19 es de 100 kg. $k = 4$ N/m y $c = 24$ N-s/m. La base está sometida a un desplazamiento oscilatorio de frecuencia circular $\omega_i = 0.2$ rad/s. La amplitud de estado permanente del desplazamiento de la masa respecto a la base se mide y se obtiene el valor de 200 mm. ¿Cuál es la amplitud del desplazamiento de la base?

10.66 La coordenada x_i del sismógrafo mostrado mide el movimiento local horizontal del suelo. La coordenada x_i mide la posición de la masa respecto al marco del sismógrafo. El resorte no está estirado cuando $x = 0$. La masa $m = 1$ kg, $k = 10$ N/m y $c = 2$ N-s/m. Suponga que el sismógrafo está inicialmente en reposo y que en $t = 0$ se somete a un movimiento oscilatorio del terreno $x_i = 10$ sen $2t$ mm. ¿Cuál es la amplitud de la respuesta de estado permanente de la masa?

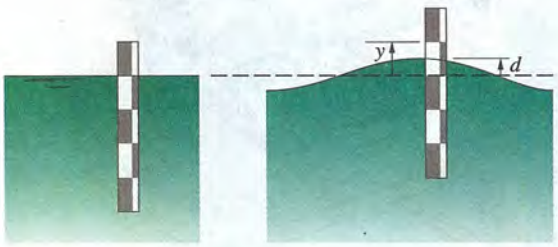


P10.66

10.67 En el Prob. 10.66, determine la posición x de la masa respecto a la base en función del tiempo.

10.68 Una boya acústica flota en un tanque. Es un cilindro de masa m con área transversal A. La densidad del agua es ρ y la fuerza de flotación que soporta a la boya es igual al peso del agua que ocuparía el volumen de la parte del cilindro bajo la superficie. Cuando el agua del tanque está en reposo, la boya está en equilibrio en la posición vertical mostrada. Se generan olas en el tanque, ocasionando que la profundidad del agua en la posición de la boya *respecto a su profundidad original* sea $d = d_0$ sen $\omega_0 t$. Sea y la posición vertical de la boya respecto a su posición original. Demuestre que la posición vertical está dada por la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{A\rho g}{m}\right) y = \left(\frac{A\rho g}{m}\right) d_0 \operatorname{sen} \omega_0 t.$$



P10.68

10.69 Suponga que la masa de la boya del Prob. 10.68 es $m = 10$ kg, su diámetro es de 125 mm y la densidad del agua $\rho = 1025$ kg/m^3. Si la profundidad del agua es $d = 0.1$ sen $2t$ m, ¿cuál es la magnitud de las vibraciones verticales de estado permanente de la boya?

Ejemplo con computador

El material de esta sección está diseñado para el uso de una calculadora programable o de un computador.

En la Sec. 10.1 dedujimos la ecuación de movimiento de un péndulo formado por una barra esbelta (Fig. 10.22), y obtuvimos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2l}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{10.40}$$

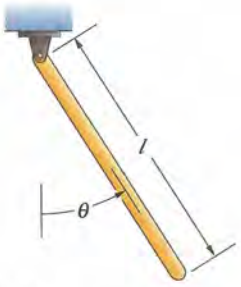


Figura 10.22
Péndulo en forma de una barra esbelta.

Suponiendo que las vibraciones eran bastante pequeñas para considerar sen $\theta = \theta$, obtuvimos la ecuación para un oscilador resorte-masa. Sin embargo, si las vibraciones no son pequeñas, no podemos hacer lineal la ecuación del movimiento. ¿Cómo podemos entonces determinar el movimiento del péndulo?

Cuando los sistemas están sometidos a vibraciones de gran amplitud, las ecuaciones diferenciales que describen sus movimientos no son lineales. Aunque existe una solución analítica de la Ec. (10.40), casi nunca se puede obtener soluciones cerradas para tales ecuaciones. Aun cuando sea posible obtener una solución analítica para el sistema sin excitación, éste puede estar sometido a fuerzas demasiado complejas para obtener una solución cerrada.

Podemos obtener por integración numérica soluciones aproximadas a tales problemas. Consideremos una ecuación de movimiento lo bastante general para incluir a la mayoría de los sistemas vibratorios de un grado de libertad. Supongamos que la aceleración es función de la velocidad, la posición y el tiempo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Si $v = dx/dt$, podemos expresar las ecuaciones que rigen al sistema como dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= f(t, x, v). \end{aligned} \tag{10.41}$$

Usando el método de Euler aproximaremos los valores de x y v como funciones del tiempo. Suponiendo que en cierto tiempo t_0 conocemos los valores $x(t_0)$ y $v(t_0)$, determinamos sus valores en $t_0 + \Delta t$ aproximando las derivadas en las Ecs. (10.41) por diferencias hacia adelante:

$$\begin{aligned} x(t_0 + \Delta t) &= x(t_0) + v(t_0)\Delta t, \\ v(t_0 + \Delta t) &= v(t_0) + f(t_0, x(t_0), v(t_0))\Delta t. \end{aligned}$$

Repetimos el procedimiento usando $x(t_0 + \Delta t)$ y $v(t_0 + \Delta t)$ como condiciones iniciales para determinar los valores de x y v en $t_0 + 2\Delta t$, etcétera. De esta manera, podemos determinar la posición y su razón de cambio como funciones del tiempo para un sistema con un grado de libertad.

Ejemplo 10.8

El péndulo de la Fig. 10.22 tiene 1 m de largo y se libera del reposo con un desplazamiento inicial θ_0. Determine θ en función del tiempo entre $t = 0$ y $t = 4$ s para los casos $\theta_0 = 2°$, 45° y 90°.

SOLUCIÓN

Expresamos la ecuación del movimiento del péndulo, Ec. (10.40), como dos ecuaciones de primer orden de la misma forma que las Ecs. (10.41):

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3g}{2l}\operatorname{sen}\theta.$$

Consideremos el caso $\theta_0 = 45°$ y sea $\Delta t = 0.01$ s. En $t_0 = 0$, $\theta(t_0) = 45° = 0.7854$ rad y $\omega(t_0) = 0$. En el tiempo $t_0 + \Delta t = 0.01$ s, el ángulo es

$$\theta(t_0 + \Delta t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)\Delta t :$$

$$\theta(0.01) = \theta(0) + \omega(0)\Delta t$$

$$= 0.7854 + (0)(0.01) = 0.7854 \text{ rad.}$$

La velocidad angular es

$$\omega(t_0 + \Delta t) = \omega(t_0) + \left[-\frac{3g}{2l}\operatorname{sen}(\theta(t_0))\right]\Delta t :$$

$$\omega(0.1) = 0 - \frac{(3)(9.81)}{(2)(1)}\operatorname{sen}(0.7854)(0.01) = -0.1041 \text{ rad/s.}$$

Usando estos valores como condiciones iniciales para el siguiente incremento, el ángulo y la velocidad angular en $t = 0.02$ s son

$$\theta(0.02) = 0.7854 + (-0.1041)(0.01) = 0.7844 \text{ rad,}$$

$$\omega(0.02) = -0.1041 - \frac{(3)(9.81)}{(2)(1)}\operatorname{sen}(0.7854)(0.01) = -0.2081 \text{ rad/s.}$$

Continuando de esta manera, obtenemos los siguientes valores para los primeros cinco incrementos:

Tiempo, s	θ, rad	ω, rad/s
0.00	0.7854	0.0000
0.01	0.7854	−0.1041
0.02	0.7844	−0.2081
0.03	0.7823	−0.3120
0.04	0.7792	−0.4158
0.05	0.7750	−0.5192

En la Fig. 10.23 comparamos las soluciones numéricas para el ángulo (normalizado por su valor inicial $\theta_0 = 45°$) obtenido usando $\Delta t = 0.01$ s, 0.001 s y 0.0005 s. Pruebas con intervalos de tiempo menores indican que con $\Delta t = 0.0005$ s se acerca uno bastante a la solución exacta en este intervalo de tiempo. Usando $\Delta t = 0.0005$ s obtenemos las soluciones para $\theta_0 = 2°$, 45° y 90° mostradas en la Fig. 10.24. Los resultados normalizados para las diferentes amplitudes iniciales son cualitativamente similares, pero el periodo de las vibraciones aumenta con amplitud creciente, es decir, la barra tarda más en efectuar oscilaciones mayores.

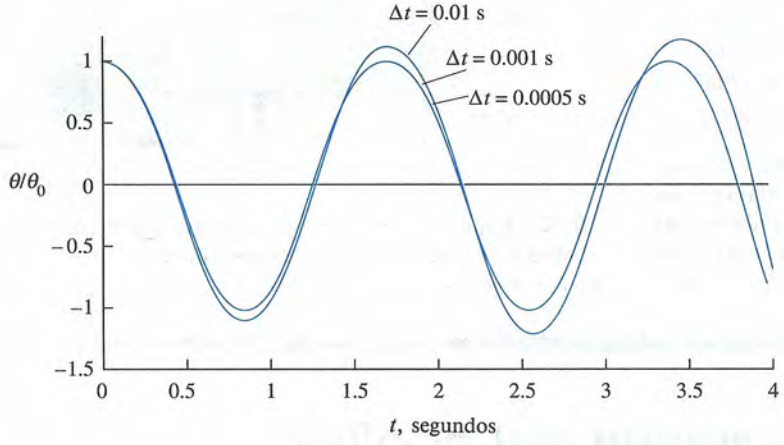


Figura 10.23
Soluciones numéricas para $\theta_0 = 45°$ usando diferentes valores de Δt.

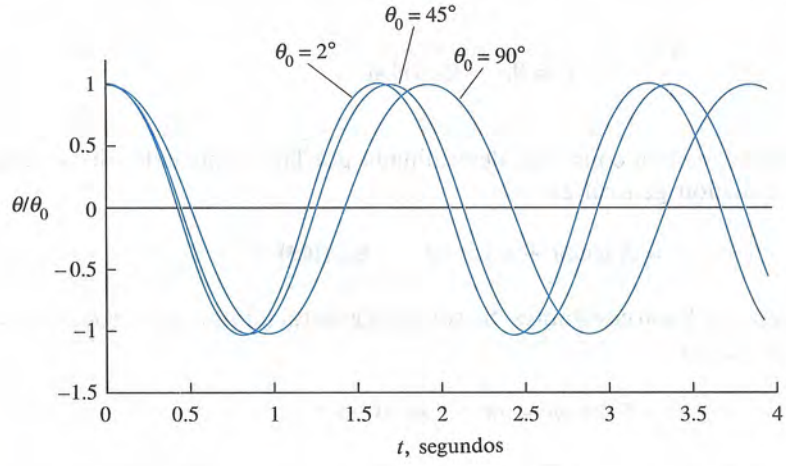


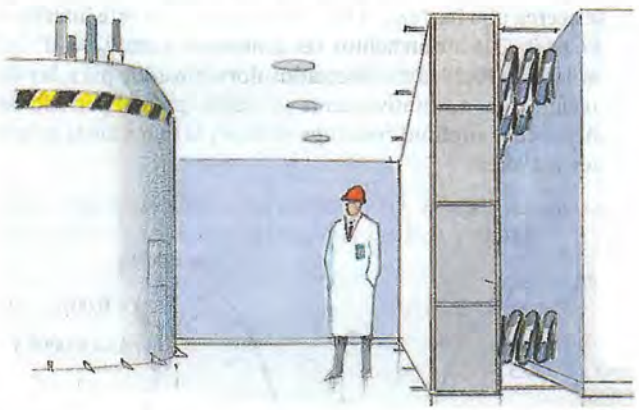
Figura 10.24
Posición de la barra en función del tiempo para diferentes desplazamientos iniciales.

Problemas

10.70 El péndulo descrito en el Ej. 10.8 se libera del reposo con $\theta_0 = 2°$. Usando $\Delta t = 0.01$ s, calcule los valores del ángulo y la velocidad angular para los cinco primeros incrementos de tiempo.

10.71 El péndulo descrito en el Ej. 10.8 se libera del reposo con $\theta_0 = 2°$. Haciendo lineal la ecuación de movimiento, obtenga la solución cerrada para el ángulo en función del tiempo. Dibuje una gráfica y compare su solución para el ángulo en grados de $t = 0$ a $t = 4$ s con la solución numérica obtenida usando $\Delta t = 0.01$ s.

10.72 En el diseño inicial de una pared de protección contra explosiones, se supone que la pared se comporta como un oscilador resorte-masa con masa de 300 slugs y constante de resorte de 10 klb/pie. La fuerza de la explosión ejercida sobre la pared se modela con la función $F = 20te^{-4t}$ klb. Usando $\Delta t = 0.001$ s, determine el desplazamiento y la velocidad de la pared para los primeros cinco incrementos de tiempo.



P10.72

10.73 Usando $\Delta t = 0.001$ s, obtenga gráficas del desplazamiento y velocidad de la pared descrita en el Prob. 10.72 de $t = 0$ a $t = 2$ s.

Resumen del capítulo

Sistemas conservativos

Las pequeñas vibraciones de muchos sistemas conservativos de un grado de libertad relativas a una posición de equilibrio están regidas por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \qquad \textbf{Ec. (10.4)}$$

donde ω es una constante determinada por las propiedades del sistema. Su solución general es

$$x = A\,\text{sen}\omega t + B\cos\omega t, \qquad \textbf{Ec. (10.5)}$$

donde A y B son constantes. Su solución general también se puede expresar en la forma

$$x = E\,\text{sen}(\omega t - \phi), \qquad \textbf{Ec. (10.6)}$$

donde las constantes E y ϕ están relacionadas con A y B por

$$A = E\cos\phi, \quad B = -E\,\text{sen}\phi. \qquad \textbf{Ec. (10.7)}$$

La **amplitud** de la vibración es

$$E = \sqrt{A^2 + B^2}. \qquad \textbf{Ec. (10.8)}$$

El **periodo** τ de la vibración es el tiempo requerido para una oscilación completa, o **ciclo**. La **frecuencia natural** f es el número de ciclos por unidad de tiempo. El periodo y la frecuencia natural están relacionados con ω por

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \text{Ec. (10.9)}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad \text{Ec. (10.10)}$$

El término $\omega = 2\pi f$ se llama **frecuencia circular natural.**

Vibraciones amortiguadas

Las pequeñas vibraciones de muchos sistemas amortiguados de un grado de libertad respecto a una posición de equilibrio están regidas por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2d\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \qquad \text{Ec. (10.16)}$$

Amortiguamiento subcrítico Si $d < \omega$, se dice que el sistema está subcríticamente amortiguado. En este caso, la solución general de la Ec. (10.16) es

$$x = e^{-dt}(A \operatorname{sen}\omega_d t + B \cos \omega_d t), \qquad \text{Ec. (10.19)}$$

donde A y B son constantes y ω_d está definida por

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - d^2}. \qquad \text{Ec. (10.18)}$$

El periodo y la frecuencia de las vibraciones amortiguadas son

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_d}, \quad f = \frac{\omega_d}{2\pi}. \qquad \text{Ec. (10.20)}$$

Amortiguamiento crítico y supercrítico Si $d > \omega$, se dice que el sistema está supercríticamente amortiguado. La solución general es

$$x = Ce^{-(d-h)t} + De^{-(d+h)t}, \qquad \text{Ec. (10.24)}$$

donde C y D son constantes y h está definida por

$$h = \sqrt{d^2 - \omega^2}. \qquad \text{Ec. (10.23)}$$

Si $d = \omega$, se dice que el sistema está críticamente amortiguado. La solución general es

$$x = Ce^{-dt} + Dte^{-dt}, \qquad \text{Ec. (10.25)}$$

donde C y D son constantes.

Vibraciones forzadas

Las vibraciones forzadas de muchos sistemas amortiguados de un grado de libertad están regidas por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2d\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = a(t), \qquad \textbf{Ec. (10.26)}$$

donde $a(t)$ es la **función de excitación**. La solución general de la Ec. (10.26) consiste en las soluciones homogénea y particular:

$$x = x_h + x_p.$$

La **solución homogénea** x_h es la solución general de la Ec. (10.26) con el segundo miembro igual a cero, y la **solución particular** x_p es una solución que satisface la Ec. (10.26).

Función de excitación oscilatoria Si $a(t)$ es una función oscilatoria de la forma

$$a(t) = a_0 \operatorname{sen}\omega_0 t + b_0 \cos\omega_0 t,$$

donde a_0, b_0 y ω_0 son constantes, la solución particular es (Ec. 10.30)

$$x_p = \left[\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)a_0 + 2d\omega_0 b_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4d^2\omega_0^2}\right]\operatorname{sen}\omega_0 t + \left[\frac{-2d\omega_0 a_0 + (\omega^2 - \omega_0^2)b_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4d^2\omega_0^2}\right]\cos\omega_0 t,$$

y su amplitud es (Ec. 10.31)

$$E_p = \sqrt{A_p^2 + B_p^2} = \frac{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4d^2\omega_0^2}}$$

La solución particular para el movimiento de un sistema amortiguado en vibración sometido a una fuerza oscilatoria externa se llama también **solución de estado permanente**. El movimiento se aproxima a la solución de estado permanente conforme aumenta el tiempo.

Función de excitación polinomial Si $a(t)$ es un polinomio de la forma

$$a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_N t^N,$$

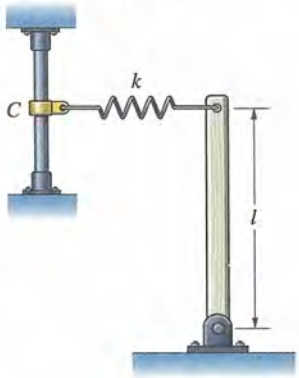
donde $a_1, a_2, \ldots, a_N$ son constantes, la solución particular se puede obtener buscando una solución de la misma forma:

$$x_p = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_N t^N, \qquad \textbf{Ec. (10.32)}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_N$ son constantes por determinar.

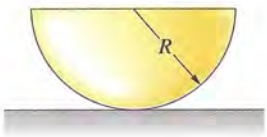
Problemas de repaso

10.74 La masa de la barra esbelta mostrada es m. El resorte no está estirado cuando la barra está en posición vertical. El collarín ligero C se desliza sobre la barra vertical lisa, quedando el resorte horizontal. Determine la frecuencia natural de las pequeñas vibraciones de la barra.



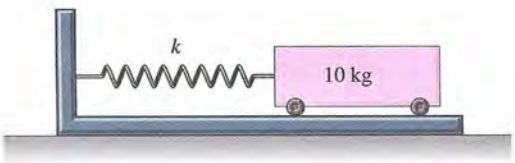
P10.74

10.75 Una semiesfera homogénea de radio R y masa m descansa sobre una superficie a nivel. Si se hace girar ligeramente desde su posición de equilibrio y se libera, ¿cuál es la frecuencia natural de sus vibraciones?



P10.75

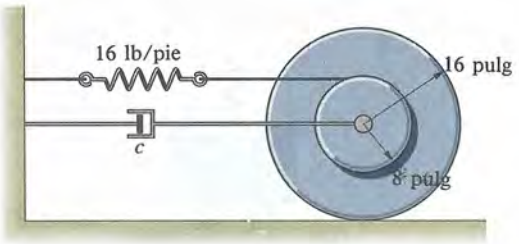
10.76 La frecuencia del oscilador resorte-masa mostrado es de 4.00 Hz. El oscilador se introduce en un barril de aceite y su frecuencia es entonces de 3.80 Hz. ¿Cuál es el decremento logarítmico de las vibraciones de la masa en tal condición?



P10.76

10.77 Considere el oscilador inmerso en aceite del Prob. 10.76. Si la masa se desplaza 0.1 m hacia la derecha de su posición de equilibrio y se libera del reposo, ¿cuál es su posición respecto a la de equilibrio en función del tiempo?

10.78 El disco escalonado pesa 20 lb y su momento de inercia es $I = 0.6$ slug-pie^2. Rueda sobre la superficie horizontal. Si $c = 8$ lb-s/pie, ¿cuál es la frecuencia de las pequeñas vibraciones del disco?

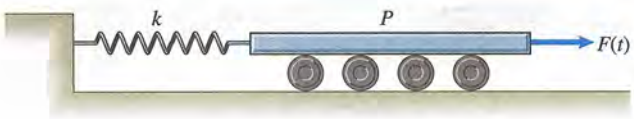


P10.78

10.79 El disco escalonado descrito en el Prob. 10.78 está inicialmente en equilibrio, y en $t = 0$ recibe una velocidad angular horaria de 1 rad/s. Determine la posición del centro del disco respecto a su posición de equilibrio en función del tiempo.

10.80 El disco escalonado del Prob. 10.78 está inicialmente en equilibrio, y en $t = 0$ tiene una velocidad angular horaria de 1 rad/s. Halle la posición del centro del disco respecto a su posición de equilibrio en función del tiempo si $c = 16$ lb-s/pie.

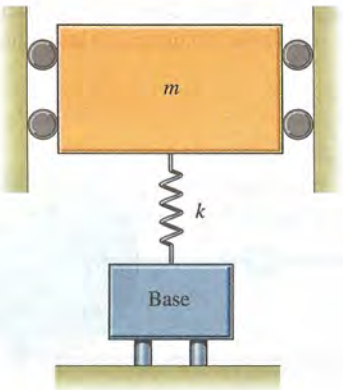
10.81 La plataforma P de 22 kg mostrada descansa sobre cuatro rodillos que se modelan como cilindros homogéneos de 1 kg con radios de 30 mm; $k = 900$ N/m. La plataforma está sometida a una fuerza $F(t) = 100 \operatorname{sen} 3t$ N. ¿Cuál es la magnitud de su vibración horizontal de estado permanente?



P10.81

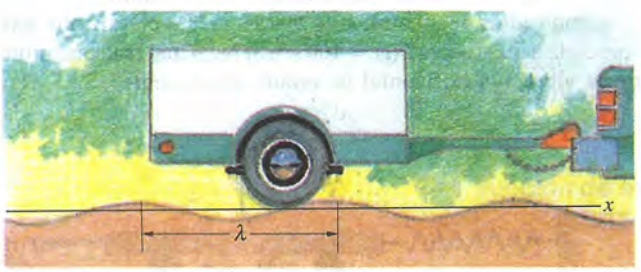
10.82 En $t = 0$, la plataforma del Prob. 10.81 está 0.1 m a la derecha de su posición de equilibrio y está moviéndose hacia la derecha a 2 m/s. Determine su posición respecto a su posición de equilibrio en función del tiempo.

10.83 La base y la masa m están inicialmente en reposo. La base se somete a un desplazamiento vertical h sen $\omega_i t$ respecto a su posición original. ¿Cuál es la magnitud de la vibración de estado permanente resultante de la masa m *respecto a la base*?



P10.83

10.84 En la Fig. P10.84 la masa del remolque, sin incluir sus ruedas y eje, es m y la constante del resorte de su suspensión es k. Para analizar el comportamiento de la suspensión, se supone que la altura de la superficie del camino respecto a su altura media es h sen$(2\pi x/\lambda)$. Suponga que las ruedas del remolque permanecen sobre el camino y que la componente horizontal de su velocidad es v. Ignore el amortiguamiento debido a los amortiguadores de la suspensión.
(a) Determine la magnitud de la vibración de estado permanente vertical del remolque *respecto a la superficie del camino*.
(b) ¿A qué velocidad v ocurrirá la resonancia?



P10.84

10.85 El remolque del Prob. 10.84, sin incluir sus ruedas y eje, pesa 1000 lb. La constante del resorte de su suspensión es $k = 2400$ lb/pie y el coeficiente de amortiguamiento de sus amortiguadores es $c = 200$ lb-s/pie. Los parámetros de la superficie del camino son $h = 2$ pulg y $\lambda = 8$ pies. La velocidad horizontal del remolque es $v = 6$ mi/h. Determine la magnitud de las vibraciones verticales de estado permanente del remolque respecto a la superficie del camino: (a) ignorando el amortiguamiento debido a los amortiguadores; (b) sin ignorar el amortiguamiento.

Apéndice A

Repaso de matemáticas

A.1 Álgebra

Ecuaciones cuadráticas

Las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logaritmos naturales

El logaritmo natural de un número real positivo x se denota con $\ln x$, y se define como el número tal que

$$e^{\ln x} = x,$$

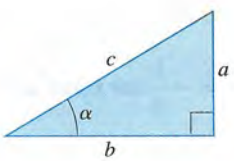
donde $e = 2.7182\ldots$ es la base de los logaritmos naturales. Los logaritmos tienen las siguientes propiedades:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y,$$

$$\ln y^x = x \ln y.$$

A.2 Trigonometría



Las funciones trigonométricas para un triángulo rectángulo son

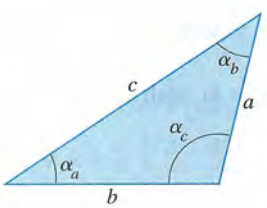
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{b}{c}, \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{a}{b}.$$

El seno y el coseno satisfacen la relación

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

y el seno y el coseno de la suma y diferencia de dos ángulos satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta,\\
\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta,\\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,\\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.
\end{aligned}$$



La **ley de los cosenos** para un triángulo cualquiera es

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha_c,$$

y la **ley de los senos** es

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_a}{a} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_b}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_c}{c}.$$

A.3 Derivadas

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

A.4 Integrales

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x$$

$$\int (a+bx)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3b}(a+bx)^{3/2}$$

$$\int x(a+bx)^{1/2}\,dx = -\frac{2(2a-3bx)(a+bx)^{3/2}}{15b^2}$$

$$\int (1+a^2x^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x(1+a^2x^2)^{1/2} + \frac{1}{a}\ln\left[x + \left(\frac{1}{a^2}+x^2\right)^{1/2}\right]\right\}$$

$$\int x(1+a^2x^2)^{1/2}\,dx = \frac{a}{3}\left(\frac{1}{a^2}+x^2\right)^{3/2}$$

$$\int x^2(1+a^2x^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{4}ax\left(\frac{1}{a^2}+x^2\right)^{3/2} - \frac{1}{8a^2}x(1+a^2x^2)^{1/2} - \frac{1}{8a^3}\ln\left[x + \left(\frac{1}{a^2}+x^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\int (1-a^2x^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x(1-a^2x^2)^{1/2} + \frac{1}{a}\operatorname{arcsen}(ax)\right]$$

$$\int x(1-a^2x^2)^{1/2}\,dx = -\frac{a}{3}\left(\frac{1}{a^2}-x^2\right)^{3/2}$$

$$\int x^2(a^2-x^2)^{1/2}\,dx = -\frac{1}{4}x(a^2-x^2)^{3/2} + \frac{1}{8}[x(a^2-x^2)^{1/2} + a^2\operatorname{arcsen}(x/a)]$$

$$\int \frac{dx}{(1+a^2x^2)^{1/2}} = \frac{1}{a}\ln\left[x + \left(\frac{1}{a^2}+x^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{2}x$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{2}x$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos x(\operatorname{sen}^2 x + 2)$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x(\cos^2 x + 2)$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\cos x\,dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$$

$$\int \tanh x\,dx = \ln\cosh x$$

A.5 Serie de Taylor

La serie de Taylor de una función $f(x)$ es

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{1}{2!}f''(a)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)x^3 + \cdots,$$

donde las primas indican derivadas.

Algunas series de Taylor útiles son

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\operatorname{sen}(a+x) = \operatorname{sen} a + (\cos a)x - \frac{1}{2}(\operatorname{sen} a)x^2 - \frac{1}{6}(\cos a)x^3 + \cdots,$$

$$\cos(a+x) = \cos a - (\operatorname{sen} a)x - \frac{1}{2}(\cos a)x^2 + \frac{1}{6}(\operatorname{sen} a)x^3 + \cdots,$$

$$\tan(a+x) = \tan a + \left(\frac{1}{\cos^2 a}\right)x + \left(\frac{\operatorname{sen} a}{\cos^3 a}\right)x^2 + \left(\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^4 a} + \frac{1}{3\cos^2 a}\right)x^3 + \cdots.$$

A.6 Análisis vectorial

Coordenadas cartesianas

El gradiente de un campo escalar ψ es

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

La divergencia y el rotacional de un campo vectorial $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ son

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Coordenadas cilíndricas

El gradiente de un campo escalar ψ es

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

La divergencia y el rotacional de un campo vectorial $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_z\mathbf{e}_z$ son

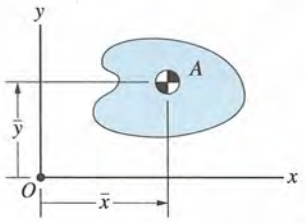
$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\theta & v_z \end{vmatrix}.$$

Apéndice B

Propiedades de áreas y líneas

B.1 Áreas



Las coordenadas del centroide del área A son

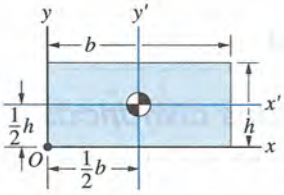
$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}.$$

El momento de inercia respecto al eje x, I_x, el momento de inercia respecto al eje y, I_y, y el producto de inercia I_{xy} son

$$I_x = \int_A y^2 dA, \qquad I_y = \int_A x^2 dA, \qquad I_{xy} = \int_A xy\,dA.$$

El momento polar de inercia respecto a O es

$$J_O = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y.$$

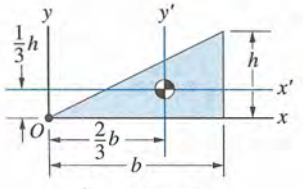


Área rectangular

$$\text{Área} = bh$$

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3, \qquad I_y = \frac{1}{3}hb^3, \qquad I_{xy} = \frac{1}{4}b^2h^2$$

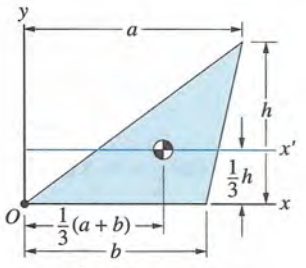
$$I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3, \qquad I_{y'} = \frac{1}{12}hb^3, \qquad I_{x'y'} = 0$$



Área triangular

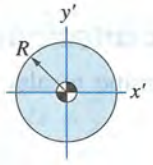
$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$$

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3, \qquad I_y = \frac{1}{4}hb^3, \qquad I_{xy} = \frac{1}{8}b^2h^2$$



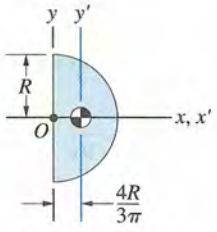
Área triangular

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh \qquad I_x \frac{1}{12}bh^3, \qquad I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$$



Área circular

$$\text{Área} = \pi R^2 \qquad I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{4}\pi R^4, \qquad I_{x'y'} = 0$$

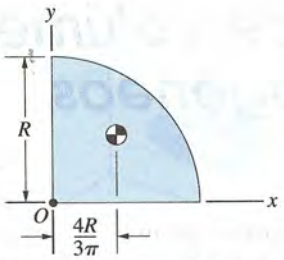


Área semicircular

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi R^4, \qquad I_{xy} = 0$$

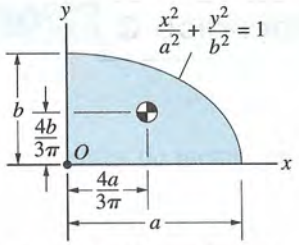
$$I_{x'} = \frac{1}{8}\pi R^4, \qquad I_{y'} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) R^4, \qquad I_{x'y'} = 0$$



Área de un cuarto de círculo

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\pi R^2$$

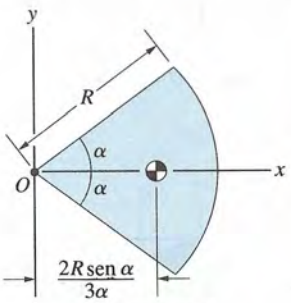
$$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi R^4, \qquad I_{xy} = \frac{1}{8}R^4$$



Área de un cuarto de elipse

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\pi ab$$

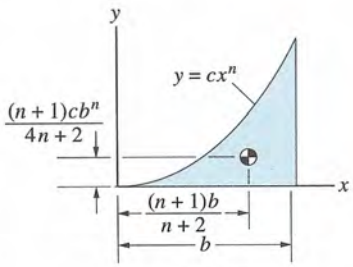
$$I_x = \frac{1}{16}\pi ab^3, \qquad I_y = \frac{1}{16}\pi a^3 b, \qquad I_{xy} = \frac{1}{8}a^2b^2$$



Sector circular

$$\text{Área} = \alpha R^2$$

$$I_x = \frac{1}{4}R^4(\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha),\ I_y = \frac{1}{4}R^4(\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha),\ I_{xy} = 0$$

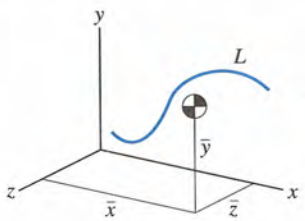


Tímpano

$$\text{Área} = \frac{cb^{n+1}}{n+1}$$

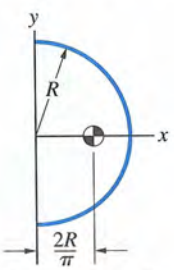
$$I_x = \frac{c^3 b^{3n+1}}{9n+3}, \qquad I_y = \frac{cb^{n+3}}{n+3}, \qquad I_{xy} = \frac{c^2 b^{2n+2}}{4n+4}$$

B.2 *Líneas*

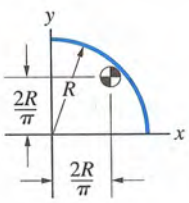


Las coordenadas del centroide de la línea L son

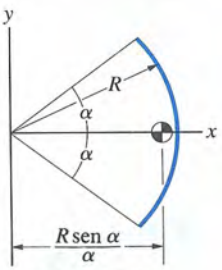
$$\bar{x} = \frac{\int_L x\,dL}{\int_L dL}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_L y\,dL}{\int_L dL}, \qquad \bar{z} = \frac{\int_L z\,dL}{\int_L dL}.$$



Arco semicircular



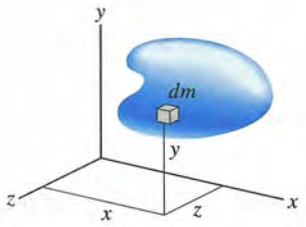
Arco de un cuarto de círculo



Arco circular

Apéndice C

Propiedades de volúmenes y cuerpos homogéneos



Los momentos de inercia de masa de los cuerpos en un sistema coordenado xyz son

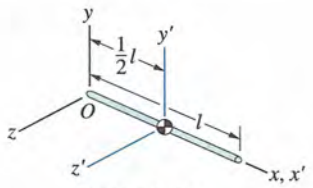
$$I_{(\text{eje } x)} = I_{xx} = \int_m (y^2 + z^2)\, dm,$$

$$I_{(\text{eje } y)} = I_{yy} = \int_m (x^2 + z^2)\, dm,$$

$$I_{(\text{eje } z)} = I_{zz} = \int_m (x^2 + y^2)\, dm,$$

$$I_{xy} = \int_m xy\, dm, \qquad I_{yz} = \int_m yz\, dm,$$

$$I_{zx} = \int_m zx\, dm.$$



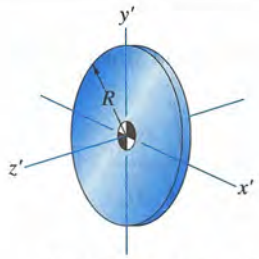
Barra esbelta

$$I_{(\text{eje } x)} = 0, \qquad I_{(\text{eje } y)} = I_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{3}ml^2,$$

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

$$I_{(\text{eje } x')} = 0, \qquad I_{(\text{eje } y')} = I_{(\text{eje } z')} = \frac{1}{12}ml^2,$$

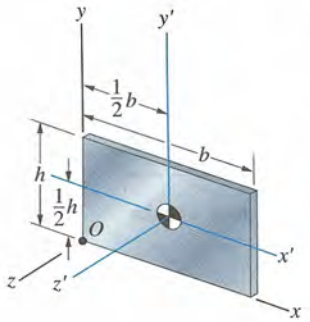
$$I_{x'y'} = I_{y'z'} = I_{z'x'} = 0.$$



Placa circular delgada

$$I_{(\text{eje } x')} = I_{(\text{eje } y')} = \frac{1}{4}mR^2, \qquad I_{(\text{eje } z')} = \frac{1}{2}mR^2,$$

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

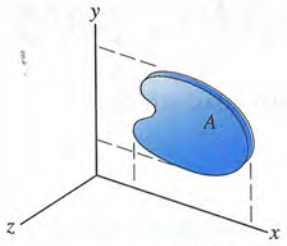


$$I_{(\text{eje } x)} = \frac{1}{3}mh^2, \qquad I_{(\text{eje } y)} = \frac{1}{3}mb^2, \qquad I_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{3}m(b^2 + h^2),$$

$$I_{xy} = \frac{1}{4}mbh, \qquad I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

$$I_{(\text{eje } x')} = \frac{1}{12}mh^2, \qquad I_{(\text{eje } y')} = \frac{1}{12}mb^2, \qquad I_{(\text{eje } z')} = \frac{1}{12}m(b^2 + h^2),$$

$$I_{x'y'} = I_{y'z'} = I_{z'x'} = 0.$$

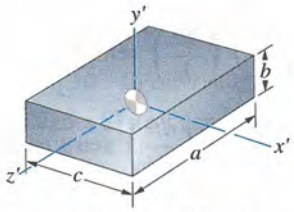


Placa delgada

$$I_{(\text{eje } x)} = \frac{m}{A} I_x^A, \qquad I_{(\text{eje } y)} = \frac{m}{A} I_y^A, \qquad I_{(\text{eje } z)} = I_{(\text{eje } x)} + I_{(\text{eje } y)}$$

$$I_{xy} = \frac{m}{A} I_{xy}^A, \qquad I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

(Los superíndices A denotan momentos de inercia del área transversal A de la placa.)

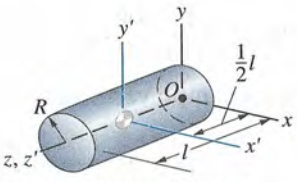


Prisma rectangular

Volumen$= abc$.

$$I_{(\text{eje } x')} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2), \qquad I_{(\text{eje } y')} = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2),$$

$$I_{(\text{eje } z')} = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2), \qquad I_{x'y'} = I_{y'z'} = I_{z'x'} = 0.$$



Cilindro circular

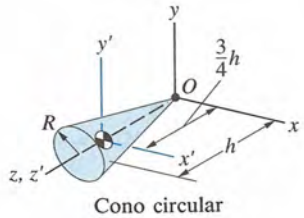
Volumen$= \pi R^2 l$.

$$I_{(\text{eje } x)} = I_{(\text{eje } y)} = m\left(\frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{4}R^2\right), \qquad I_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{2} m R^2,$$

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

$$I_{(\text{eje } x')} = I_{(\text{eje } y')} = m\left(\frac{1}{12}l^2 + \frac{1}{4}R^2\right), \qquad I_{(\text{eje } z')} = \frac{1}{2} m R^2,$$

$$I_{x'y'} = I_{y'z'} = I_{z'x'} = 0.$$



Cono circular

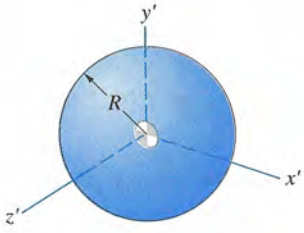
Volumen$= \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

$$I_{(\text{eje } x)} = I_{(\text{eje } y)} = m\left(\frac{3}{5}h^2 + \frac{3}{20}R^2\right), \qquad I_{(\text{eje } z)} = \frac{3}{10} m R^2,$$

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

$$I_{(\text{eje } x)} = I_{(\text{eje } y')} = m\left(\frac{3}{80}h^2 + \frac{3}{20}R^2\right), \qquad I_{(\text{eje } z')} = \frac{3}{10} m R^2.$$

$$I_{x'y'} = I_{y'z'} = I_{z'x'} = 0.$$



Esfera

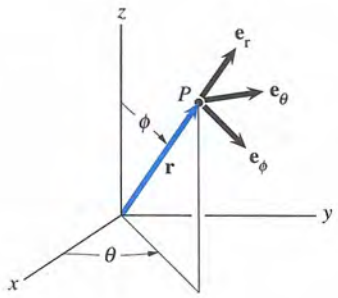
Volumen$= \frac{4}{3}\pi R^3$.

$$I_{(\text{eje } x')} = I_{(\text{eje } y')} = I_{(\text{eje } z')} = \frac{2}{5} m R^2,$$

$$I_{x'y'} = I_{y'z'} = I_{z'x'} = 0.$$

Apéndice D Coordenadas esféricas

Este apéndice resume las ecuaciones de cinemática y cálculo vectorial en coordenadas esféricas.



Los vectores de posición, de velocidad y de aceleración son

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\phi}{dt}\mathbf{e}_\phi + r\frac{d\theta}{dt}\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\operatorname{sen}^2\phi\right]\mathbf{e}_r + \left[r\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\right]\mathbf{e}_\phi + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2}\operatorname{sen}\phi + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\operatorname{sen}\phi + 2r\frac{d\phi}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\phi\right]\mathbf{e}_\theta.$$

El gradiente de un campo escalar ψ es

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta.$$

La divergencia y rotacional de un campo vectorial $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\phi\mathbf{e}_\phi$ son

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2v_r\right) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(v_\phi\operatorname{sen}\phi\right) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta},$$

$$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\phi}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\phi & r\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{e}_\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ v_r & rv_\phi & r\operatorname{sen}\phi\,v_\theta \end{vmatrix}.$$

Respuestas a los problemas pares

Capítulo 1

1.2 2.7183

1.4 0.950

1.6 (a) 36.7 pie/s; (b) 40.2 km/h.

1.8 (a) 5000 m/s; (b) 3.11 mi/s.

1.10 $g = 32.2$ pie/s^2.

1.12 0.310 m^2.

1.14 2.07×10^6 Pa.

1.16 $G = 3.44 \times 10^{-8}$ lb-pie^2/slug^2.

1.18 (a) Las unidades SI de T son kg-m^2/s^2; (b) $T = 73.8$ slug-pie^2/s^2.

1.20 51.2 lb.

1.22 (a) 491 N; (b) 81.0 N.

1.24 163 lb.

1.26 32 100 m.

1.28 4.45 N = 1 lb.

Capítulo 2

2.2 (a) $s = -0.3t + 0.15$ m. (b) $v = -0.3$ m/s.

2.4 (a) $\Delta s = 32$ pie. (b) $v = 0$, $a = 4$ pie/s^2. (c) $v = 16$ pie/s, $a = 4$ pie/s^2.

2.6 (a) $\Delta s = 132$ m. (b) $v = 28$ m/s en $t = 4$ s. (c) $a = 0$.

2.8 (a) 0.628 m/s. (b) 3.95 m/s^2.

2.10 (a) $v = 126$ pie/s en $t = 11.8$ s. (b) a 14.2 pie/s^2 en $t = 4.2$ s.

2.12 $s = 100$ m, $v = 80$ m/s.

2.14 $a = 8.07$ pie/s^2, distancia = 403 pies.

2.16 0.0273 s, $\Delta s = 1.20$ pies.

2.18 2.73 m/s.

2.20 $s = 505$ pies.

2.22 $s = 1074$ m, $a = -24$ m/s^2.

2.24 6.77 s.

2.26 Sí, el auto recorre 94.7 m en 5 s.

2.28 51.9 años solares.

2.30 (a) 45.5 s. (b) 3390.5 m.

2.32 10 s.

2.34 $v = 6.73$ pie/s, $a = -8.64$ pie/s^2.

2.36 $v = 2e^{-2t}$ m/s.

2.38 $v = 4$ pie/s.

2.40 $v = \dfrac{0.9g}{c}(1 - e^{-ct})$.

2.42 6.98 mi.

2.44 (a) $v^2 = \dfrac{g}{c}(1 - e^{-2cs})$. (b) $v^2 = 2gs$.

2.46 693 m.

2.50 $v = 3$ pie/s.

2.52 $k = 64$ m^3/s^2, $v = 2.52$ m/s.

2.54 $v = -2(1 - s^2)^{1/2}$ m/s.

2.56 $v_0 = 35\,900$ pie/s = 24 500 mi/h.

2.58 2370 m/s.

2.60 (a) $v = \pm\sqrt{v_0^2 - g_T R_T \ln(s/s_0)}$.

2.62 $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ (pies).

2.64 $x = 29.3$ m, $y = 63.3$ m, $z = -58.0$ m.

2.66 179.4 pie/s.

2.68 $\theta_0 = 45°$, $R_{máx} = v_0^2/g$.

2.70 69.3 pie/s.

2.72 (a) Sí. (b) No.

2.74 82.5 m.

2.76 $R = 18.6$ m.

2.78 $\mathbf{v} = 0.602\mathbf{i} - 4.66\mathbf{j}$ (m/s).

2.80 $v_x = 1.77$ m/s, $v_y = 2.21$ m/s, $v_z = 0.89$ m/s.

2.82 $\mathbf{a} = -0.099\mathbf{i} + 0.414\mathbf{j}$ (m/s^2).

2.86 (a) Positiva. (b) Aproximadamente 2π rad en 24 h.

2.88 $\omega = 4.54$ rad/s, $\alpha = 0.98$ rad/s^2.

2.90 (a) 27 rad/s. (b) 148.5 rad.

2.92 $\omega = \pm 2$ rad/s.

2.94 $d\mathbf{e}/dt = -8.82\mathbf{i} + 13.35\mathbf{j}$.

2.96 (a) $a_t = 0$, $a_n = 200$ m/s^2. (b) 50 rad/s.

2.98 (a) 1730 rpm. (b) 3.01 rad/s^2.

2.100 (a) $|\mathbf{v}| = 16$ pie/s, $|\mathbf{a}| = 66.0$ pie/s^2. (b) 8 pies.

2.102 $|\mathbf{v}| = 1521$ pie/s = 1037 mi/h.

2.104 $|\mathbf{v}| = 1320$ pie/s, $|\mathbf{a}| = 0.0958$ pie/s^2.

2.106 54.2 m/s^2.

2.108 (a) $|\mathbf{a}| = 45.0$ pie/s^2. (b) $|\mathbf{a}| = 59.9$ pie/s^2.

2.110 (a) $\mathbf{v} = 17.3\mathbf{e}_t$ pie/s, $\mathbf{a} = 32.2\mathbf{e}_n$ pie/s^2. (b) $\rho = 9.32$ pies.

2.112 218 m.

2.116 $\mathbf{v} = 0.212\mathbf{e}_t$ m/s, $\mathbf{a} = 0.053\mathbf{e}_t + 0.150\mathbf{e}_n$ m/s^2.

2.118 $a_t = 0$, $a_n = 0.426$ m/s^2.

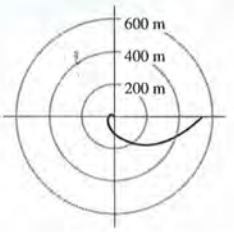
2.120 $a_t = -23.78$ pie/s^2, $a_n = 11.84$ pie/s^2.

2.122 (a) $|\mathbf{a}| = 22.36$ pie/s^2. (b) $\rho = 6.03$ pies.

2.124 $\mathbf{a} = 9\mathbf{e}_r - 8\mathbf{e}_\theta$ (m/s^2).

2.126 (a) $v_r = 0.323$ m/s, $v_\theta = 2.032$ m/s.
(b) $v_x = 0.323$ m/s, $v_y = 2.032$ m/s.

2.128 (a)



2.130 (a) $\mathbf{a} = 5.97\mathbf{e}_r - 4.03\mathbf{e}_\theta$ (m/s^2). (b) $\mathbf{a} = 7.170\mathbf{i} - 0.696\mathbf{j}$ (m/s^2).

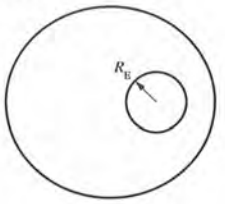
2.132 $\mathbf{v} = \sqrt{v_0^2 + (\omega_0^2 - K)(r^2 - r_0^2 - r_0^2)}\mathbf{e}_r + r\omega_0\mathbf{e}_\theta$.

2.134 $\mathbf{v} = 1047.2\mathbf{e}_\theta + 586.7\mathbf{e}_z$ pie/s, $\mathbf{a} = -219\,324.5\mathbf{e}_r$ pie/s^2.

2.136 $\mathbf{a} = -800\mathbf{e}_r$ km/s^2.

2.138 2.36×10^6 s, o 27.3 días.

2.140



2.142 $v_0 = 10.82$ km/s.

2.146 2391 m/s.

2.148 $v_2 - v_1 = 9693$ pie/s, $v_4 - v_3 = 2698$ pie/s.

2.150 $\mathbf{v}_{A/B} = -\mathbf{v}_{B/A} = -20\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ (m/s).

2.154 (a) $\mathbf{a}_{A/B} = 0$. (b) $\mathbf{v}_{A/B} = -36.6\mathbf{i} + 36.6\mathbf{j}$ (pie/s). (c) $\mathbf{r}_{A/B} = -56.8\mathbf{i} + 56.8\mathbf{j}$ (pies).

2.156 $|\mathbf{a}_{A/B}| = 283$ pie/s^2.

2.158 $|\mathbf{a}_{B/A}| = 0.625$ m/s^2.

2.160 $\mathbf{a}_{B/A} = -5\mathbf{i} - 8.66\mathbf{j}$ (m/s^2).

2.162 $\mathbf{a}_B = -41.6\mathbf{i} - 24.8\mathbf{j}$ (m/s^2).

2.164 $\mathbf{a}_{A/B} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (pie/s^2).

2.166 Velocidad $= 44.36\mathbf{i} - 7.56\mathbf{j}$ (pie/s), aceleración $= 1.32\mathbf{i} + 0.76\mathbf{j}$ (pie/s^2).

2.168 $x = -4.99$ pies.

2.170 53.1° noroeste, 424.3 mi/h.

2.172 2.34 m/s.

2.174 $\mathbf{v}_{A/B} = v_A\mathbf{j} + R_E\omega\mathbf{k}$.

2.176 (a)

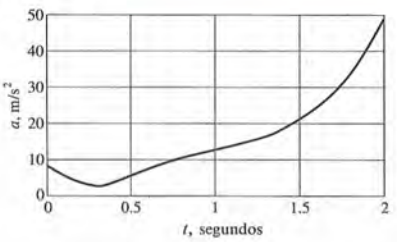
(b) $v = 3.72$ pie/s en $t = 2.31$ s.

2.178 $\theta_0 = 33.4°$

2.180 60.9° y 74.1°.

2.182 $c = 1.31$ s^{-1}.

2.184 (a)



(b) $|\mathbf{a}|_{\text{mín}} = 2.074$ (m/s^2) en $t = 0.310$ s.

2.186 $|\mathbf{a}|_{\text{máx}} = 22.636$ m/s^2 en $r = 1.493$ m, $\theta = 20.49°$.

2.188 $v = 42.3$ m/s.

2.190 13.1 s.

2.192 68.65 pie/s.

2.194 $|\mathbf{v}| = 2.19$ m/s, $|\mathbf{a}| = 5.58$ m/s^2.

2.196 $\mathbf{a} = -2.75\mathbf{e}_r - 4.86\mathbf{e}_\theta$ (m/s^2).

2.198 $|\mathbf{v}_M| = 7.65$ km/s.

2.200 $|\mathbf{v}_{C/A}| = 37.0$ pie/s.

2.202 $\omega = \pm 29.64$ rad/s. No.

Capítulo 3

3.2 $\mathbf{r} = 72.2\mathbf{i} + 44.4\mathbf{j}$ pies, $\mathbf{v} = 52.2\mathbf{i} + 54.4\mathbf{j}$ pie/s.

3.4 $200\mathbf{i} - 60\mathbf{k}$ (N).

3.6 $\mathbf{v} = 6.85\mathbf{i}$ pie/s.

3.8 $x = F_0t_0^2/m$.

3.10 27.8 pie/s^2.

3.12 $-372.7\mathbf{i} + 275.8\mathbf{j}$ (lb).

3.14 $W = 88.29$ kN, $T = 61.67$ kN, $L = 66.93$ kN.

3.16 $0.023\mathbf{i} + 10.017\mathbf{j}$ (lb).

3.18 2.68 pies.

3.20 Velocidad $= 8.05$ pie/s, distancia $= 4.02$ pies.

3.22 $F = 331.1$ N, $a = 3.92$ m/s^2.

3.24 4.43 pies hacia arriba sobre la superficie.

3.26 (a) 1200.3 N. (b) 4.12 m/s.

3.28 (a) 2.1 pies. (b) 6.9 pies.

3.30 (a) $a = -5$ m/s^2. (b) $v = -2.24$ m/s.

3.32 (a) 11.9 pies. (b) 813.2 lb.

3.34 $y = -18.8$ mm.

3.36 (a) 50 s. (b) 40.8 N. (c) $4.8\mathbf{i} + \mathbf{j}$ m/s.

3.38 2.06 m/s^2 hacia arriba de la barra.

3.40 $F = 19.4$ lb.

3.42 $F_x = -0.544$ N.

3.44 0.284 s

3.46 Fuerza gravitatoria $= 6059.6$ lb, peso al nivel del mar $= 9660$ lb.

3.50 70.9 lb.

3.52 $2.62 \leq v \leq 3.74$ m/s.

3.54 (a) 207 055 lb. (b) 41 725 pies.

3.56 (a) 401.2 pie/s. (b) 450.0 lb hacia abajo.

3.60 $\theta = L_0/R - \sqrt{(L_0/R)^2 - (2v_0/R)t}$.

3.62 400.5 pies.

3.64 11.4 m/s^2.

3.66 $\Sigma F_r = -138$ lb, $\Sigma F_\theta = 138$ lb.

3.68 $9.46\mathbf{e}_r + 3.44\mathbf{e}_\theta$ (N).

3.70 $|\mathbf{v}| = 16.6$ pie/s.

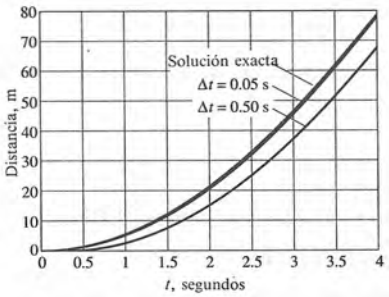
3.72 $|\mathbf{v}| = \sqrt{2gL \operatorname{sen}\theta}$, $T = 3mg \operatorname{sen}\theta$.

3.74 $\mu_s = 0.406$. La masa se desliza hacia O.

3.76 $-1.476\mathbf{e}_r - 0.202\mathbf{e}_\theta$ (lb).

3.78 $k = 2m\omega_0^2$.

3.82

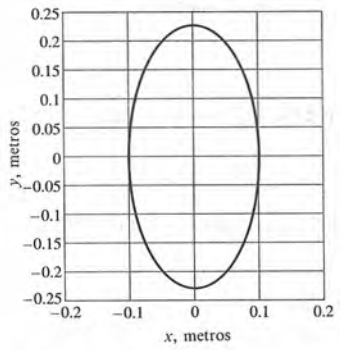


3.84

Tiempo, s	Posición, m	Velocidad, m/s
0.00	1.0000	0.0000
0.01	1.0000	−0.0100
0.02	0.9999	−0.0200
0.03	0.9997	−0.0300
0.04	0.9994	−0.0400
0.05	0.9990	−0.0500

3.86 $x = 22.5$ pies, $v_x = 23.1$ pie/s.

3.88



3.90 $C = 0.0217$.

3.92 (a) $F_1 = 63.1$ kN, $F_2 = 126.1$ kN, $F_3 = 189.2$ kN.
(b) $F_1 = 75.1$ kN, $F_2 = 150.1$ kN, $F_3 = 225.2$ kN.

3.94 14 309 pies (2.71 mi).

3.96 10.5 lb.

3.98 $a_A = 4.02$ pie/s^2, $T = 17.5$ lb.

3.100 29.7 pies.

3.102 $\tan\alpha = v^2/(\rho g)$.

3.104 17.0 pie/s^2.

3.106 9.30 N.

3.108 $\Sigma\mathbf{F} = -10.7\,\mathbf{e}_r + 2.55\,\mathbf{e}_\theta$ (N).

3.110 5.46 pie/s^2.

Capítulo 4

4.2 (a) 2.37×10^6 tons (2.37 megatons). (b) 2.35×10^7 slugs.

4.4 (a) 6.01×10^6 pie-lb. (b) 4555 lb.

4.6 2.00×10^6 pie-lb/s, o 3644 hp.

4.8 129 kN.

4.10 (a) 10.67 pie-lb. (b) 21.06 pie/s.

4.12 $U = \frac{1}{2}m[(v_0 - cs_f/m)^2 - v_0^2]$.

4.14 $v = 21.8$ m/s.

4.16 16.7 lb.

4.18 621.1 lb/pie.

4.20 5.35 lb/pie.

4.22 $k = 4288$ N/m.

4.24 (a) 1.55 m. (b) 1.74 m/s.

4.26 (a), (b) Trabajo = 588.6 N-m, $v = 6.26$ m/s.

4.28 $v = 1.72$ m/s.

4.30 $v = 1.14$ m/s.

4.32 (a) 932.9 N. (b) Trabajo = 89.6 N-m, $v = 1.06$ m/s

4.34 21.0 m/s.

4.36 52.7 pie/s, o 35.9 mi/h.

4.38 $T = 3mg \operatorname{sen}\alpha$.

4.40 2.33 kN.

4.42 (a), (b), (c) 63.4 m/s.

4.44 $\alpha = \arccos(2/3)$.

4.46 1 pie.

4.48 0.8 pies.

4.50 $v_2 = 7.03$ m/s.

4.52 5.77 m/s.

4.54 4.90 m/s.

4.56 129.0 pie/s.

4.58 $v_A = 16.4$ pie/s.

4.60 4733 pie/s.

4.62 2.25×10^10 N-m.

4.64 $P = -117{,}333$ pie-lb/s.

4.66 $P_{\text{media}} = 10.58$ kW.

4.68 1.78×10^5 pie-lb/s, o 323 hp.

4.70 (a) 7.72 m. (b), (c) 6.48 m.

4.72 60°.

4.74 (a) 686.7 N. (b) 882.9 N.

4.76 $W\left[1+\sqrt{1+4C/W}\right]$.

4.78 $V = \frac{1}{2}kS^2 + \frac{1}{4}qS^4$.

4.80 $v = 2.30$ m/s.

4.82 $v = 8.45$ pie/s.

4.84 (a) $V = p_0 s_0^{\gamma} A s^{1-\gamma}/(\gamma - 1)$.
(b) $v = \sqrt{2p_0 s_0^{\gamma} A(s_0^{1-\gamma} - s^{1-\gamma})/[m(\gamma - 1)]}$.

4.86 $v = 11.0$ km/s.

4.88 $v_C = 9423$ pie/s.

4.90 (a) $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} - \mathbf{j}$ N. (b) El trabajo es −1 N-m para cualquier trayectoria de la posición 1 a la 2.

4.92 $\mathbf{F} = -[k(r - r_0) + q(r - r_0)^5]\,\mathbf{e}_r$.

4.94 (a) $\mathbf{F} = (\operatorname{sen}\theta - 2r\cos^2\theta)\mathbf{e}_r + (\cos\theta + 2r\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta$. (b) El trabajo es 2 pie-lb para cualquier trayectoria de 1 a 2.

4.98 (a) y (c).

4.100 552.5 mm.

4.102 58.7 mm, 1277.6 N-m/s (watts).

4.104 8.01 pies.

4.106 $v = 6.32$ m/s.

4.108 $P = -8\,578\,000$ pie-lb/s.

4.110 (a), (b) 193.2 pies.

4.112 Se debe escoger la estrategia (b). La velocidad de impacto es 11.8 m/s, el trabajo es −251.3 kN-m. En (a), la velocidad de impacto es 13.9 m/s, el trabajo es −119.2 kN-m.

4.114 $v = 2.08$ m/s.

4.116 (a) 14.3×10^7 pie-lb. (b) $v = 88(1 - e^{-(F_0/88m)t})$.

4.118 $k = 163.3$ lb/pie.

4.120 (a) $k = 809.0$ N/m. (b) $v_2 = 6.29$ m/s.

4.122 $h = 0.179$ m.

4.124 4.39 pie/s.

4.126 (a) $\theta = 27.9°$. (b) 159.0 lb. (c) 221.9 lb.

4.128 $v_1 = 4.73$ pie/s.

4.130 1.02 m.

4.132 24.8 pie/s.

4.134 (a) $v = 0$. (b) $v = \sqrt{gR_E/2} = 18\,348$ pie/s, o 12 510 mi/h.

4.136 (a) 11.34 MW (megawatts). (b) 9.45 MW.

Capítulo 5

5.2 (a) 27.3 klb-s. (b) 4555 lb.

5.4 (a) 1000 lb-s. (b) 107.3 pie/s, o 73.2 mi/h.

5.6 (a) $180\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 40\mathbf{k}$ (N-s). (b) $10\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ (m/s).

5.8 (a) 75 klb-s. (b) 8 s.

5.10 32.2 pie/s.

5.12 (a) 221.7 N-s. (b) 1.85 m/s.

5.14 0.192 s.

5.16 10.7 pie/s.

5.18 $-7.07\mathbf{i} + 7.26\mathbf{j}$ (m/s).

5.20 (a) $-100\mathbf{j}$ (lb-s). (b) $\mathbf{v} = 20\mathbf{i} - 29.8\mathbf{j}$ (pie/s).

5.22 328 lb.

5.24 (a) 1913.0 lb. (b) 22 pie/s^2.

5.26 75.1 lb (aproximadamente 600 veces el peso del reloj).

5.28 La fuerza horizontal es 0.234 N, la vertical es 0.364 N.

5.30 $-0.35\mathbf{i} + 122.96\mathbf{j}$ (N).

5.32 (a) 0.00057 m/s. (b) 0.00343 m.

5.34 (a), (b) 1.63 pie/s.

5.36 Velocidad = 6.96 km/s, $\beta = 0.174°$.

5.38 $v = \sqrt{2\mu_k g D}(1 + m_B/m)$.

5.40 1921 pie/s.

5.42 (a) $30\mathbf{j}$ (mm/s). (b) $6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (m).

5.44 $e = 0.2$, $v'_A = 0.4v_A$.

5.46 2.5 pie/s a la derecha.

5.48 A: 3.5 pie/s a la izquierda; B: 8.5 pie/s a la derecha.

5.50 A: 107.6 pie/s^2; B: 68.4 pie/s^2.

5.52 $v_A = 7.70$ m/s.

5.54 $e = 0.77$.

5.56 Casco: 1.09 m/s a la derecha; cabeza: 1.07 m/s a la izq.

5.58 $e = 2\sqrt{(1 - \cos\beta)/(1 - \cos\theta)} - 1$.

5.60 $\mathbf{v}'_A = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ (m/s), $\mathbf{v}'_B = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ (m/s).

5.64 $e = 0.304$.

5.66 2.30 m.

5.68 $v_S = 35.3$ m/s.

5.70 2.19 pie/s.

5.72 $\mathbf{v} = 120\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 30\mathbf{k}$ (pie/s) o $\mathbf{v} = -120\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$ (pie/s).

5.74 (a) $-1440\mathbf{k}$ (kg-m^2/s). (b) 1.2 m/s.

5.76 $\mathbf{v} = -v_0\,\mathbf{e}_r + \dfrac{((1/2)r_0t^2 - (1/3)v_0t^3)C}{(r_0 - v_0t)m}\,\mathbf{e}_\theta$.

5.78 2.31 m.

5.80 0.111 rpm.

5.82 $|v_r| = 11\,549$ pie/s, $|v_\theta| = 9428$ pie/s.

5.86 625.1 pie-lb.

5.88 750 N.

5.90 (a) $351\mathbf{i} - 849\mathbf{j}$ (N). (b) $1200\mathbf{i} - 1200\mathbf{j}$ (N). (c) $2400\mathbf{i}$ (N).

5.92 $0.486\mathbf{k}$ (pie-lb).

5.94 $51.9\mathbf{i} - 282.2\mathbf{j}$ (N).

5.96 1.435 km/s.

5.98 (a) 1.87 km/s. (b) 1.946 km/s. (c) 1.797 km/s.

5.100 (a) $F = 3s + 12/32.2$ lb. (b) 25.49 pie-lb.

5.102 $v = v_0/[1 + (\rho_L/2m)s]$.

5.104 6815 N.

5.106 4095.7 lb.

5.108 (a) 5. (b) 43 509 lb. (c) 11.2 pie/s^2.

5.110 876,9 kN.

5.112 Masa $= 2.0 \times 10^{13}$ kg. Radio $= 880.1$ m.

5.114 (a) 34.9 pie/s. (b) 15,710 pie-lb.

5.116 $0.775 \leq e \leq 0.828$.

5.118 (a) 3.45 m/s. (b) 18.7 kN.

5.120 (a) 8.23 kN. (b) 16.5 kN.

5.122 $v_A\sqrt{mk/2}$.

5.124 1.57 pies.

5.126 $x = -11.13$ pulg, $y = 6.42$ pulg.

5.128 867.4 lb. (incluido el peso del tambor).

5.130 (a) 30.1 pie/s. (b) 46.8 pie/s.

Capítulo 6

6.2 (a) 20 rad/s^2 horaria. (b) 1.59 revoluciones.

6.4 8 rad/s.

6.6 $\mathbf{v}_A = -6.67\mathbf{i} - 6.67\mathbf{j}$ (pie/s), $\mathbf{a}_A = 66.7\mathbf{i} - 66.7\mathbf{j}$ (pie/s^2).

6.8 (a) $\mathbf{v}_B = 8\mathbf{j}$ (pie/s). (b) $\mathbf{v}_B = -1.31\mathbf{i} - 7.92\mathbf{j}$ (pie/s).

6.10 $|\mathbf{v}_B| = 15$ pie/s, $|\mathbf{a}_B| = 300$ pie/s^2.

6.12 $\omega = 30\mathbf{i}$ (rad/s).

6.14 $\omega_{AB} = 10\mathbf{k}$ (rad/s), $\omega_{BC} = -10\mathbf{k}$ (rad/s), $\omega_{CD} = 10\mathbf{k}$ (rad/s).

6.16 (a) $\omega = \omega\mathbf{k}$. (b) $\mathbf{v}_{A/B} = r_{A/B}\omega\mathbf{j}$.

6.18 (a) $\omega = 5\mathbf{k}$ (rad/s). (b) $\mathbf{v}_A = -5\mathbf{i} + 8.66\mathbf{j}$ (m/s).

6.20 (a) 92.6 rad/s horaria. (b) La parte superior; 200 km/h, o 55.6 m/s.

6.22 Velocidad angular = 17.95 rad/s, o 171.4 rpm horaria; velocidad = 125.7 pulg/s.

6.24 (a) $\omega = 2.13\mathbf{k}$ (rad/s). (b) $\mathbf{v}_A = -0.73\mathbf{j}$ (m/s).

6.26 8 rad/s horaria, $\mathbf{v}_D = 160\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$ pulg/s.

6.28 $\omega_{BCD} = 10$ rad/s horaria, $\mathbf{v}_D = 136\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$ (pulg/s).

6.30 $\omega_{AB} = 2$ rad/s horaria, $\omega_{BC} = 3.22$ rad/s antihoraria. wise.

6.32 $\mathbf{v}_E = -12.3\mathbf{j}$ (m/s).

6.34 $|\omega_{AB}| = 4.91$ rad/s, $|\omega_{DE}| = 6.77$ rad/s.

6.36 $\omega_{AB} = 2.31$ rad/s horaria, $v_B = 3.15$ m/s a la izquierda.

6.38 $\mathbf{v}_C = 25.13$ (pulg/s).

6.40 $\mathbf{v}_A = 1.2\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j}$ (m/s).

6.42 $\omega_{BC} = 2.61$ rad/s, $\mathbf{v}_C = -9.10\mathbf{i}$ (m/s).

6.44 0.95 m/s.

6.46 $\mathbf{v}_C = 10.86\mathbf{i} + 7.53\mathbf{j}$ pulg/s.

6.48 $v_W = 0.2$ m/s, 4 rad/s antihoraria.

6.50 Velocidad angular = 52.06 rad/s, o 497.1 rpm, $|\mathbf{v}_A|$ = 5.21 m/s.

6.52 $x_C = 3$ m, $y_C = 0$, $v_B = 10$ m/s.

6.54 $x = 0.35$ pie, $y = -1.5$ pie.

6.56 $\mathbf{v}_G = 1.00\mathbf{i} - 0.36\mathbf{j}$ (m/s).

6.58 (a) (3.46, 4) pie. (b) $\mathbf{v}_A = 2\mathbf{i}$ (pie/s).

6.60 6.57 pulg/s.

6.62 $\mathbf{v}_E = -12.25\mathbf{j}$ (m/s).

6.64 $\omega_{BC} = 5.33$ rad/s antihoraria, $\omega_{CD} = 4.57$ rad/s horaria.

6.68 (a) $\mathbf{a}_A = -50\mathbf{e}_r + 60\mathbf{e}_\theta$ (m/s^2). (b), (c) $\mathbf{a}_A = -50\mathbf{i} + 60\mathbf{j}$ (m/s^2).

6.70 (a) $\mathbf{a}_B = -800\mathbf{i}$ (m/s^2). (b) $\mathbf{a}_A = -400\mathbf{i}$ (m/s^2).

6.72 $\omega_{AC} = 0$, $\alpha_{AC} = 1.13$ rad/s^2 horaria.

6.74 $\mathbf{a}_A = -5\mathbf{j}$ (pulg/s^2), $\mathbf{a}_B = 3\mathbf{j}$ (pulg/s^2).

6.76 Aceleración = 133.8 pulg/s^2.

6.78 La velocidad es 55.9 pulg/s a la derecha; la aceleración es 909.8 pulg/s^2 a la izquierda.

6.80 $\omega_{BD} = 2.67$ rad/s horaria, $\alpha_{BD} = 6.22$ rad/s^2 antihoraria.

6.82 $\mathbf{v}_C = 40.8\mathbf{i}$ pulg/s, $\mathbf{a}_C = 6.98\mathbf{i}$ pulg/s^2.

6.84 $\mathbf{a}_C = 205.9\mathbf{i}$ (pulg/s^2).

6.86 $\omega_{AB} = -0.879$ rad/s, $\alpha_{AB} = -1.06$ rad/s^2, $\omega_{BC} = -1.15$ rad/s, $\alpha_{BC} = -2.41$ rad/s^2.

6.88 $\mathbf{a}_E = -12.25\mathbf{j}$ (m/s^2).

6.90 $\mathbf{a}_C = -7.78\mathbf{i} - 33.54\mathbf{j}$ (m/s^2).

6.92 $\mathbf{a}_D = -0.135\mathbf{i} - 0.144\mathbf{j}$ (m/s^2).

6.94 $\omega_{AB} = 3.55$ rad/s horaria, $\alpha_{AB} = 12.05$ rad/s^2 horaria, $\omega_{BC} = 2.36$ rad/s antihoraria, $\alpha_{BC} = 16.53$ rad/s^2 antihoraria.

6.96 $\alpha_{\text{periférico}} = 41.43$ rad/s^2 horaria, $\alpha_{\text{central}} = 82.86$ rad/s^2 antihoraria.

6.98 $\alpha_{CD} = 26.45$ rad/s^2 horaria, , $\alpha_{DE} = 31.14$ rad/s^2 antihoraria.

6.100 $\mathbf{a}_A = -200\mathbf{i} + 80\mathbf{j}$ (pie/s^2).

6.102 $\mathbf{a}_C = -8.80\mathbf{i} + 5.60\mathbf{j}$ (m/s^2).

6.104 $\omega_{AC} = 3$ rad/s antihoraria, $\alpha_{AC} = 6$ rad/s^2 horaria.

6.106 0.549 m/s a la izquierda.

6.108 $\omega_{BC} = 1.16$ rad/s horaria, 15.4 pulg/s hacia C.

6.110 $\omega_{BC} = 6.17°$ /s antihoraria; la razón de extensión es 0.109 m/s.

6.112 $\omega_{AC} = 8.66$ rad/s antihoraria, y la barra AC se desliza por el manguito a 5 m/s hacia A.

6.114 $\omega_{AC} = 0.293$ rad/s horaria, $\mathbf{v}_C = -0.738\mathbf{i} - 1.370\mathbf{j}$ (pie/s).

6.116 Se está extendiendo a 1.08 pie/s.

6.118 $\omega_{AB} = 2$ rad/s horaria, , $v_{B\text{rel}} = 2$ m/s hacia C.

6.120 $\omega_{AB} = 3.88$ rad/s antihoraria.

6.122 $\omega_{\text{placa}} = 2$ rad/s antihoraria, y la velocidad con que el pasador resbala respecto a la ranura es 0.2 m/s hacia abajo.

6.126 (a) $\mathbf{v}_A = R\omega\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_A = -R\omega^2\mathbf{i}$.
(b) $\mathbf{v}_A = 2R\omega\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_A = -2R\omega^2\mathbf{i}$.

6.128 $\mathbf{v}_A = -3.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j} + 4.0\mathbf{k}$ (m/s), $\mathbf{a}_A = -10\mathbf{i} - 6.5\mathbf{j} - 19.25\mathbf{k}$ (m/s^2).

6.130 $-2\mathbf{i}$ (m/s).

6.132 $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} = -14\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (pie/s^2).

6.134 (a) $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}} = v\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} = -(v^2/R_\text{E})\mathbf{i}$.
(b) $\mathbf{v}_A = v\mathbf{j} - \omega_\text{E} R_\text{E} \cos L\,\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_A = (-v^2/R_\text{E} - \omega_\text{E}^2 R_\text{E} \cos^2 L)\mathbf{i} + \omega_\text{E}^2 R_\text{E}$ sen $L\cos L\mathbf{j} + 2\omega_\text{E} v$ sen $L\mathbf{k}$.

6.136 (a) $-9.81\mathbf{k}$ (m/s^2). (b) $3.29\mathbf{i} - 9.81\mathbf{k}$ (m/s^2).

6.138 (a) $0.1\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j}$ (m/s^2).
(b) $0.125\mathbf{i} + 0.085\mathbf{j} + 0.106\mathbf{k}$ (m/s^2).

6.142 $\mathbf{v}_C = -32.0\mathbf{j}$ (pie/s).

6.144 $\alpha_{AB} = 13.60 \times 10^3$ rad/s^2 horaria, $\alpha_{BC} = 8.64 \times 10^3$ rad/s^2 antihoraria.

6.146 $\mathbf{a}_D = -3488\mathbf{i}$ pulg/s^2.

6.148 $\mathbf{a}_G = -8.18\mathbf{i} - 26.4\mathbf{j}$ (pulg/s^2).

6.150 $\mathbf{v}_C = -1.48\mathbf{i} + 0.79\mathbf{j}$ (m/s).

6.152 $\mathbf{a}_C = -2.99\mathbf{i} - 1.40\mathbf{j}$ (m/s^2).

6.154 $\omega_{BD} = 0.733$ rad/s antihoraria.

6.156 $\omega_{AB} = 0.261$ rad/s antihoraria, $\omega_{BC} = 2.80$ rad/s antihoraria.

6.158 $\omega_{BC} = 1.22$ rad/s horaria, 17.96 m/s de B a C.

6.160 Velocidad = 6.89 pie/s hacia arriba; aceleración = 168.65 pie/s^2 hacia arriba.

6.162 $T_{BC} = 0$

6.164 (a) $\mathbf{v}_{A\,\text{rel}} = 5\mathbf{i}$ m/s, $\mathbf{a}_{A\,\text{rel}} = 0$. (b) $\mathbf{v}_{A/B} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ (m/s), $\mathbf{a}_{A/B} = -4\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$ (m/s^2).

Capítulo 7

7.2 $F = (b/2c)mg$.

7.4 Tiempo = 0.980 s, distancia = 2.94 m.

7.6 $F = W(b - ca/g)/h$.

7.8 $T_A = 3681.1$ N, $T_B = 4137.1$ N.

7.10 6.78 m/s^2, $N_A = 1356.4$ N, $N_B = 213.2$ N.

7.12 $\omega = 7.5$ rad/s.

7.14 34.0 pie-lb.

7.16 (a) α = 25 rad/s^2 horaria, T = 20 lb. (b) α = 18.0 rad/s^2 horaria, T = 14.4 lb.

7.18 Tiempo = 1.17 s.

7.20 (a), (b) α = 11.4 rad/s^2 antihoraria, $A_x = 0$, $A_y = 4.12$ lb.

7.22 $x = l/\sqrt{12}$, $\alpha_{\text{máx}} = \sqrt{3}g/l$.

7.24 $A_x = -10.28$ kN, $A_y = -7.04$ kN.

7.26 $M_B = 27.1$ N-m antihorario, $B_x = -11.0$ N, $B_y = 108.5$ N.

7.28 $t_{\text{anillo}}/t_{\text{disco}} = \sqrt{4/3}$.

7.30 $v_{\text{máx}} = \frac{2}{7}R\omega_0$, tiempo $= \frac{2}{7}R\omega_0/(\mu_k g)$.

7.32 (a) No resbala, α = 22.2 rad/s^2 horaria. (b) Sí resbala, α = 53.6 rad/s^2 horaria.

7.34 (a) α = 1.84 rad/s^2 antihoraria. (b) 112.3 N.

7.36 9.20 rad/s^2 horaria.

7.38 61.3 rad/s^2 horaria.

7.40 (a) 0.244 pie/s^2 a la derecha.

7.42 $\mu_\text{S} = 0.0339$.

7.44 M = 82.4 pie-lb.

7.46 $B_x = -60.3$ lb, $B_y = -125.6$ lb, $C_x = 11.4$ lb, $C_y = 135.6$ lb.

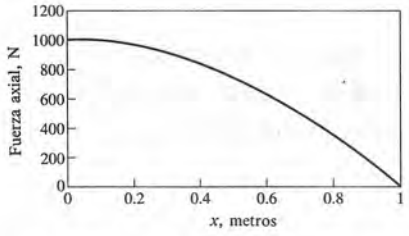
7.48 $\alpha_{BC} = 34.1$ rad/s^2 antihoraria, fuerza normal = 3.50 lb.

7.50 (a) 9.34 m/s^2. (b) 515.5 N-m.

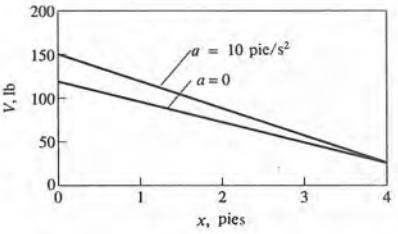
7.54 $\alpha_\text{P} = 0.178$ rad/s^2 horaria, fuerza = 10.1 lb.

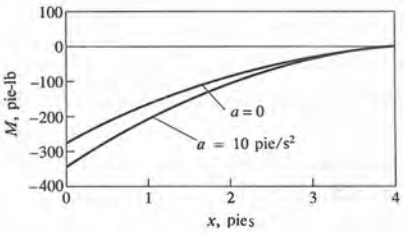
7.56 $|P| = 44.1$ kN.

7.58

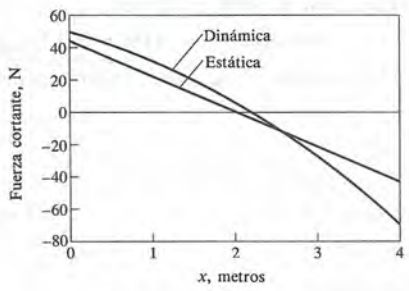


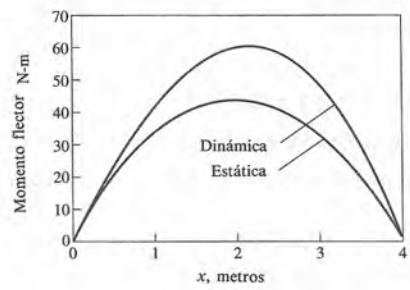
7.60





7.62





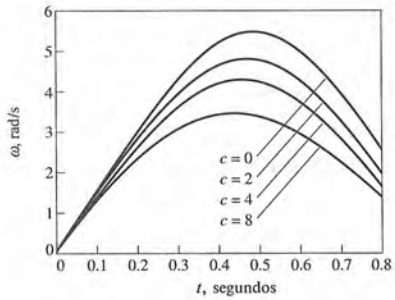
7.64

Tiempo, s	θ, rad	ω, rad/s	ω en forma cerrada, rad/s
0.0	0.000	0.000	0.000
0.2	0.000	0.250	0.250
0.4	0.050	0.499	0.498
0.6	0.150	0.747	0.744
0.8	0.299	0.991	0.987
1.0	0.498	1.232	1.225

7.66

Tiempo, s	θ, rad	ω, rad/s
0.0	0.000	0.000
0.1	0.000	1.472
0.2	0.147	2.943
0.3	0.441	4.399
0.4	0.881	5.729
0.5	1.454	6.665

7.68



7.70 $I_0 = \frac{1}{3}ml^2$.

7.72 $I = \frac{1}{12}ml^2 \operatorname{sen}^2\theta$.

7.74 $I_{(\text{eje } x)} = \frac{1}{12}mh^2$, $I_{(\text{eje } y)} = \frac{1}{12}mb^2$, $I_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{12}m(b^2 + h^2)$.

7.76 $I_{(\text{eje } y)} = 1.99$ slug-pie^2.

7.78 20.8 kg-m^2.

7.80 $I_0 = \frac{17}{12}ml^2$.

7.82 $I_{(\text{eje } z)} = 47.0$ kg-m^2.

7.84 3807.5 slug-pie^2.

7.86 $I_{(\text{eje } z)} = 9.00$ kg-m^2.

7.88 $I_{(\text{eje } y)} = 0.0881$ slug-pie^2.

7.90 $I_0 = 0.0188$ kg-m^2.

7.92 $I_{(\text{eje } x)} = I_{(\text{eje } y)} = m(\frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{5}h^2)$.

7.94 $I_{(\text{eje } x)} = I_{(\text{eje } y)} = m(\frac{1}{20}\omega^2 + \frac{3}{5}h^2)$.

7.96 $I = 0.460$ slug-pie^2.

7.98 $I_0 = 0.00367$ kg-m^2.

7.100 $I_{(\text{eje } z)} = 0.714$ slug-pie^2.

7.102 (a) 12.1 s. (b) 143.8 lb.

7.104 (a) 20 m/s^2. (b) $c \leq 49.1$ mm.

7.106 $I = 2.05$ kg-m^2.

7.108 40.2 kN.

7.110 $\alpha = -0.420$ rad/s^2, $F_x = 336.3$ N, $F_y = 1709.7$ N.

7.112 $\alpha = \dfrac{[3(1-\mu^2)\operatorname{sen}\theta - 6\mu\cos\theta]g}{(2-\mu^2)/l}$ antihoraria.

7.114 $B_x = -1959$ N, $B_y = 1238$ N, $C_x = 2081$ N, $C_y = -922$ N.

7.116 $\alpha_{OA} = 0.425$ rad/s^2 antihoraria, $\alpha_{AB} = 1.586$ rad/s^2 horaria.

7.118 $\alpha_{HP} = 5.37$ rad/s^2 horaria.

7.120 208.2 m/s^2 a la izquierda.

Capítulo 8

8.2 504.3 rad/s (4816 rpm).

8.4 10.05 revoluciones.

8.6 0.103 rps.

8.8 (a) 17.7 rad/s. (b) 15.0 rad/s.

8.10 (a), (b) 4.77 rad/s.

8.12 (a) $\omega = \sqrt{2gx/(\frac{1}{12}l^2 + x^2)}$. (b) $x = l/\sqrt{12}$.

8.14 139.0 rad/s antihoraria.

8.16 (a) 1.125 pie. (b) 1.088 pie/s.

8.18 $U = 5634$ N-m.

8.20 $\omega = \sqrt{\dfrac{(mg\operatorname{sen}\beta + M/R)2b}{I + R^2m}}$.

8.22 16.7 rad/s horaria.

8.24 $v = 0.413$ m/s.

8.28 $P_{\text{máx}} = 579.7$ pie-lb/s (1.05 hp), $P_{\text{media}} = 289.9$ pie-lb/s (0.53 hp).

8.30 $|\omega| = 4.29$ rad/s.

8.32 1.47 pie/s.

8.34 3.69 rad/s horaria.

8.36 7.93 pie/s.

8.38 4.52 rad/s antihoraria.

8.40 2.80 rad/s antihoraria.

8.42 $\omega_{AB} = 4.64$ rad/s horaria, $\omega_{BC} = 5.68$ rad/s antihoraria.

8.44 3 s.

8.46 (a) 126.4 rad/s. (b) 200 rad/s.

8.48 $\omega = 680.3$ rad/s.

8.50 $h = 1.33$ m, $\omega = 3.75$ rad/s.

8.52 $\omega_2 = 4.38$ rev/s.

8.54 $\omega' = 0.721$ rad/s.

8.56 14.5°.

8.58 4.72 rad/s antihoraria.

8.60 0.00589 rad/s antihoraria.

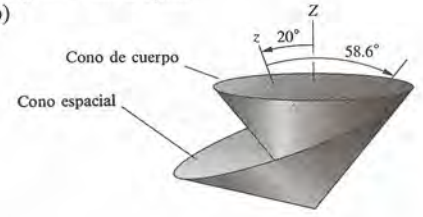
8.62 1.54 rad/s antihoraria.

8.64 3.75 rad/s antihoraria.

8.66 (a) 50 N-m antes, 31.3 N-m después. (b) 50 N-m antes, 50 N-m después.
8.70 Pérdida de energía: $\frac{1}{6}mgl$.
8.72 5.96 pie/s.
8.74 Velocidad = $5.77\mathbf{i} - 2.10\mathbf{j}$ (pie/s), velocidad angular = 3.15 rad/s antihoraria.
8.76 $\omega = \dfrac{6v_0}{7l}$ antihoraria.
8.78 $\omega = 0.0997$ rad/s $= 5.71$ grados/s antihoraria.
8.80 $\omega'_A = 0.370$ rad/s horaria, $\omega'_B = 0.119$ rad/s horaria, $\mathbf{v}'_A = 0.57\mathbf{i}$ (pie/s), $\mathbf{v}'_B = 1.79\mathbf{i}$ (pie/s).
8.82 0.00336 rad/s horaria.
8.84 $v = 2.05$ m/s.
8.86 $v = \sqrt{Fb/[\frac{1}{2}m_c + 2(m + I/R^2)]}$.
8.88 $\omega_S = 12.53$ rad/s.
8.90 $\omega_{AB} = 11.6$ rad/s horaria, $v_C = 2.7$ m/s.
8.92 11.07 rad/s.
8.94 1.77 rad/s antihoraria.
8.96 $N = (373/283)mg$.
8.98 $\omega' = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\beta)\omega$.
8.100 $b = 2$ pie.
8.102 10.5 rad/s antihoraria.
8.104 0.0822 **k** (rad/s)
8.106 4.44 rad/s antihoraria.
8.108 (a) 3.90 rad/s. (b) 0.162 m/s.

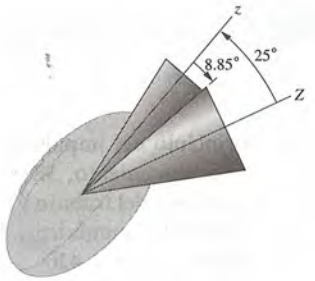
Capítulo 9

9.2 $\mathbf{a}_A = 358.8\mathbf{i} + 24.0\mathbf{j} + 149.6\mathbf{k}$ (km/s^2).
9.4 $\mathbf{a}_A = -255.2\mathbf{i} + 199.3\mathbf{j} - 209.0\mathbf{k}$ (pie/s^2).
9.6 $\mathbf{a}_C = 1000\mathbf{i} - 4000\mathbf{j} - 1000\mathbf{k}$ (pulg/s^2).
9.8 (a) $\alpha = 77.8\mathbf{i} + 44.4\mathbf{j} + 44.4\mathbf{k}$ (rad/s^2). (b) $160.0\mathbf{i} - 140.0\mathbf{j} - 140.0\mathbf{k}$ (km/s^2).
9.10 (a) $\omega = \omega_d\mathbf{i} + \omega_0\mathbf{j}$. (b) $\mathbf{v}_A = -R\omega_0\cos\theta\,\mathbf{i} + R\omega_d\cos\theta\,\mathbf{j} + (R\omega_d \operatorname{sen}\theta - b\omega_0)\mathbf{k}$.
9.12 $\mathbf{v}_A = 3.20\mathbf{i}$ (pulg/s), $\mathbf{v}_B = -4.10\mathbf{i} + 11.28\mathbf{j} - 2.26\mathbf{k}$ (pulg/s).
9.14 (a) $\omega_{BC} = 0.1\mathbf{j} + 0.4\mathbf{k}$ (rad/s). (b) $\mathbf{v}_C = -0.315\mathbf{i} + 0.085\mathbf{j} - 0.131\mathbf{k}$ (m/s).
9.16 (a) $\omega = 20\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ (rad/s). (b) $\mathbf{v}_A = 0.25\mathbf{i} + 1.00\mathbf{j} + 3.73\mathbf{k}$ (m/s).
9.18 $\mathbf{H} = 25\mathbf{i} + 50\mathbf{k}$ (kg-m^2/s).
9.20 $\mathbf{H}_O = 20\mathbf{j} - 22\mathbf{k}$ (slug-pie^2/s).
9.22 $I_{xx} = 0.67$ kg-m^2, $I_{yy} = 5.33$ kg-m^2, $I_{zz} = 6$ kg-m^2, $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$.
9.24 $I_{xx} = 0.12$ kg-m^2, $I_{yy} = 0.03$ kg-m^2, $I_{zz} = 0.15$ kg-m^2, $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$.
9.26 $I_{xx} = 2.48$ slug-pie^2, $I_{yy} = 16.77$ slug-pie^2, $I_{zz} = 19.25$ slug-pie^2, $I_{xy} = 5.59$ slug-pie^2, $I_{yz} = I_{zx} = 0$.
9.28 (a) $\mathbf{H} = \frac{1}{12}ml^2(\omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k})$. (b) $\mathbf{H}_O = \frac{1}{3}ml^2(\omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k})$.
9.30 $I_{xx} = 0.0398$ slug-pie^2, $I_{yy} = 0.0373$ slug-pie^2, $I_{zz} = 0.0772$ slug-pie^2, $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$.
9.32 $I_{x'x'} = 15\,600$ kg-m^2, $I_{y'y'} = 226\,800$ kg-m^2, $I_{z'z'} = 242\,400$ kg-m^2, $I_{x'y'} = -32\,400$ kg-m^2, $I_{yz} = I_{zx} = 0$.
9.34 $\mathbf{H} = 2.00\mathbf{i} - 1.64\mathbf{j} + 2.58\mathbf{k}$ (kg-m^2/s).
9.36 (a) $I = 3.56$ kg-m^2. (b) 14.22 kg-m^2/s.
9.38 $I_1 = 16.15$, $I_2 = 62.10$, $I_3 = 81.75$ kg-m^2, $\mathbf{e}_1 = 0.964\mathbf{i} - 0.220\mathbf{j} + 0.151\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = -0.204\mathbf{i} - 0.972\mathbf{j} - 0.114\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = 0.172\mathbf{i} + 0.079\mathbf{j} - 0.982\mathbf{k}$.
9.40 $I_1 = 0$, $I_2 = 1/12$, $I_3 = 1/12$ kg-m^2, $\mathbf{e}_1 = \cos\beta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\beta\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = -\operatorname{sen}\beta\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$.
9.42 $\Sigma\mathbf{M} = -250\mathbf{i} - 250\mathbf{j} + 125\mathbf{k}$ (N-m).
9.44 $\Sigma\mathbf{M}_O = -52\mathbf{i} + 132\mathbf{j} + 120\mathbf{k}$ (pie-lb).
9.46 $|\mathbf{a}_A| = 5F/m$.
9.48 (a) $\alpha = 28.57\mathbf{i} + 5.71\mathbf{j} - 2.00\mathbf{k}$ (rad/s^2). (b) $-0.33\mathbf{i} + 2.00\mathbf{j} - 19.54\mathbf{k}$ (pie/s^2).
9.50 $\alpha = -125.49\mathbf{i} + 4.48\mathbf{j} + 3.46\mathbf{k}$ (rad/s^2).
9.52 $\alpha = -500.0\mathbf{i} + 24.4\mathbf{j}$ (rad/s^2).
9.54 $\alpha = \frac{4}{3}(g/b)\mathbf{j}$.
9.56 $\alpha = 14.53\mathbf{j} + 4.65\mathbf{k}$ (rad/s^2).
9.58 27.4 N-m.
9.60 $|\mathbf{F}| = mg$, $|\mathbf{C}| = \frac{1}{12}ml^2\omega_0^2|\operatorname{sen}\beta\cos\beta|$.
9.64 $\frac{1}{2}mR^2\omega_0\omega_d$.
9.66 $-10\mathbf{j} + 14.91\mathbf{k}$ (lb), $-12.4\mathbf{i}$ (pie-lb).
9.72 157 N-m.
9.76 21.5 pie-lb.
9.80 $\dot{\psi} = 1.305$ rev/s.
9.82 29.1 rev/s.
9.84 (a) $\dot{\psi} = -2052$ rpm.
(b)



9.86 $N = \omega_0^2[(b/r)I_{zz}\operatorname{sen}^2\beta - I_{xx}\operatorname{sen}\beta\cos\beta]/(b\operatorname{sen}\beta - r\cos\beta)$.
9.88 Su lado derecho.
9.90 $\Sigma\mathbf{M} = 2122.5\mathbf{i} - 155.4\mathbf{j} - 534.0\mathbf{k}$ (N-m).
9.92 $\omega_0 = \sqrt{g\operatorname{sen}\beta/(\frac{2}{3}l\operatorname{sen}\beta\cos\beta + b\cos\beta)}$.
9.94 (b) Si $\omega_0 = 0$, la placa está en reposo. La solución de la ecuación $2\cos\beta - \operatorname{sen}\beta = 0$ es el valor de β para el cual el centro de masa de la placa está directamente arriba del punto O; la placa está equilibrada sobre una esquina.
9.96 $\mathbf{B} = 52.72\mathbf{i} + 97.35\mathbf{j} + 9.26\mathbf{k}$ (N), $\mathbf{M}_B = 0.05\mathbf{i} - 10.25\mathbf{j} + 30.63\mathbf{k}$ (N-m).

9.98

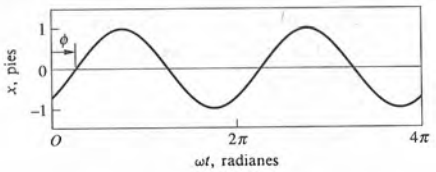


9.100 $\Sigma \mathbf{M} = -282.8\,\mathbf{i} - 2545.6\,\mathbf{j} - 800\,\mathbf{k}$ (pie-lb).

9.102 $\alpha = 0.0535\,\mathbf{i} + 0.0374\,\mathbf{j} + 0.0160\,\mathbf{k}$ (rad/s^2).

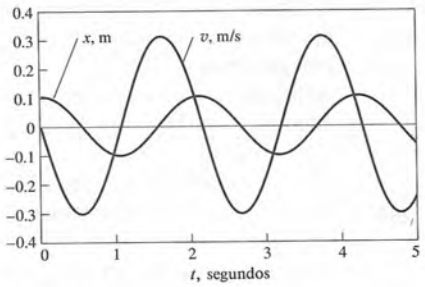
Capítulo 10

10.4 (a) $E = 1$, $\phi = 45°$.



10.6 (a) $\tau = 2.09$ s, $f = 0.477$ Hz. (b) $x = (0.1)\cos 3t$ m.

10.8 (a) $x = (0.1)\cos 3t$ m.



10.10 $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$.

10.14 1.46 Hz.

10.16 (a) $\tau = 2.09$ s, $f = 0.48$ Hz. (b) $x = 0.36(1 - \cos 3t)$ m.

10.18 0.212 m a la izquierda, 1.630 m/s hacia la derecha.

10.20 $f = 0.321$ Hz.

10.26 0.39 pulg.

10.28 $\theta_B = 0.172 \operatorname{sen} 11.62t$ rad.

10.30 $\theta_B = 0.167 \cos 6.11t$ rad.

10.32 $m_A = 4.38$ kg.

10.36 (a) $\tau = 3.17$ s, $f = 0.316$ Hz. (b) $\tau = 3.14$ s, $f = 0.318$ Hz.

10.38 $\tau = 2.22$ s, $f = 0.450$ Hz. (Los valores sin amortiguamiento son $\tau = 2.09$ s, $f = 0.477$ Hz.)

10.40 $c = 1.39$ N-s/m.

10.42 (a) $\tau = 1.81$ s, $f = 0.55$ Hz. (b) 4.59 s.

10.44 $x = e^{-2t}(-0.325 \operatorname{sen} 2.24t - 0.363 \cos 2.24t) + 0.363$ m.

10.46 $x = -(0.363 + 1.090t)e^{-3t} + 0.363$ m.

10.48 0.153 rad/s horaria.

10.50 (a) 277.1 N-s/m. (b) $\theta = 10te^{-4.33t}$ rad. (c) $\theta_{\text{máx}} = 0.850$ rad en $t = 0.231$ s.

10.52 $\theta_B = 0.209e^{-6.62t} \operatorname{sen} 9.55t$ rad.

10.54 $\theta_B = e^{-5.05t}(0.244 \operatorname{sen} 3.45t + 0.167 \cos 3.45t)$ rad.

10.56 (a) $x_p = 0.5 \operatorname{sen} 8t$ pie. (b) $x = -0.4 \operatorname{sen} 10t + \cos 10t + 0.5 \operatorname{sen} 8t$ pie.

10.60 11.5 lb.

10.62 0.113 mm.

10.64 16.5 pulg.

10.66 5.5 mm.

10.70

Tiempo, s	θ, rad	ω, rad/s
0.00	0.0349	0.0000
0.01	0.0349	−0.0051
0.02	0.0349	−0.0103
0.03	0.0348	−0.0154
0.04	0.0346	−0.0205
0.05	0.0344	−0.0256

10.72

Tiempo, s	Desplazam., pie × 10^6	Vel., pie/s × 10^3
0.000	0.0000	0.0000
0.001	0.0000	0.0000
0.002	0.0000	0.0664
0.003	0.0664	0.1987
0.004	0.2651	0.3963
0.005	0.6614	0.6587

10.74 $f = (1/2\pi)\sqrt{3[(k/m) - (g/2l)]}$.

10.76 $\delta = 2.07$.

10.78 $f = 0.714$ Hz.

10.80 $x = 0.118e^{-2.68t} - 0.118e^{-14.01t}$ pie.

10.82 $x = 0.253 \operatorname{sen} 6.19t + 0.100 \cos 6.19t + 0.145 \operatorname{sen} 3.00t$ m.

10.84 (a) $E_p = (2\pi v/\lambda)^2 h/[(k/m) - (2\pi v/\lambda)^2]$.
(b) $v = \lambda\sqrt{k/m}/2\pi$.

Índice de materias

A

aceleración, 4, 17
  angular, 50, 235, 262
  centrípeta, 68
  constante, 21
  de Coriolis, 68, 287
  en coordenadas cartesianas, 41
  en coordenadas cilíndricas, 69
  en coordenadas esféricas, 536
  en coordenadas polares, 67
  movimiento en línea recta, 18
    en función de la posición, 32, 35
    en función de la velocidad, 31
    en función del tiempo, 19
  componentes normal y tangencial, 56, 58
aceleración angular, 50, 235
aceleración centrípeta, 68
aceleración debida a la gravedad, 6
aceleración de Coriolis, 68, 287
aceleración relativa
  de dos puntos arbitrarios, 83
  de dos puntos de un cuerpo fijo, 260, 423
  en un sistema coordenado en rotación, 281
amortiguador, 499
amortiguamiento crítico, 501
amortiguamiento subcrítico, 500
amortiguamiento supercrítico, 501
amplitud, 487
ángulo de trayectoria, 56
ángulos de Euler, 464
ángulos de giro, 465
apogeo, 78
atenuación, 499

C

cantidad de movimiento
  angular, 209, 306, 430
  de un sistema de partículas, 305
  lineal, 100, 185, 186, 195
  conservación de la, 195, 215
centro instantáneo, 254
centroides, tablas de, 532
cinemática, 231, 422
cinemática de partículas, *véase* movimiento de un punto
cohete, 210
colisiones, *véase* impactos
componentes normal y tangencial, 55
  aceleración, 56, 58
  segunda ley de Newton, 115
  velocidad, 55, 58
cono de cuerpo, 468
cono espacial, 468
conservación de la cantidad de movimiento lineal, 195, 215
conservación de la energía, 160, 484
conservación del momento angular, 210, 392
constante gravitatoria universal, 5
contacto deslizante, 271
conversión de unidades, 9
coordenadas cartesianas, 40
  aceleración, 41
  segunda ley de Newton, 103
  vector de posición, 40
  velocidad, 40
coordenadas cilíndricas, 68
  aceleración, 69
  vector de posición, 69
  velocidad, 69
coordenadas esféricas, 536
coordenadas polares, 66
  aceleración, 67
  segunda ley de Newton, 124
  vector de posición, 66
  velocidad, 66
cuerpo rígido, 232
  cinemática,
    aceleración relativa de dos puntos, 260, 423
    ángulos de Euler, 464
    bidimensional, 231
    contacto deslizante, 271
    rodamiento, 240
    rotación respecto a un eje fijo, 233, 235
    teorema de Euler, 240
    traslación, 233
    tridimensional, 422
    vector de velocidad angular, 240
    velocidad relativa de dos puntos, 83, 239, 241, 423
  dinámica,
    bidimensional, 304
    conservación de la energía, 374
    ecuación del movimiento angular en dos dimensiones, 304
    ecuación del movimiento angular en tres dimensiones, 448
    impactos, 397
    principio de D'Alembert, 327
    principio del impulso angular y el momento angular, 391
    principio del impulso y la cantidad de movimiento, 389
    principio del trabajo y la energía, 368
    soluciones numéricas, 128, 341, 521
    tridimensional, 430

D

D'Alembert, principio de, 327
decremento logarítmico, 501
derivada de un vector, 16
derivadas, tablas de, 530
desplazamiento, 16
  en movimiento en línea recta, 17
dinámica de un sistema de partículas, 305
  principio del trabajo y la energía, 368
diferencias hacia adelante, 129
dígitos significativos, 6
directriz, 76

E

ecuación diferencial, 486, 508
ecuación diferencial homogénea, 486
ecuación diferencial lineal, 486
ecuaciones de Euler, 448
ecuaciones del movimiento bidimensional de cuerpo rígido, 304
eje instantáneo de rotación, 240, 422
eje fijo, rotación alrededor de un, 233
ejes principales, 438
elemento de amortiguamiento, 499
energía, 141, 367
  cinética, 141, 368
  conservación de la, 160, 374, 484
  de un sistema de partículas, 368
  potencial, 161
  uso de la, en vibraciones, 484
energía potencial, 161, 167
  del peso de un cuerpo, 162
  de un resorte lineal, 162
espacio, 4
espectro de frecuencias, 517
estática, 2
estrategia, 3
Euler, Leonhard, 129
Euler, teorema de, 240, 422
excentricidad, 76

F

fase, 487
flujo másico o de masa, 215
frecuencia
  amortiguada, 501

circular, 488
natural, 488
fuerza, 4, 100
conservativa, 161, 167
externa, 102, 305
gravitatoria, 5
impulsora, 187
inercial, 327
interna, 102, 305
media, 187, 389
trabajo realizado por una, 141
fuerza axial, 324
fuerza conservativa, 161, 167
fuerza ejercida por un resorte lineal, 164
peso de un cuerpo, 162
fuerza cortante, 324
fuerza de Coriolis, 288
fuerzas y momentos internos, 324
función de excitación, 508
oscilatoria, 509
polinomial, 510

G

giróscopo, 428
gradiente, 167
grado, 8
grado de libertad, 483
gravedad, 5
al nivel del mar, 6
de la Tierra, 5
fuerza entre dos partículas, 5
gravitación newtoniana, 5

H

Hohmann, transferencia, 79

I

impactos, 198
central directo, 199
central oblicuo, 200
de cuerpos rígidos, 397
perfectamente elástico, 200
perfectamente plástico, 198
impactos centrales directos, 199
impactos centrales oblicuos, 200
impulso
angular, 209, 391
lineal, 189, 389
impulso angular, 209, 391
impulso angular y momento angular, principio del, 210, 390
impulso lineal, 186, 389
impulso y la cantidad de movimento lineal, principio del, 186, 389
integrales, tablas de, 530

K

Kepler, Johannes, 74
kilogramo, 5, 7

L

libra, 5, 8
libra masa, 8

M

marco de referencia inercial, 100, 286
masa, 4, 100
matriz de inercia, 431
mecánica, 2
mecánica celeste, 74
mecánica de órbitas, 74
mecanismo de amortiguamiento, 499
método de diferencias finitas, 129, 341, 521
metro, 4, 7
momento angular, 209, 306, 390, 430
momento de inercia
de área, 346
tablas de, 532
de masa, 304, 344, 430, 433
barra esbelta, 345, 433
de un cilindro, 354
ejes y momentos de inercia principales, 438
matriz de inercia, 431
placa delgada, 346, 434
productos de inercia, 431
respecto a un eje arbitrario, 437
tabla de, 534
teoremas de los ejes paralelos, 350, 436
momento de inercia de masa, *véase* momento de inercia
momento flector, 324
momentos de inercia principales, 438
motor de reacción, 218
movimiento angular, 49
ecuación del, bidimensional, 304, 309
ecuación del, tridimensional, 448
movimiento armónico simple, 487
movimiento bajo una fuerza central, 210
movimiento bidimensional, *véase* movimiento plano
movimiento circular, 58, 68
movimiento curvilíneo, 40
movimiento del centro de masa, 101, 304
movimiento de un cuerpo rígido, *véase* cuerpo rígido
movimiento de un punto, 16
a lo largo de una línea recta, 17
a lo largo de una trayectoria curvilínea, 40
en componentes normal y tangencial, 55
en coordenadas cartesianas, 40
en coordenadas cilíndricas, 68
en coordenadas polares, 66
movimiento en línea recta, 17
movimiento oscilatorio, *véase* vibraciones
movimiento plano, 234, *véase también* cuerpo rígido, cinemática
movimiento rectilíneo, *véase* movimiento en línea recta
movimiento relativo de dos puntos, 82
aceleración, 83, 260
posición, 83
velocidad, 83, 239, 241

N

Newton, Isaac, 4, 5, 7, 74
Newton, leyes de, 4
Newton, segunda ley de, 4, 100, 304, 305
en componentes normal y tangencial, 115
en coordenadas cartesianas, 103
en coordenadas polares, 124
en un sistema coordenado en rotación, 289
para el movimiento en línea recta, 103
para el centro de masa de un cuerpo, 102
Newton, tercera ley de, 305
nutación, ángulo de, 465

O

órbita, 74
circular, 61, 77
elíptica, 77
hiperbólica, 77
parabólica, 77
órbita circular, 61, 77, 79
órbita geosincrónica, 79
orientación, 235
orientación de un cuerpo rígido, 464
oscilador resorte-masa, 484

P

par
inercial, 327
trabajo realizado por un, 373
par inercial, 327
partículas, sistemas de, 305, 368
péndulo, 485
perigeo, 78
periodo
amortiguado, 501
libre, 488

peso, 16
pie, 5, 8
plano de referencia, 162
potencia, 149, 374
precesión
  libre de momento, 467
  permanente, 466
precesión, ángulo de, 465
productos de inercia, 431
proyectil, 41
punto de referencia, 16

R

radián, 18
radio de curvatura instantáneo, 57
razón de flujo másico, 215
razón de giro, 466
redondeo, 6
regla de la cadena, 21, 32
regla de la mano derecha, 240
respuesta plana, 517
restitución, coeficiente de, 200, 398
rodamiento, 240
rotación
  respecto a un eje fijo, 233
  respecto a un punto fijo, 430, 448

S

satélite, 61, 74, 212
satélite de comunicaciones, 79
sección cónica, 76
separación de variables, 31
sismógrafo, 517
sistema coordenado
  cartesiano, 40
  cilíndrico, 68
  en rotación, 281, 423
  esférico, 536
  fijo al cuerpo, 232
  polar, 66
sistema coordenado centrado en la Tierra, 286
sistema coordenado fijo a la Tierra, 287
sistema internacional de unidades, 4, 7
sistemas sobreamortiguados, *véase* amortiguamiento subcrítico
sistemas subamortiguados, *véase* amortiguamiento subcrítico
slug, 5, 8
solución homogénea, 508
solución particular, 508
soluciones numéricas, 128, 341, 521

T

tablas
  de centroides de áreas, 532
  de centroides de líneas, 533
  de centroides de volúmenes, 535
  de derivadas, 530
  de integrales, 530
  de momentos de inercia de áreas, 532
  de momentos de inercia de cuerpos homogéneos, 534
Taylor, series de, 531
teoremas de los ejes paralelos, 350, 436
tiempo, 4
trabajo, 141, 147, 372
  realizado por el peso de un cuerpo, 147
  realizado por un par, 373
  realizado por un resorte lineal, 148
  relación con la energía potencial, 160
trabajo y la energía, principio del, 141
transductor, 517
transductor de desplazamientos, 516
traslación, 233
trigonometría, 529

U

unidades
  conversión de, 9
  del sistema inglés, 4, 8
  del sistema internacional, 4, 7
unidades angulares, 8
unidades básicas
  del sistema inglés, 8
  del sistema internacional, 7
unidades derivadas, 7
unidades inglesas, 4, 8
unidades SI, *véase* sistema internacional de unidades

V

vector de aceleración angular, 262
  de un sistema coordenado en rotación, 281
vector de posición, 16
  coordenadas cartesianas, 40
  coordenadas cilíndricas, 69
  coordenadas esféricas, 536
  coordenadas polares, 66
vector de velocidad angular, 240
  de un sistema coordenado en rotación, 281, 423
vectores unitarios
  en coordenadas cartesianas, 40
  en coordenadas cilíndricas, 68
  en componentes normal y tangencial, 55
  en coordenadas polares, 66
  en rotación, 50
vehículos de motor, dinámica de, 118
velocidad, 4, 16
  componentes normal y tangencial, 55, 58
  de escape, 36, 77
  determinada usando centro instantáneo, 254
  en coordenadas cartesianas, 40
  en coordenadas cilíndricas, 69
  en coordenadas esféricas, 536
  en coordenadas polares, 66
  movimiento en línea recta, 18
velocidad angular, 49, 235
velocidad relativa
  de dos puntos arbitrarios, 83
  de dos puntos de un cuerpo rígido, 239, 241, 423
  en un sistema coordenado en rotación, 281
vibración (vibraciones), 483
  amortiguadas y libres, 499
  de amplitud, 487
  de fase, 487
  de sistemas conservativos, 484
  forzadas, 508
  frecuencia de la, 488, 501
  no amortiguadas y libres, 486
  periodo de, 488, 501
  soluciones numéricas, 521
vibraciones amortiguadas, 499
  amortiguamiento crítico, 501
  amortiguamiento subcrítico, 500
  amortiguamiento supercrítico, 501
  decremento logarítmico, 501
  vibraciones libres, 486, 499
  vigas, fuerzas y momentos internos en, 324

Factores de conversión de unidades

TIEMPO

1 min = 60 s
1 h = 60 min = 3600 s
1 día = 24 h = 86 400 s

LONGITUD

1 m = 3.281 pie = 39.37 pulg
1 km = 0.6214 mi
1 pulg = 0.08333 pie = 0.02540 m
1 pie = 12 pulg = 0.3048 m
1 mi = 5280 pie = 1.609 km
1 milla náutica = 1852 m = 6080 pie

ÁNGULO

1 rad = $(18/\pi)^\circ$ = 57.30°
$1^\circ = \pi/180$ rad = 0.01745 rad
1 revolución = 2π rad = 360°
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

ÁREA

1 mm^2 = 1.550×10^{-3} $pulg^2$ = 1.076×10^{-5} pie^2
1 m^2 = 10.76 pie^2
1 $pulg^2$ = 645.2 mm^2
1 pie^2 = 144 $pulg^2$ = 0.0929 m^2

VOLUMEN

1 mm^3 = 6.102×10^{-5} $pulg^3$ = 3.531×10^{-8} pie^3
1 m^3 = 6.102×10^{4} $pulg^3$ = 35.31 pie^3
1 $pulg^3$ = 1.639×10^{4} mm^3 = 1.639×10^{-5} m^3
1 pie^3 = 0.02832 m^3

VELOCIDAD

1 m/s = 3.281 pie/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h = 0.9113 pie/s
1 mi/h = (88/60) pie/s = 1.609 km/h = 0.4470 m/s
1 nudo = 1 milla náutica/h = 0.5144 m/s = 1.689 pie/s

ACELERACIÓN

1 m/s^2 = 3.281 pie/s^2 = 39.37 $pulg/s^2$
1 $pulg/s^2$ = 0.08333 pie/s^2 = 0.02540 m/s^2
1 pie/s^2 = 0.3048 m/s^2
1 g = 9.81 m/s^2 = 32.2 pie/s^2

MASA

1 kg = 0.0685 slug
1 slug = 14.59 kg
1 t (tonelada métrica) = 10^3 kg = 68.5 slug

FUERZA

1 N = 0.2248 lb
1 lb = 4.448 N
1 klb = 1000 lb = 4448 N
1 ton = 2000 lb = 8896 N

TRABAJO Y ENERGÍA

1 J = 1 N-m = 0.7376 pie-lb
1 pie-lb = 1.356 J

POTENCIA

1 W = 1 N-m/s = 0.7376 pie-lb/s = 1.340×10^{-3} hp
1 pie-lb/s = 1.356 W
1 hp = 550 pie-lb/s = 746 W

PRESIÓN

1 Pa = 1 N/m^2 = 0.0209 lb/pie^2 = 1.451×10^{-4} $lb/pulg^2$
1 bar = 10^5 Pa
1 $lb/pulg^2$ = 144 lb/pie^2 = 6891 Pa
1 lb/pie^2 = 6.944×10^{-3} $lb/pulg^2$ = 47.85 Pa

OTRAS OBRAS DE INTERÉS PUBLICADAS POR **PEARSON:**

ALONSO y FINN: *Física*
BEDFORD y FOWLER: *Mecánica para ingeniería: Estática*
BOXER: *Termodinámica*
CLEMENS, O'DAFFER y COONEY: *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*
FULLER y TARWATER: *Geometría analítica. Séptima edición*
JOHN: *Ingeniería de los materiales*
SEARS, ZEMANSKY y YOUNG: *Física universitaria. Sexta edición*
SHERWIN: *Introducción a la termodinámica*
SMITH, CHARLES, DOSSEY, KEEDY y BITTINGER: *El álgebra de Addison-Wesley*
THOMAS y FINNEY: *Cálculo con geometría analítica. Sexta edición*
WRIGHT: *Introducción a la ingeniería*

ISBN 968-444-471-0
90000
9 789684 444713

Pearson Educación

Visítenos en:
www.pearson.com.mx